数理解析研究所講究録
第780巻 1992年 91-99

ある移流拡散方程式系の解の爆発

九州工業大学工学部 永井敏隆(Toshitaka Nagai)

1. 序論

細胞性粘菌の集合体形成の数学モデル（Keller and Segel [5]）である非線形偏微分方程式系を考える。

$$
\begin{aligned}
&(1.1) && \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla\cdot(D_1\nabla a - \chi a\nabla\phi(b)) \\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\ x\in\Omega,\quad t>0\ ) \\
&(1.2) && \frac{\partial b}{\partial t} = D_2\Delta b + g(a,b), \\
&(1.3) && \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \qquad (\ x\in\partial\Omega,\quad t>0\ ), \\
&(1.4) && a(x,0)=a_0(x),\quad b(x,0)=b_0(x) \qquad (\ x\in\Omega\ ).
\end{aligned}
$$

ここで D_1, D_2, χ は正定数、Ω は R^N の有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。$a(x,t)$ は場所 x、時刻 t での細胞性粘菌の個体数、$b(x,t)$ は誘引物質の濃度を表す。(1.1) において、$-\nabla\cdot(\chi a\nabla\phi(b))$ は、誘引物質の濃度勾配による粘菌の移動を引き起こす項である。$\phi(b)$ は $\phi'(b)>0$ $(b>0)$ を満たす関数であり、sensitivity function と呼ばれている。(1.2) において、$g(a,b)$ は、誘引物質の生成と消費を引き起こす項である。

定常問題については、次のことが研究されている。Schaaf [10] は分岐理論による取扱いを行い、定数定常解から分岐した空間非一様な定常解が安定（不安定）となるための条件を与えた。Lin, Ni and Takagi [6] は、Schaaf の論文で取り扱われてない $\phi(b)=\log b$ の場合を扱い、Mountain Pass Lemma を用いて次の興味ある結果を得た。ただし、$g(a,b)$ は $g(a,b)=-\gamma b+ka$ $(\gamma, k>0)$ と与える。

> $N=1,2$ の場合 $\chi>D_1$ で、$N\geq 3$ の場合 $1<\chi/D_1<(N+2)/(N-2)$ とする。 このとき、D_2/γ が十分小さいならば振幅の大きい非定数定常解が存在する。

更に、Ni and Takagi [8] は 最小エネルギー解 (Mountain Pass Lemma を用いて得られた解) の形状について次の結果を得た。

> D_2/γ が十分小さいとき、最小エネルギー解が最大値を取る点 P は唯一つで境界上にあり、$D_2/\gamma\to 0$ のときこの解はΩ内で 0 に収束する。

これらの結果は、一点に凝集する空間非一様な定常解の存在を示したものである。

$N\geq 3$ で $\chi/D_1=(N+2)/(N-2)$ の場合、Adimurthi and Yadava [1], Budd, Knaap and Peletier [3] は、Ω を球とし、球対称な定常解の存在について考察している。一般の領域では, Pan, Ni and Takagi [9] が最小エネルギー解について $\chi/D_1<(N+2)/(N-2)$ の場合と同様のことを示した。

発展方程式の初期値問題 (1.1) − (1.4) の解の挙動については、$\phi(b) = b,\quad g(a,b) = -\gamma b + ka$ の場合に、解の爆発が起こりえることが Nanjundiah [7], Childress and Percus [4] により予想されている。以下では、無次元化した次の系

$$(1.1)' \qquad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla a - a\nabla b)$$

$$(x \in \Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.2)' \qquad \varepsilon\frac{\partial b}{\partial t} = \Delta b - \gamma b + a.$$

を考える。ただし、ε と γ は正定数。

Nanjundiah は、空間次元と関係なく爆発は起こりえると予想したが、その後、Childress and Percus により次の予想がなされた。

(i) $N = 1$ のとき、爆発は起こらない。

(ii) $N = 2$ のとき、次を満たす正定数 c が存在する。

$\int_\Omega a_0(x)dx/2\pi < c$ の場合は、爆発は起こらない。 $\int_\Omega a_0(x)dx/2\pi > c$ の場合は、有限時間 T で爆発が起こりえる。$t \to T$ のとき，$a(\cdot,t)$ はデルタ関数に近づく。Ω が球の場合，$c = 4$ で与えられる。

(iii) $N \geq 3$ のとき、$\int_\Omega a_0(x)dx$ の大きさにかかわらず有限時間で爆発が起こりえ，$a(\cdot,t)$ はデルタ関数に近づく。

本稿では、方程式 (1.2)$'$ において $\varepsilon \to 0$ とした系

$$(1.5) \qquad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla a - a\nabla b)$$

$$(x \in \Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.6) \qquad 0 = \Delta b - \gamma b + a$$

$$(1.7) \qquad \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \qquad (x \in \partial\Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.8) \qquad a(x,0) = a_0(x) \qquad (x \in \Omega).$$

を考え、領域 Ω と非自明な初期関数 $a_0(x)$ に次の条件 (A1), (A2) を課して上の予想を考察する。

(A1) $\Omega = \{x \in R^N;\ |x| < L\}$.

(A2) a_0 は $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな非負関数で、$N \geq 2$ のときは、$a_0(x) = a_0(|x|)$ (球対称)。

2. 主な結果

条件 (A1), (A2) の下で、問題 (1.5) − (1.8) の解 $(a(x,t), b(x,t))$ は滑らかな非負関数で、x について球対称と成る。解 $(a(x,t), b(x,t))$ の maximal existence time を $T_{\max}$ とする。

$$a(\cdot,t),\ b(\cdot,t) \in L^\infty(\Omega) \quad (0 < t < T_{\max})$$

を満たし、$T_{\max} < \infty$ ならば

$$\lim_{t\to T_{\max}} (\|a(\cdot,t)\|_{L^\infty} + \|b(\cdot,t)\|_{L^\infty}) = \infty$$

となる. また

$$\int_\Omega a(x,t)dx = \int_\Omega a_0(x)dx, \quad \int_\Omega b(x,t)dx = \frac{1}{\gamma}\int_\Omega a_0(x)dx \quad (0 < t < T_{\max})$$

を満たす。θ と $M_k(t)(k = 0,1,2,\cdots)$ を

$$\theta = \frac{1}{\omega_N}\int_\Omega a_0(x)dx, \quad M_k(t) = \frac{1}{\omega_N}\int_\Omega a(x,t)|x|^k dx$$

で定める。ただし、ω_N は $N-1$ 次元球面の面積。$E_\theta(s)$ $(s \geq 0)$ を

$$E_\theta(s) = 2N(N-1)\theta^{2/N}s^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\theta^2 + NL^{-N}\theta s + C_\alpha\theta^{(2N-2+\alpha)/N}s^{(2-\alpha)/N} \tag{2.1}$$

で定める。ただし、

$$\begin{aligned} &N=2 \text{ の時は、} 0<\alpha<2 \text{ で } C_\alpha = \frac{\gamma L^\alpha}{\alpha e}, \\ &N \geq 3 \text{ の時は、} \alpha = 0 \text{ で } C_\alpha = \frac{\gamma N}{2(N-2)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

定理 1 (解の爆発) 。$N \geq 2,\quad E_\theta(M_N(0)) < 0$ とする。このとき、$T_{\max} < \infty$ となり、$t \to T_{\max}$とすると

(i) $\quad \|a(\cdot,t)\|_{L^\infty} \to \infty, \quad \|b(\cdot,t)\|_{L^\infty} \to \infty,$

(ii) $\quad a(\cdot,t) \to \int_\Omega a_0(x)dx\delta, \quad b(\cdot,t) \to \int_\Omega a_0(x)dxN(\cdot,0) \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega)$

となる。ただし、δ は原点におかれた Dirac の δ–関数で、$N(x,y)$ は $\gamma u - \Delta u = f$ in Ω, $\partial u/\partial n = 0$ on $\partial\Omega$ のグリーン関数、$\mathcal{D}'(\Omega)$ は Ω 上の超関数の空間。

$N=2$ のとき $\theta > 4$ ならば $E_\theta(0) = \theta(4-\theta) < 0$ 、$N \geq 3$ のとき $E_\theta(0) = -N\theta^2/2 < 0$ より、次の定理 1 の系を得る。

系。$N \geq 2$ で, $N = 2$ のときは $\theta > 4$ とする。このとき、$M_N(0)$ が十分小さいならば定理 1 の結果が成り立つ。

定理 2 (解の有界性) 。$N = 1$, または $N = 2$ で $\theta < 4$ とする。このとき、問題 (1.5) - (1.8) の解は大域的に存在し、

$$\sup_{t\geq 0}\{\|a(\cdot,t)\|_{L^\infty} + \|b(\cdot,t)\|_{L^\infty}\} < \infty$$

を満たす。

3． 定理１の証明

補題１． 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}M_N(t) \le 2N(N-1)\theta^{2/N}\{M_N(t)\}^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\theta^2 + R(t) \quad (0 < t < T_{\max}).$$

ただし,

$$R(t) = \gamma N \int_0^L a(r,t)B(r,t)r^{N-1}dr. \tag{3.1}$$

証明. (1.5) に $|x|^N$ を掛け Ω 上で積分し、Green の公式を用いると次を得る。

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega a|x|^N dx \\ &= 2N(N-1)\int_\Omega a|x|^{N-2}dx - N\int_{\partial\Omega} a|x|^{N-2}(x\cdot\vec{n})d\sigma + N\int_\Omega a(\nabla b\cdot x)|x|^{N-2}dx.\end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし、$\vec{n}$ は $\partial\Omega$ での外向き単位法線ベクトルで、$\cdot$ は R^N での通常の内積を表す。Hölder の不等式より、

$$\int_\Omega a|x|^{N-2}dx \le \omega_N\{M_0(t)\}^{2/N}\{M_N(t)\}^{(N-2)/N} = \omega_N\theta^{2/N}\{M_N(t)\}^{(N-2)/N} \tag{3.3}$$

を得る。$A(r,t)$ と $B(r,t)$ を

$$A(r,t) = \int_0^r a(\rho,t)\rho^{N-1}d\rho, \quad B(r,t) = \int_0^r b(\rho,t)\rho^{N-1}d\rho$$

で定める。$A(L,t)=\theta$, $B(L,t)=\theta/\gamma$ を満たす。$\nabla b\cdot x = r\partial b/\partial r$ と

$$0 = r^{N-1}\frac{\partial b}{\partial r} - \gamma B + A$$

より

$$\int_\Omega a(\nabla b\cdot x)|x|^{N-2}dx = -\omega_N\int_0^L aAr^{N-1}dr + \gamma\omega_N\int_0^L aBr^{N-1}dr \tag{3.4}$$

を得る。 次に、$ar^{N-1} = \partial A/\partial r$ と $A(L,t)=\theta$ より

$$\int_0^L aAr^{N-1}dr = \frac{1}{2}\theta^2$$

が得られ、この関係式と (3.4) より

$$N\int_\Omega a(\nabla b\cdot x)|x|^{N-2}dx = \omega_N\left\{-\frac{N}{2}\theta^2 + R(t)\right\} \tag{3.5}$$

を得る。従って、(3.2), (3.3) そして (3.5) より補題の証明を得る。

補題 2。$R(t)$ は次のように評価される。

$$R(t) \le NL^{-N}\theta M_N(t) + C_\alpha \theta^{(2N-2+\alpha)/N}\{M_N(t)\}^{(2-\alpha)/N} \quad (0 < t < T_{\max}).$$

ただし、α と C_α は (2.2) で与えられたもの。

証明。まず $B(r,t)$ は

$$B(r,t) \le \frac{\theta}{\gamma}\left(\frac{r}{L}\right)^N + w(r) \quad (0 < r < L) \tag{3.6}$$

と評価されることを示す。ただし、$w(r)$ は次で与えられる。

$$w(r) = -\frac{\theta}{2}r^2 \log\frac{r}{L} \quad \text{if} \quad N = 2,$$

$$w(r) = \frac{\theta L^{-N}}{2(N-2)}(L^N r^2 - L^2 r^N) \quad \text{if} \quad N \ge 3.$$

(3.6) を示すために、次で定められた $\Phi(r,t)$ を考える。

$$\Phi(r,t) = B(r,t) - \frac{\theta}{\gamma}\left(\frac{r}{L}\right)^N$$

各 $t > 0$ にたいして Φ は

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{N-1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \gamma\Phi = -A + \theta\left(\frac{r}{L}\right)^N > -\theta \quad (0 < r < L),$$
$$\Phi(0,t) = \Phi(L,t) = 0$$

を満たす。一方、$w(r)$ は

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{N-1}{r}\frac{dw}{dr} - \gamma w = -\theta - \gamma w < -\theta \quad (0 < r < L),$$
$$w(+0) = w(L) = 0, \quad w(r) > 0 \quad (0 < r < L)$$

を満たす。従って、比較定理より、$\Phi(r,t) \le w(r) \quad (0 < r < L)$ 、すなわち (3.6) を得る。

次に、$w(r)$ は

$$w(r) \le \frac{\theta L^\alpha}{2\alpha e}r^{2-\alpha} \quad \text{if} \quad N = 2 \text{ and } 0 < \alpha < 2,$$

$$w(r) \le \frac{\theta}{2(N-2)}r^2 \quad \text{if} \quad N \ge 3$$

と評価される。(3.6) とこの評価式より

$$R(t) \le NL^{-N}\theta M_N(t) + C_\alpha\theta M_{2-\alpha}(t)$$

を得る。ただし、α と C_α は (2.2) で与えられたもの。Hölder の不等式を用いると

$$M_{2-\alpha}(t) \le \theta^{(N-2+\alpha)/N}\{M_N(t)\}^{(2-\alpha)/N}$$

と評価され、補題の証明を得る。

補題1と補題2より、次の補題を得る。

補題3．微分不等式

$$\frac{d}{dt}M_N(t) \le E_\theta(M_N(t)) \quad (0 < t < T_{\max})$$

が成り立つ。ただし、E_θ は (2.1) で定められたもの。

定理1の証明。　$E_\theta(M_N(0)) < 0$ とせよ。$E_\theta(s)$ は s について増加なので，補題3を用いると

$$T_{\max} < \infty, \quad M_N(t) > 0 \ (0 \le t < T_{\max}), \quad M_N(t) \to 0 \quad (t \to T_{\max})$$

が得られる。$M_1(t) > 0 \ \ (0 \le t < T_{\max})$ で、$M_1(t) \le \theta^{(N-1)/N}\{M_N(t)\}^{1/N}$ より

$$M_1(t) \to 0 \quad (t \to T_{\max}) \tag{3.7}$$

が示される。

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ とせよ。$\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \phi(0) + \sum_{i=1}^{N} x_i \psi_i(x) \quad (x \in \Omega)$$

と表す。ただし、$\psi_i \in C_0^\infty(\Omega)$。この式に $a(x,t)$ を掛け Ω 上積分して

$$\int_\Omega a(x,t)\phi(x)dx = \int_\Omega a(x,t)dx\phi(0) + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega a(x,t)x_i\psi_i(x)dx$$

を得る。この関係式において、$\int_\Omega a(x,t)dx = \int_\Omega a_0(x)dx$ と (3.7) を用いることより

$$\int_\Omega a(x,t)\phi(x)dx \to \int_\Omega a_0(x)dx\phi(0) \quad (t \to T_{\max})$$

が得られる。従って、次が得られる。

$$a(\cdot,t) \to \int_\Omega a_0(x)dx\delta \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad (t \to T_{\max}). \tag{3.8}$$

各 $t > 0$ に対して，$b(\cdot,t)$ が Neumann 問題 (1.6) の解であることと (3.8) より

$$b(\cdot,t) \to \int_\Omega a_0(y)dyN(\cdot,0) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad (t \to T_{\max}) \tag{3.9}$$

を得る。ただし、$N(x,y)$ は $\gamma u - \Delta u = f$ in Ω, $\partial u/\partial n = 0$ on $\partial\Omega$ のグリーン関数。最後に、(3.8) と (3.9) より $t \to T_{\max}$ とすると

$$||a(\cdot,t)||_{L^\infty} \to \infty, \quad ||b(\cdot,t)||_{L^\infty} \to \infty$$

が得られる。

4．定理2の証明

解 $(a(x,t), b(x,t))$ の有界性を証明するのに、次の補題を用いる。補題は、Alikakos [2] による方法で証明される。以下、C は $T_{\max}$ に依存しない正定数を表す。

補題4。 $\|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C \quad (0 < t < T_{\max})$ ならば

$$\|a(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C \max\{1, \|a_0\|_{L^1}, \|a_0\|_{L^\infty}\} \quad (0 < t < T_{\max}).$$

定理2の証明。 次の評価式

$$\|b(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C, \quad \|\nabla b(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le C \quad (0 < t < T_{\max}) \tag{4.1}$$

が示されれば、補題4を用いると $T_{\max} = \infty$ となり定理の証明を得る。

まず $N = 1$ の場合に (4.1) を示す。(1.6) を $(-L, x)$ 上積分することにより

$$|b_x(x,t)| \le \int_\Omega a_0(x)dx \quad (x \in \Omega,\ 0 < t < T_{\max}) \tag{4.2}$$

が得られる。次に、関係式

$$2Lb(x,t) = \int_{-L}^{L} b(y,t)dy + \int_{-L}^{L}\int_{y}^{x} b_x(z,t)dzdy, \quad x \in (-L, L)$$

に (4.2) を用いると

$$b(x,t) \le \frac{1}{2L}\left(\frac{1}{\gamma} + 4L^2\right)\int_\Omega a_0(x)dx$$

が示される。以上で、$N = 1$ の場合に (4.1) を得る。

$N = 2$ と $\theta < 4$ の場合に (4.1) を示す。$u(\sigma,t)$ と $v(\sigma,t)$ を

$$\sigma = r^2,\ u(\sigma,t) = \int_0^r a(\rho,t)\rho d\rho,\ v(\sigma,t) = \int_0^r b(\rho,t)\rho d\rho$$

で定める。u と v は次を満たす。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = 4\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 2(u - \gamma v)\frac{\partial u}{\partial \sigma}, \\ &0 = 4\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} - \gamma v + u \end{aligned}\right. \qquad (0 < \sigma < L^2, \quad 0 < t < T_{\max})$$

$$u(0,t) = v(0,t) = 0, \quad u(L^2,t) = \theta, \quad v(L^2,t) = \frac{\theta}{\gamma}.$$

$w(\sigma)$ を $w(\sigma) = 4k\sigma/(1 + k\sigma)$ と定める。$u(L^2,0) = \theta < 4$ より、k を十分大きく取り

$$\theta < w(L^2), \quad u(\sigma,0) \le w(\sigma) \quad (0 \le \sigma \le L^2)$$

を満たすように出来る。このとき、$w(\sigma)$ は

$$4\sigma\frac{d^2w}{d\sigma^2}+2(w-\gamma v)\frac{dw}{d\sigma}\le 0 \quad (0<\sigma<L^2),$$
$$w(0)=0, \quad w(L^2)>\theta$$

を満たす。比較定理より、$u(\sigma,t)\le w(\sigma)$ $(0\le\sigma\le L^2,\ 0\le t<T_{\max})$ を得る。従って、

$$0\le\frac{u(\sigma,t)}{\sigma}\le\frac{w(\sigma)}{\sigma}\le 4k \quad (0<\sigma\le L^2) \tag{4.3}$$

を得る。

次に、$z(\sigma)$ を $z(\sigma)=\ell\sigma$ で定める。ℓ は

$$z(L^2)=\ell L^2>\frac{\theta}{\gamma}, \quad \ell\gamma\ge 4k$$

を満たすように定める。ただし、k は (4.3) におけるもの。このとき、$z(\sigma)$ は

$$4\sigma\frac{d^2z}{d\sigma^2}-\gamma z+u\le 0 \quad (0<\sigma<L^2),$$
$$z(0)=0, \quad z(L^2)>v(L^2,t)$$

を満たす。比較定理より、$v(\sigma,t)\le z(\sigma)$ $(0\le\sigma\le L^2)$ を得る。従って、

$$0\le\frac{v(\sigma,t)}{\sigma}\le\ell \quad (0<\sigma<L^2) \tag{4.4}$$

を得る。関係式

$$4\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma}\right)=4\frac{\partial v}{\partial\sigma}+\gamma v-u$$

を積分し、(4.4) と $v(\sigma,t)\le v(L^2,t)=\theta/\gamma$ を用いると

$$b(r,t)=2\frac{\partial v}{\partial\sigma}(\sigma,t)\le 2\frac{v(\sigma,t)}{\sigma}+\frac{\gamma}{2\sigma}\int_0^\sigma v(\xi,t)d\xi\le\frac{1}{2}(4\ell+\theta)$$

が得られる。次に、関係式

$$r\frac{\partial b}{\partial r}(r,t)=\gamma v(\sigma,t)-u(\sigma,t)$$

に (4.3) と (4.4) を用いると

$$|\nabla b(x,t)|=|\frac{\partial b}{\partial r}(r,t)|=\sqrt{\sigma}|\frac{\gamma v(\sigma,t)-u(\sigma,t)}{\sigma}|\le L(\ell\gamma+4k) \quad (x\in\Omega,\ 0<t<T_{\max})$$

となり，(4.1) を得る。

参考文献

[1] Adimurthi and S. L. Yadava, Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents, Arch. Rational Mech. Anal. **115** (1991), 275–296.

[2] N. D. Alikakos, L^p bounds of solutions of reaction–diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 827–868.

[3] C. Budd, M. C. Knaap and L. A. Peletier, Asymptotic behaviour of solutions of elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **117** (1991), 225–250.

[4] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, Math. Biosci. **56** (1981), 217–237.

[5] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol. **26** (1970), 399–415.

[6] C.-S. Lin, W.-M. Ni and I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, J. Differential Equations **72** (1988), 1–27.

[7] V. Nanjundiah, Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology, J. Theor. Biol. **42** (1973), 63–105.

[8] W. -M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 819–851.

[9] X.-B. Pan, W. -M. Ni and I. Takagi, Singular behavior of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents, in preparation.

[10] R. Schaaf, Stationary solutions of chemotaxis systems, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 531–556.