数理解析研究所講究録
第779巻 1992年 97-107

境界上の材料特性逆問題

城西大理学部　中村　玄　(Gen Nakamura)

1．序論　線形弾性体の材料特性を推定する問題（以下これを材料特性逆問題とよぶ）の一つとして，次の問題がある。

問題I．（この）線形弾性体の境界上で変位ベクトルと応力ベクトルを測定して，この線形弾性体の材料特性（即ち弾性テンソル）を決定せよ。

次にこの問題の数学的定式化を Dirichlet－Neumann 写像を用いて行う。

Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の有界領域とし，Ω の境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。今 Ω は線形非斉次弾性体とみなす。

まず次の順問題(BP)を考える。

$$(BP)\begin{cases} L_C \vec{u} := \operatorname{div} \sigma(\vec{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \vec{u}\big|_{\partial\Omega} = \vec{f} \end{cases}$$

ここで $\sigma(\vec{u})$ は応力テンソルを表わす。$\sigma(\vec{u})$ はまた次

の Hooke の法則に従う。

$$\text{(1.1)}\quad \sigma(\vec{u}) = C\,\varepsilon(\vec{u})$$

これの成分表示は

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \sum_{k,l=1}^{n} C_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

となる。ここで $\varepsilon(\vec{u})$ は線形ひずみを表わし，

$$\varepsilon(\vec{u}) := \mathrm{Sym}\,\nabla\vec{u} = 2^{-1}(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T)$$

で与えられる。そして $C = C(x) = (C_{ijkl}(x))_{1 \leq i,j,k,l \leq n} \in L^\infty(\overline{\Omega})$

は弾性テンソルを表わす。

古典的な線形弾性論では，C は次の性質をみたすとしてよい。

対称性：各 i, j, k, l $(1 \leq i, j, k, l \leq n)$ に対して

(i) $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ，(ii) $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ，(iii) $C_{ijkl} = C_{klij}$

をみたす。

強凸性：$\exists\,\delta > 0$; $0 \neq {}^\forall \varepsilon$; $n \times n$ symmetric matrix

$$\mathrm{trace}\ \varepsilon(C\varepsilon) \geq \delta\,\|\varepsilon\|^2 \quad \text{a.e. on } \overline{\Omega}$$

がなりたつ。

注意 (i) は $\varepsilon(\vec{u})$ の対称性より従う数学的性質。(ii) は角運動量保存則の帰結としての $\sigma(\vec{u})$ の対称性より従う。(iii) は所謂ゆる超弾性 (hyperelasticity) より従う。強凸性の物理的意味は，ひずみエネルギーの密度関数 (stored energy function) が，いかなる変形 $x \longmapsto x + \vec{u}(x)$ に対しても正の値をとると

という事である。

良く知られている様に(BP)は，$\forall \vec{f} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ に対して唯一つの解 $\vec{u} \in H^1(\Omega)$ をもち，

(1.2) $\quad \|\vec{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq \gamma \|\vec{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$

がなりたつ。ここに $\gamma \geq 0$ は $\vec{f}$ に無関係な定数である。

Green の公式により，$\forall \vec{f_j} \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対して

(1.3) $$Q_C(\vec{f_1}, \vec{f_2}) := \int_\Omega \mathrm{trace}\,(C\varepsilon(\vec{u_1}))\,\overline{\varepsilon(\vec{u_2})}\,dx$$

$$= \int_\Omega \mathrm{trace}\,\sigma(\vec{u_1})\,\overline{\nabla\vec{u_2}}\,dx = \int_{\partial\Omega} \sigma(\vec{u_1})\vec{n}\cdot\overline{\vec{f_2}}\,ds$$

ここで $\vec{n}$ は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトル場，ds は $\partial\Omega$ の線素或は面素を表わし，各 $\vec{u_j}$ は境界値問題：$L_C\vec{u_j}=0$ in Ω, $u_j|_{\partial\Omega} = \vec{f_j}$ $(j=1,2)$ の解を表わす。

(1.2) と (1.3) より容易に

$$Q_C(\vec{f_1}, \vec{f_2}) = \Lambda_C(\vec{f_1})(\vec{f_2}) \quad (\vec{f_1}, \vec{f_2} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

(1.4) $$Q_C(\vec{f_1}, \vec{f_2}) = \int_{\partial\Omega} \Lambda_C(\vec{f_1})\cdot\overline{\vec{f_2}}\,ds \quad (\vec{f_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega),\ \vec{f_2} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

(1.5) $$\Lambda_C(\vec{f_1}) = \sigma(\vec{u_1})\vec{n} \quad (\vec{f_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))$$

をみたす $\Lambda_C(\vec{f_1}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ が各 $\vec{f_1} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ に対して唯一つ存在する事が示せる。

定義　写像 Λ_C ; $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \ni \vec{f} \longmapsto \Lambda_C(\vec{f}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ を Dirichlet-Neumann 写像（以下 D-N 写像と略記）という。

注意

(i) 明らかに Λ_C と Q_C の情報は等価である。

(ii) (1.5) より Λ_C は境界変位ベクトルに境界応力ベクトルを対応させる写像とみなせる。

(iii) L_C の形式的自己共役性より, $\Lambda_C ; L^2(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ は対称作用素である。但し Λ_C の定義域は $C^\infty(\partial\Omega)$ とする。

さて問題Ⅰの D−N 写像を用いた数学的定式化は, 次の通りである。

問題Ⅱ Λ_C より C を決定せよ。

注意

(i) Λ_C 或は Q_C を観測データとする事は実用性にとぼしい。この意味で問題Ⅱは問題Ⅰを数学的に理想化している。もしこの様な理想化により, この種の材料特性逆問題の数学的構造が明らかになれば, 実用上有益な示唆を与える事は間違いない。ましてや問題Ⅱの完全な理解なくしては, 問題Ⅰの深い理解などは不可能である。

(ii) 問題Ⅱで行った定式化は, 電気伝導率を推定する問題に対する Sylvester−Uhlmann の仕事 [8] をまねたものである。

問題Ⅱを考えるにあたっての第一歩として次の問題が考えられる。(cf. [9])

問題III（境界上の材料特性逆問題）Λ_C より $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\partial^\alpha C|_{\partial\Omega}$ を決定せよ。ここで $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対して $\partial^\alpha C = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n} C$ である。

注意 問題IIIが肯定的であれば，$\partial\Omega$ 及び C が実解析的ならば，（C の再構成の手続きは別として）Λ_C より C が一意的に決まる事が分る。

本稿では問題IIIに限定して論じる。

この序論を終るに当って池畠[4]の先駆的仕事がある事を指摘しておきたい。池畠は，等方的線形弾性体について写像 $C \longmapsto \Lambda_C$ の $C=\mathrm{const.}$ における Frechét 微分の単射性を示した。

2．結果 我々の新しい結果について述べる前にこれまでの結果について概観しておく。

定理 2.1 (Akamatsu, Nakamura and Steinberg [2]) $n=2$ とする。そして $C \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は等方的とする。即ち

$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ とする。ここで $\lambda, \mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は Lamé 係数，δ_{ij} は Kronecker のデルタである。このとき Λ_C より各 $\partial^\alpha C|_{\partial\Omega}$ を定める公式が求まる。

定理 2.2 (Akamatsu [1]) $n=3$ の時にも定理 2.1 と同様な結果がなりたつ。

定理 2.1 と定理 2.2 は，適当な座標系に関して Λ_C の全表

象を$\mathbb{R}^n$におけるL_Cの適当なパラメトリックスとそれに付随したCalderon projectorの全表象により表現した上で，各$\partial^\alpha C|_{\partial\Omega}$を与える公式を数式処理で求めている。

定理2.1，定理2.2の証明法は，低次元等方弾性体にだけあてはまる独特なもので一般化は難しい。最近我々は一般次元等方弾性体や非等方弾性体にも通用するより一般的な方法を見出した。まず基礎となる基本定理について述べる。

定理2.3 (Nakamura and Uhlmann [7]) 次の(i)又は(ii)を仮定する。

(i) Cは超弾性的かつ(後述の)Kの固有値は相異なる。

(ii) Cは等方的である。

このときΛ_Cの全表象Λ_Cについて次の公式がなりたつ。

$$(2.1)\quad \Lambda_C \simeq Z\Lambda + \sum_{j=1}^{\infty} W_j\,(D_s^j Z)\,\Lambda$$

ここでsは$\partial\Omega$の局所定義関数，$D_s = -\sqrt{-1}\,\partial/\partial s$，各$W_j$は$n\times n$マトリックス全体の上の線形同型写像，$Z$は以下に定めるsurface impedance tensor: $\forall(y,\eta)\in T^*(\partial\Omega)\,(\subset T^*(\mathbb{R}^n))$に対して

$$Z = Z(y,\eta) := -Q^{-1}(y,\eta) - \sqrt{-1}\,Q^{-1}(y,\eta)S(y,\eta)$$

ここで

$$Q(y,\eta) := -(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \langle w, w\rangle^{-1}\,d\varphi,$$

$$S(y,\eta) := -(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \langle w, w\rangle^{-1}\langle w, \zeta\rangle\,d\varphi,$$

$$w := -(\sin\varphi)\,\eta/|\eta| + (\cos\varphi)\,ds(y) = \sum_{i=1}^{n} w_i\,(dx^i)_y,$$

$$\zeta := (\cos\varphi)\eta/|\eta| + (\sin\varphi)\,ds(y) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i (dx^i)_y,$$

$$\langle \zeta, w\rangle_j^{\,k} := \langle \zeta, w\rangle \text{ の } (j,k) \text{ 成分} = \sum_{i,l=1}^{n} \zeta_i C_j^{i\,kl}(y) w_l,$$

$$C_j^{i\,kl}(y) := \sum_{a,b,c=1}^{n} g^{ai}(y) g^{bk}(y) g^{cl}(y) C_{ajbc}(y), \quad g^{ai}(y) := \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x^a}{\partial x_r}(y)$$

$\frac{\partial x^i}{\partial x_r}(y)$, $\Lambda = |\eta|$, $(x_1, \cdots\cdots, x_r)$ はデカルト座標系, $y = (y^1, \cdots, y^{n-1}) \in \partial\Omega$ と $(x^1, \cdots\cdots, x^{n-1}, x^n) = (y^1, \cdots, y^{n-1}, s)$ は $dy^j \perp ds$ at y $(1 \le j \le n-1)$ をみたす局所座標系である。さらに各 W_j は C の s 変数微分には無関係であり, (2.1)式の記号 $\simeq$ の意味は次の通りである。各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Lambda_C - \{ Z\Lambda + \sum_{j=1}^{k-1} W_j (D_s^j Z)\Lambda \} = 0 \quad \mathrm{mod}\,(\tilde{T}^{k-1}, S^{-k+1})$$

但し $\mathrm{mod}\,(\tilde{T}^{k-1}, S^{-k+1})$ は S^{-k+1} に含まれる項と S^{-k+1} には含まれず C の s 変数微分の階数が $k-1$ 階以下の項を無視する事を意味している。最後に K の定義は次の通りである。

$$K = -\begin{bmatrix} \langle ds(y), ds(y)\rangle^{-1} \langle ds(y), \eta\rangle & \Lambda \langle ds(y), ds(y)\rangle^{-1} \\ \Lambda^{-1}\{\langle \eta, ds(y)\rangle \langle ds(y), ds(y)\rangle^{-1} \langle ds(y), \eta\rangle - \langle \eta, \eta\rangle\} & \langle \eta, ds(y)\rangle \langle ds(y), ds(y)\rangle^{-1} \end{bmatrix}$$

定理 2.3 は, まず中村 [5] の Neumann 作用素 (i.e. D−N 写像) 構成の手続きを $t=0$ として行い, その構成手続きを注意深く調べる。次に非等方弾性体を取り扱う上で有効な代数

的枠組みである Stroh formalism を一般次元にまで拡張し，そこで得られるいくつかの関係式を用いて D−N 写像の全表象を surface impedance tensor と関係付けて整理することにより示される。

定理2.3の副産物として次の定理2.4と定理2.5が得られる。

定理2.4　$\mathbb{N} \ni {}^\forall n \geq 2$ に対しても定理2.1はなりたつ。

これは2次元，3次元斉次等方弾性体について Chadwick−Smith [3] が行った surface impedance tensor を K の固有ベクトル，一般固有ベクトルで表示した公式を一般次元にまで拡張する事により示される。

定理2.3よりもしも Z より $C|_{\partial\Omega}$ が決まり，$\partial_s^j Z$ より $\partial_s^j C|_{\partial\Omega}$ が決まることが分れば，問題Ⅲは肯定的に解けた事になる。$Z(y,\eta)$ がテンソルである事そして点 y における正規直交座標系に関してエルミート行列である事に注意すると，$Z(y,\eta)$ は $C|_{\partial\Omega}$ 決定に当って高々 $\frac{n(n+1)}{2}$ ケの独立な情報しか持ち得ない。これに対して決めるべき $C|_{\partial\Omega}$ は $1+2+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$ の要素よりなる。$C(y)$ を上述の様な正規直交座標系で表わすと，$C(y)=(C_{pqrs}(y))$ は前述の対称性(i),(ii),(iii)をみたす。そこで (p,q)，(r,s) をそれぞれ適当に並べる事により $C(y)$ は $\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$ の対称行列 $\hat{C}(y)$ となる。そこで

物理的根拠は全くないが，もしも

(*) $\hat{C}(y)$ は対角行列である

とすると，$Z(y,\eta)$の情報量と決めるべき $C|_{\partial\Omega}$ の要素数が丁度一致して都合がよい。実際次が分る。

定理2.5　$n=2$ の時に (*) がなりたつとすると Λ_C より各 $\partial^\alpha C|_{\partial\Omega}$ を決める公式が求まる。

注意　実は前述のKの特性根に対して少し条件をつける必要がある。

定理2.5は，まず特殊な座標系で surface impedance tensor の弾性テンソルによる表現式を数式処理を用いて導出する。次にその表現式の座標変換による変換公式を調べることにより，Λ_C より各 $\partial^\alpha C|_{\partial\Omega}$ が求まることを示す。

参考文献

[1] Akamatsu M, Identification of Lamé coefficients from boundary observations, Report at Soviet-Japan Seminar on Inverse Problems, August, 1991, Novosibirs USSR

[2] Akamatsu M, Nakamura G, Steinberg S, Identification of Lamé coefficients from boundary observations, Inverse Problems, 7, 1991, pp. 335–354.

[3] Chadwick P, Smith G.D, Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials, in Advances in Applied Mechanics, Yih C.R. ed., vol.17, Academic Press, New York, 1977, pp. 303–376

[4] Ikehata M, Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection, SIAM J. Appl. Math., 50, 1990, pp. 1635–1644

[5] Nakamura G, Existence and propagation of Rayleigh waves and pulses, in Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications, Wu J.J, Ting T.C.T, Barnett D.M. ed.. SIAM Proceedings, SIAM, Philadelphia, 1991, pp. 215–231

[6] Nakamura G, Uhlmann G, Identification of Lamé parameters by boundary measurements (to appear in American J. of Math.)

[7] Nakamura G, Uhlmann G, A unified treatment of inverse problem at the boundary for elastic medium (in preparation)

[8] Sylvester J, Uhlmann G, A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, Ann. Math., 125, 1987, pp. 153–169.

[9] Sylvester J, Uhlmann G, Inverse boundary value problems at the boundary, CPAM, 41, 1988, pp. 197-219.