数理解析研究所講究録
第 780 巻 1992 年 64-80

障害問題の解の臨界点について

東工大理学部　坂口　茂(Shigeru Sakaguchi)

§1. 序

先の論文[5]で我々は平面内の有界単連結領域における障害問題(obstacle problem)の解の形状を考察し、障害物(obstacle)の極大点の個数に応じてできる解の鞍点(saddle point)の個数を数えた。この論文では単連結領域でなく多重連結領域において同様のことを考察する。

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界 K 重連結領域でその境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。つまり、$\partial\Omega$ は K 個の単純閉曲線 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_K$ よりなり、$\Gamma_2, \cdots, \Gamma_K$ は Γ_1 によって囲まれているものとする。$a = (a_1, a_2)$ を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への滑らかな写像とし、2つの正定数 λ, Λ について

(1.1) $$\lambda|\xi|^2 \leqq \sum \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(p)\xi_i\xi_j \leqq \Lambda|\xi|^2 \qquad (p, \xi \in \mathbb{R}^2)$$

をみたすものとする。障害物を表す関数 $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ と境界値 $f \in C^1(\overline{\Omega})$ を次をみたすように与える。

(1.2) $$\psi < f \quad \text{on } \partial\Omega$$

次の変分不等式を考える。

(1.3) $\quad u \in \mathbb{K} : \int_\Omega a(\nabla u)\cdot\nabla(v-u)\,dx \geqq 0 \quad \text{for all } v \in \mathbb{K}$

ここで $\mathbb{K} := \{ v \in H^1(\Omega) ;\ v \geqq \psi \text{ in } \Omega ,\ v = f \text{ on } \partial\Omega \}$。

一意解の存在はわかっていてそれを u とすると、$u \in C^{1,1}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ が成り立つ。(Kinderlehrer と Stampacchia の本 [4] をみよ。) I を次で定義される接触集合(coincidence set)

(1.4) $\quad I := \{ x \in \Omega ;\ u(x) = \psi(x) \}$

としよう。(1.2)より $I \neq \phi$ ならば、I は Ω に含まれる compact set である。さらに u は次をみたす。

(1.5) $\quad \mathrm{div}(a(\nabla u)) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus I,$

(1.6) $\quad \mathrm{div}(a(\nabla u)) \leqq 0 \quad \text{in } \Omega,$

(1.7) $\quad u(x) = \inf_{g \in G} g(x) \quad \text{for all } x \in \Omega$

ここで、G は $\overline{\Omega}$ 上の Lipschitz 連続な関数 g で

(1.8) $\quad \mathrm{div}(a(\nabla g)) \leqq 0 \text{ in } \Omega,\ g \geqq \psi \text{ in } \Omega,\ g \geqq f \text{ on } \partial\Omega$

をみたすもの全体の集合である。w を Dirichlet 問題

(1.9) $\quad \mathrm{div}(a(\nabla w)) = 0 \text{ in } \Omega ,\ w = f \text{ on } \partial\Omega$

の一意解とし、$\{ x \in \Omega ;\ \psi(x) > w(x) \} \neq \phi$ を仮定するとき、

<u>定理 1.</u> ψ の $\{ x \in \Omega ;\ \psi(x) > w(x) \}$ での臨界点の個数は有限で、ψ の極大点の個数を N、$f|_{\partial\Omega}$ の極大点の個数を M ($f|_{\partial\Omega} \equiv 0$ の時は $M = 0$ と考える。)とする。このとき、解

u の Ω での臨界点の個数は有限で、$\Omega\setminus I$ での臨界点たちの<u>多重度</u>をそれぞれ $m_1, \cdots, m_k$（k は臨界点の個数を表す。）とすると、次の不等式

$$(1.10) \qquad \sum_{j=1}^{k} m_j + 2 - K \leqq N + M$$

が成り立つ。

を得る。さらに次の定理は不等式 (1.10) で等号が成立するための十分条件を与える。

<u>定理2</u>. 定理1の仮定の下にさらに次の(1)～(3)を仮定する。

(1) ψ は N 個の最大点をもち $\{x\in\Omega\,;\,\psi(x)>W(x)\}$ で他の臨界点をもたない。

(2) $f|_{\partial\Omega}\equiv 0$ 又は、$f|_{\partial\Omega}$ が M 個の最大点と M 個の最小点をもち、これ以外で f の $\partial\Omega$ の接方向の微分は消えない。

(3) $f|_{\partial\Omega}\equiv 0$ でないときは $\max\limits_{\partial\Omega} f = \max\limits_{\Omega} \psi$ である。

このとき、(1.10) において等号が成立する。

ところで定理1の中の<u>多重度</u>とは、Hartman-Wintner [3] の結果によって定まるものである（論文 [1, p231] を見よ。）。くわしく述べると、

定理(Hartman-Wintner). $D\subset\mathbb{R}^2$ を領域としそこで、0階の微分の項を含まない十分係数の滑らかな線形楕円型作用素

$$L := \sum a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

を考える。u を $Lu=0$ in D の非定数解とするとき次が成り立つ。

(1) u の内部臨界点はすべて孤立している。

(2) $p\in D$ を u の臨界点(つまり $\nabla u(p)=0$)とするとき、ある整数 $m\geqq 1$ と p の近傍 U と2つの正定数 C_1, C_2 が存在して

$$C_1|x-p|^m \leqq |\nabla u(x)| \leqq C_2|x-p|^m \quad (x\in U)$$

が成り立ち、しかも $\{x\in U\,;\,u(x)=u(p)\}$ は p において交叉する $m+1$ 本の単純曲線からなる。

この定理にある整数 m を臨界点 p の多重度とよぶ。今(1.5)と次の節の補題2.1より、u は $\Omega\setminus I$ においてある線形楕円型作用素 L に対して $Lu=0$ の解になっているとみなせるので $\Omega\setminus I$ において臨界点の多重度が定義できる。

注意1. 障害問題でないDirichlet問題のときには、単連結領域の時には Alessandrini [1] の結果があり、多重連結領域の場合は、調和関数で境界値が各々の単純閉曲線上で恒等的に

1か0の値をとるもののみを扱ったWalsh[7]の結果がある。

注意2. もし $\{x\in\Omega;\ \psi(x)>w(x)\}=\phi$ ならば $u\equiv w$ となってしまい、障害物のない単なるDirichlet問題を考えることになるので $\{x\in\Omega;\ \psi(x)>w(x)\}\neq\phi$ を仮定した。ただし我々の証明法で障害物のない単なるDirichlet問題の場合も同様に扱うことができ、$f|_{\partial\Omega}$ が非定数の場合 $N=0$ $I=\phi$ として定理1と定理2がそのまま成立する。

以下の節で証明の概略を述べる。§2で定理1，§3で定理2を扱う。証明は論文[5]に沿うが本質的なちがいは領域が単連結から多重連結になったところからくる。

§2. 定理1の証明の概略

$f|_{\partial\Omega}\equiv 0$ の時の方がやさしいので $f|_{\partial\Omega}$ が非定数の場合のみを扱う。

補題2.1. u は $\Omega\setminus I$ の任意の開部分集合上で定数でない。

証明：比較定理より $u>w$ in Ω。よって $I\neq\phi$ かつ I は $\{x\in\Omega;\ \psi(x)>w(x)\}$ に含まれる。一方，Hartman-Wintnerの定理は解の一意接続定理を導くから，もし u がある開集合上で定数ならば，それを含む $\Omega\setminus I$ の連結成分 ω 上で u は定数になる。このとき $f|_{\partial\Omega}$ は非定数であるから $\partial\omega\cap\Omega\neq\phi$。

よって $\partial\omega\cap I$ は無限個の点を含む。他方 I 上では $\nabla u=\nabla\psi$ が成立するので I 上の無限個の点で $\nabla\psi=0$。これは、$\{x\in\Omega;\ \psi(x)>w(x)\}$ で ψ の臨界点の個数は有限であることに矛盾する。$\square$

補題2.2. (1) $\Omega\setminus I$ での u の臨界点は孤立している。

(2) u は $\Omega\setminus I$ で極大点をもたない。

(3) u は Ω で極小点をもたない。

証明： 補題2.1，Hartman-Wintner の定理と (1.5) より (1) と (2) は従う。(3) は (1.6) と最大値の原理による。$\square$

補題2.3 u の $\overline{\Omega}$ での極大点は $f|_{\partial\Omega}$ の極大点か ψ の Ω での極大点であって，u の $\overline{\Omega}$ での極大点の個数は $N+M$ 以下である。

証明：補題2.2の(2)より従う。$\square$

次の2つの補題が領域が多重連結になったことに対応する本質的な補題である。

補題2.4 $x_1,\cdots,x_k\in\Omega\setminus I$ を u の臨界点とし，$m_1,\cdots,m_k$ をそれぞれの多重度とする。さらにある実数 t に対して $u(x_1)=\cdots=u(x_k)=t$ を仮定する。集合 A を臨界点 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ と各 x_j $(j=1,\cdots,k)$ の少くともひとつをその境界の点としてもつ $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$ の連結成分たちの和集合とする。

さらに A に次の3条件を仮定する。

(1) A は連結である。

(2) A は臨界点 x_j $(j=1,\cdots,k)$ のどれかを境界点としてもつちょうど l 個の $\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$ の連結成分を囲む。つまり、l 個の各々の成分に対して A 内の単純閉曲線 C が存在して C の内部領域に各成分が含まれる。

(3) A に含まれる $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$ の連結成分は一般に多重連結であり、それらには穴があるが、その穴の中で(2)の l 個の $\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$ の成分のどれかを少くともひとつ含むものの個数はちょうど h である。$(h\leqq l)$

このとき、結論は A はちょうど $\left(\sum_{j=1}^{k}m_j+1\right)+h-l$ 個の $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$ の連結成分を含み，A によって囲まれた l 個の $\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$ の連結成分の各々には少くともひとつの Γ_j $(j=2,\cdots,K)$ が含まれる。

<u>補題2.5</u>　$x_1,\cdots,x_k\in\Omega\setminus I$ を u の臨界点とし，$m_1,\cdots,m_k$ をそれぞれの多重度とする。このとき u は $\overline{\Omega}$ で少くとも $\sum_{j=1}^{k}m_j+2-K$ 個の極大点をもつ。

補題2.3 と補題2.5 より定理1の不等式(1.10)が従い、$\Omega\setminus I$ での u の臨界点の個数は有限で $I\subset\{x\in\Omega;\ \psi(x)>w(x)\}$

より f に対する仮定から u のΩでの臨界点の個数も有限になって定理1の証明がおわる。以下補題2.4と補題2.5の証明の概略を与える。

補題2.4の証明の概略：まず(1.6)と最大値の原理より、$\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}$の連結成分は必ず境界$\partial\Omega$に達しなければならないので、Aによって囲まれた成分はΓ_1でない$\Gamma_2,\cdots,\Gamma_K$のどれかに必ず達する。従ってAによって囲まれたl個の$\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$の連結成分の各々には少くともひとつの$\Gamma_j$ $(j=2,\cdots,K)$が含まれる。$l=0$（従って$h=0$）の時は領域が単連結な場合の論文[5]（[5, Lemma 2.6]をみよ。）の証明より、Aはちょうど$\sum_{j=1}^{h}m_j+1$個の$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$の連結成分を含む。そこで、はじめAは(2)でいう$\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$の連結成分をひとつも囲んでないと思うと$\sum_{j=1}^{h}m_j+1$個の$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$の連結成分を含むが、(2)(3)の仮定よりこの中に同じものがある可能性がある。ある2つをとり出し実はそれが一致しているとすると、Aは(2)でいう$\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$の成分を1つ囲む。このような一致する組がS組存在すればAはS個の(2)でいう成分を囲む。また(3)により、さらにh個の成分が囲まれる。$S+h=l$より、Aはちょうど$\left(\sum_{j=1}^{h}m_j+1\right)-(l-h)$個の$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$の成分を

含む。□

補題2.5 の証明の概略：論文[5]の Lemma 2.7 の証明に沿う。まず $t=u(x_1)=\cdots=u(x_k)$ の場合を考える。集合 B を臨界点 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ と各 x_j $(j=1,\cdots,k)$ の少くともひとつをその境界点としてもつ $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$ の連結成分たちの和集合とする。B の連結成分は有限個でそれを $A_1,\cdots,A_q$ としよう。各 A_i がそれぞれちょうど l_i 個の補題2.4 の仮定(2)でいう $\{x\in\Omega;\ u(x)<t\}\cup\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j$ の連結成分を囲み、仮定(3)でいう h_i 個の穴があれば、各 A_i に補題2.4 を用いて、B は $\sum_{j=1}^{k}m_j+q+\sum_{i=1}^{q}h_i-\sum_{i=1}^{q}l_i$ 個の $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$ の連結成分を含む。ところで補題2.4 の最後のところより $\sum_{i=1}^{q}l_i\leq K-1$ が成り立つ。$q\geq 1$, $\sum_{i=1}^{q}h_i\geq 0$ を使って、B は少くとも $\sum_{j=1}^{k}m_j+2-K$ 個の $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>t\}$ の連結成分を含む。つまり、u は $\overline{\Omega}$ で少くとも $\sum_{j=1}^{k}m_j+2-K$ 個の極大点をもつ。そこで一般性を失うことなく、次を仮定しよう。

(2.7) $u(x_1)=\cdots=u(x_{j_1})<u(x_{j_1+1})=\cdots=u(x_{j_2})<\cdots<u(x_{j_s+1})=\cdots=u(x_{j_{s+1}})$

ここで $j_{s+1}=k$, $s\geq 1$, $j_0=0$ としよう。I_n を $\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>u(x_j)\}$ $(1\leq j\leq n)$ の連結成分全体の集合とする。さらに J_n を I_n の部分集合で次によって定義されるものとする。

(2.2) $\omega \in J_n$ とは ω はある $p\ (1 \leqq p \leqq n)$ に対して $\{x \in \overline{\Omega};$ $u(x) > u(x_p)\}$ の連結成分であって、$n \geqq q > p$ かつ $u(x_q) > u(x_p)$ なる任意の q に対して $\{x \in \overline{\Omega};\ u(x) > u(x_q)\}$ の任意の連結成分を ω は含まないこととする。

この定義から J_n は disjoint な連結成分たちより成ることがわかる。$|J_n|$ によって J_n の元の個数を表そう。(2.1)を考慮して $B_t\ (1 \leqq t \leqq s+1)$ を臨界点 $\{x_{j_{t-1}+1}, \cdots, x_{j_t}\}$ とこれらの少くともひとつをその境界点としてもつ $\{x \in \overline{\Omega};\ u(x) > u(x_{j_t})\}$ の連結成分たちの和集合とする。t を1つ固定したとき B_t の連結成分の個数は有限でその各々が囲む補題2.4の仮定(2)でいう $\{x_{j_{t-1}+1}, \cdots, x_{j_t}\}$ の少くともひとつを境界点としてもつ $\{x \in \Omega;\ u(x) < u(x_{j_t})\} \cup \bigcup_{j=2}^{k} \Gamma_j$ の連結成分の個数の和を l_t, 同じく仮定(3)の穴の個数の和を h_t とする。$t = u(x_1) = \cdots = u(x_\ell)$ の場合と同様にして、B_1 は少くとも $\left(\sum_{j=1}^{j_1} m_j + 1\right) - (l_1 - h_1)$ 個の $\{x \in \overline{\Omega};\ u(x) > u(x_{j_1})\}$ の連結成分を含む。しかも l_1 個の補題2.4の(2)でいう成分にはすべて異なる Γ_i たちが少くともひとつずつ含まれる。そこで帰納法で次を示そう。

(2.3) $$|J_{j_t}| \geqq \sum_{j=1}^{j_t} m_j + 1 - \sum_{r=1}^{t} (l_r - h_r)$$

(2.4) l_t 個の B_t によって囲まれた補題2.4の(2)でいう成分の各々は $\sum_{r=1}^{t-1} (l_r - h_r)$ 個の $B_r\ (r = 1, \cdots, t-1)$ によって囲まれた対応する成分に1対1に対応して決めた Γ_i

Lたち以外のΓ_i $(i=2,\cdots,K)$を少くとも1つずつ含む。

$t=1$の場合はすでに示した。$1\leq t\leq p$の任意のtについて(2.3)(2.4)を仮定して$t=p+1$の場合を示そう。$\{x_{j_p+1},\cdots,x_{j_{p+1}}\}\subset\bigcup_{w\in J_{j_p}}w$より、この各$x_j$はある$w\in J_{j_p}$に入る。しかも$w$は$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>u(x_{j_p})\}$の成分である。$\{x_{j_p+1},\cdots,x_{j_{p+1}}\}$がちょうど$q$個の成分$\omega_1,\cdots,\omega_q$に入ったとするとき、それぞれの$\omega_j$ $(j=1,\cdots,q)$の中で$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>u(x_{j_{p+1}})\}$の成分の個数を数えよう。先の$t=u(x_1)=\cdots=u(x_q)$の場合と同様にして考えると、補題2.4を使って$\omega_j$ $(j=1,\cdots,q)$たちの中に$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>u(x_{j_{p+1}})\}$の成分は少くとも$\sum_{j=j_p+1}^{j_{p+1}}m_j+q-(l_{p+1}-h_{p+1})$個ある。従って

$$|J_{j_{p+1}}|\geqq|J_{j_p}|+\Big\{\sum_{j=j_p+1}^{j_{p+1}}m_j+q-(l_{p+1}-h_{p+1})\Big\}-q$$

さらに帰納法の仮定を使って

$$\geqq\sum_{j=1}^{j_{p+1}}m_j+1-\sum_{r=1}^{p+1}(l_r-h_r)$$

ゆえに(2.3)が示された。そこで問題は(2.4)である。l_{p+1}個のB_{p+1}によって囲まれた補題2.4(2)でいう成分の任意の1つをωとしよう。$\omega_\theta:=\{x\in\omega;\ u(x)<\theta$ 又は $x\in\bigcup_{j=2}^{K}\Gamma_j\}$, $A:=B_{p+1}$のωを囲む連結成分，とおこう。このとき、$\omega_{u(x_{j_{p+1}})}=\omega$であり、$\omega_\theta$は$\theta$を小さくすると単調に減少する。$\theta<u(x_{j_{p+1}})$のとき$\omega_\theta$は$A$を含む$\{x\in\overline{\Omega};\ u(x)>\theta\}$の成分ひとつによって囲まれている。$\theta$を$u(x_{j_{p+1}})$から減少させてい

き、順に $\theta=u(x_{j_p})$, $\theta=u(x_{j_{p-1}})$, --- としていったとき、はじめて補題2.4(3)の状況になる θ があれば、それを $\theta=u(x_{j_{r_0}})$ とする。もちろん $1\leqq r_0\leqq p$ である。従って l_{p+1} 個の B_{p+1} によって囲まれた補題2.4(2)でいう任意の成分 ω に対して、(イ) $r_0=p$ となる場合, (ロ) $1\leqq r_0<p$ となる場合, (ハ) r_0 が存在しない場合, の3つの場合が考えられる。(イ)となる ω を $\omega^1,\cdots,\omega^\nu$ としよう。各 $\omega^i_{u(x_{j_p})}$ は $\{x\in\Omega\,;\,u(x)>u(x_{j_p})\}$ の成分のひとつによって囲まれることと帰納法の仮定より、l_p-h_p 個の B_p によって囲まれる補題2.4(2)でいう成分に対応して異なる P_i を対応させることにより、$\omega^1,\cdots,\omega^\nu$ のそれぞれが $\sum_{r=1}^{p}(l_p-h_r)$ 個の B_r $(r=1,\cdots,p)$ によって囲まれた補題2.4の(2)でいう成分に1対1に対応して P_i を決めることができたところの P_i たち以外の P_i $(i=2,\cdots,k)$ の少くとも1つを含むことができる。(ロ)のような ω に対しては r_0 の決め方から $\sum_{r=r_0+1}^{p}l_r$ 個の B_r $(r=r_0+1,\cdots,p)$ によって囲まれた補題2.4(2)でいう成分に含まれる P_i たち以外の P_i を含み、帰納法の仮定と $\omega_{u(x_{j_{r_0}})}$ が $\{x\in\Omega\,;\,u(x)>u(x_{j_{r_0}})\}$ の成分のひとつによって囲まれることから、$\sum_{r=1}^{r_0}(l_r-h_r)$ 個の成分に対応して決めた P_i たち以外の P_i を ω は含むので、その結果として、ω は $\sum_{r=1}^{p}(l_r-h_r)$ 個の成分に対応して(イ)で決めた P_i たち以外の P_i を含む。(ハ)の場合は明らかである。以上より帰納法が成立する。つまり、

(2,4) が $t=p+1$ のとき成り立つ。ゆえに $t=s+1$ のとき、(2,3)(2,4) が成り立ち、その結果として、(2,3) より

$$|J_k| = |J_{d_{s+1}}| \geqq \sum_{j=1}^{k} m_j + 1 - \sum_{r=1}^{s+1}(l_r - h_r)$$

しかも (2,4) より

$$\sum_{r=1}^{s+1}(l_r - h_r) \leqq K-1$$

となって、

$$|J_k| \geqq \sum_{j=1}^{k} m_j + 2 - K$$

を得る。以上で補題2.5 の証明の概略が終わる。□

§3, 定理2の証明の概略

§2 と同様に $f|_{\partial\Omega}$ が非定数の場合を扱う。論文[5] の Theorem 8 の証明に沿う。論文[5] の Theorem 8 は Ω が単連結のときを扱っているが、補題2.4 と補題2.5 の証明の方法を利用することにより、同様に証明できる。

$p_1, \cdots, p_N$ を ψ の最大点，$q_1, \cdots, q_M$，$z_1, \cdots, z_M$ をそれぞれ $f|_{\partial\Omega}$ の最大点，最小点たちとしよう。ここで注意することは定理2 の仮定より $M \geqq K$ でどの Γ_j $(j=1, \cdots, K)$ に対しても $f|_{\Gamma_j}$ は最大点と最小点を同じ数もつことである。$g(x) = \max_{\Omega} \psi$ $(= \max_{\partial\Omega} f)$ と (1.7) でおくことより、$u \leqq \max_{\Omega} \psi$ $(\text{in } \Omega)$ が成り立つ。従って $\{p_1, \cdots, p_N\} \subset I$。よって補題2.3 より、$u$ の $\overline{\Omega}$ での極大点の集合は $\{p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_M\}$ に一致する。

他方(1.6)と最大値の原理より $\min_{\partial\Omega} f < u$ (in Ω) が成り立つ。ゆえに $\min_{\partial\Omega} f < u < \max_{\partial\Omega} f$ (in $\Omega \setminus I$)。よって(1.5)とHopfの補題([2, Lemma 3.4, p.34]をみよ。)より、$\partial\Omega$上での内法線方向のuの微分はz_j $(j=1,\cdots,M)$で正で、q_j $(j=1,\cdots,M)$において負となる。結果として定理2の仮定(2)より、∇uは$\partial\Omega$上で消えない。よって定理1と定理2の仮定(1)からuの$\overline{\Omega}$での臨界点は、$\Omega \setminus I$での有限個のsaddle pointsと、$p_1,\cdots,p_N$のみになる。従ってHartman-Wintnerの定理と最大値の原理と陰関数定理を使うことにより、次の補題を得る。

<u>補題3.1</u> $\min_{\partial\Omega} f < t < \max_{\Omega} \psi (= \max_{\partial\Omega} f)$ を任意に1つとる。γを、等高線$\{x \in \overline{\Omega};\ u(x) = t\}$の任意の連結成分とするとき次のことが成り立つ。

(1) γがuの臨界点を含まなければ、γは$\partial\Omega$に終点をもつ単純C^1正則弧か、$\{p_1,\cdots,p_N\}$の点又は$\{\Gamma_2,\cdots,\Gamma_K\}$の要素を少くとも1つ囲む単純$C^1$正則閉曲線である。

(2) γがuの臨界点のいくつかを含むならば、γは次の2種類(a)(b)の曲線たちの集まりであって、それぞれの曲線はuの臨界点のみでつながる。(a): 単純区分的C^1正則閉曲線で少くとも$\{p_1,\cdots,p_N\}$の点又は$\{\Gamma_2,\cdots,\Gamma_K\}$の要素を1つ囲むもの。 (b): 単純区分的$C^1$正則弧で終点を$\partial\Omega$に

もつもの。

(3) $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)=t\}$ の連結成分は有限個である。

(4) (1)と(2)に出てきた単純弧の $\partial\Omega$ 上の終点は、ただ1つの弧に属し、しかもその終点で弧は $\partial\Omega$ に接しない。

(5) $\partial\Omega$ 上の終点の個数はちょうど $2M$ である。

$\overline{\Omega}$ での u の臨界点は有限個しかないので、補題2.2の(2)(3)を使って、次の命題が成り立つ。

<u>命題3.2</u> ある十分小の実数 $r>0$ が存在して次をみたす。

(1) $\displaystyle\max_{\partial B_r(y)\cap\overline{\Omega}} u < \max_{\Omega} \psi$ for all $y\in\{p_1,\cdots,p_N,q_1,\cdots,q_M\}$

(2) $\displaystyle\min_{\partial B_r(z)\cap\overline{\Omega}} u > \min_{\partial\Omega} f$ for all $z\in\{z_1,\cdots,z_M\}$

(3) $\nabla u\neq 0$ in $\overline{B_r(y)}\cap\overline{\Omega}$ for all $y\in\{q_1,\cdots,q_M,z_1,\cdots,z_M\}$

(4) $\nabla u\neq 0$ in $\overline{B_r(y)}\setminus\{y\}$ for all $y\in\{p_1,\cdots,p_N\}$

従ってこの命題3.2より、ある十分小さな数 $\delta>0$ が存在して $\nabla u\neq 0$ in $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)\leq\min_{\partial\Omega} f+\delta$ 又は $\max_{\Omega}\psi-\delta\leq u(x)<\max_{\Omega}\psi\}$。ゆえに補題3.1を使って次を得る。

<u>補題3.3</u> 任意の $0<\eta\leq\delta$ に対して次を得る。

(1) $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)=\max_{\Omega}\psi-\eta\}$ は次の2種の曲線(a),(b)より成る。(a): N 個の単純 C^1 正則閉曲線で、その各々は、集合

$\{x\in\Omega\,;\,u(x)>\max_{\Omega}\psi-\eta\}$ の連結成分の境界であって，$\{p_1,\cdots,p_N\}$ の1点のみを囲むもの。(b)：M個の単純 C^1 正則弧であって，それぞれは $\partial\Omega$ に終点をもち，$\{q_1\cdots q_M\}$ の1点のみを含む $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)>\max_{\Omega}\psi-\eta\}$ の連結成分の境界の部分をなすもの。

(2) $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)=\min_{\partial\Omega}f+\eta\}$ は $\partial\Omega$ に終点をもつM個の単純 C^1 正則弧より成り，それぞれは $\{z_1,\cdots,z_M\}$ の1点のみを含む $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)<\min_{\partial\Omega}f+\eta\}$ の連結成分の境界の部分をなす。

もし $\nabla u\neq 0$ (in $\Omega\setminus I$) とすれば，補題3.1を使って，陰関数定理の助けをかりれば，$\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)=\max_{\Omega}\psi-\delta\}$ と $\{x\in\overline{\Omega}\,;\,u(x)=\min_{\partial\Omega}f+\delta\}$ は C^1 微分同型でなければならないが，これは補題3.3に矛盾する。よって $x_1,\cdots,x_k\in\Omega\setminus I$ を u の臨界点とし $m_1,\cdots,m_k$ を対応する多重度とする。このとき，我々は，$x_1,\cdots,x_k,p_1,\cdots,p_N$ 以外に $\overline{\Omega}$ で u は臨界点をもたないと仮定してよい。以下補題2.4，補題3.1，補題3.3と陰関数定理を使って，補題2.5の証明中で使った議論に沿って，(2.2)で定義した J_n の元の個数を等高線の低い方から順にきちんと数えていけばよい。くわしい証明は，来たる論文[6]にゆずることにする。□

参考文献

[1] G. Alessandrini, Critical points of solutions of elliptic equations in two variables, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. IV 14 (1987) pp. 229–256.

[2] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983

[3] P. Hartman & A. Wintner, On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations, Amer. J. Math. 75 (1953) pp. 449–476.

[4] D. Kinderlehrer & G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

[5] S. Sakaguchi, Critical points of solutions to the obstacle problem in the plane, IMA Preprint Series #852, University of Minnesota, August 1991.

[6] ————, Critical points of solutions to the double obstacle problem over multiple connected domains, in preparation.

[7] J. L. Walsh, The Location of Critical Points of Analytic and Harmonic Functions, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol XXXIV, New York, 1950.