数理解析研究所講究録
第780巻 1992年 111-121

非線型 Sturm-Liouville 問題の解の漸近挙動

沼津工高専　柴田徹太郎　(Tetsutaro Shibata)

次の 2-parameter の、非線型 Sturm-Liouville 問題を考える:

$$(1)\quad \begin{cases} -u''(x) = \mu u(x) - \lambda\left(u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)\right), & 0<x<1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで, $p>1$: 定数, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$: parameters.

この方程式のひな形になる線形方程式は次のものである:

$$(2)\quad \begin{cases} -u''(x) = \mu f(x)u(x) - \lambda r(x)u(x), & 0<x<1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで $r(x) > 0$ for $0 \le x \le 1$ を仮定する。

(2) の方程式について, Binding & Browne (J. Diff. Eq 88, 1990) は次のような結果を導いた:

<u>定理A</u> (B&B)　$\mu \in \mathbb{R}$: given に対し, $^{\exists 1}\lambda_n(\mu)$ (n個の内点の零点をもつ固有関数に対応する固有値) に対し、

(3) $$\lambda^2(\mu) \longrightarrow c := \operatorname*{ess\cdot sup}_{x\in[0,1]} f(x)/r(x) \quad \text{as } \mu\to\infty .$$

この定理の証明に使われた手法は，Prüfer変換：

$$\tan\theta(x) := u(x)/u'(x)$$

により，(2)を$\theta(x)$に関する方程式に直し，陰関数定理を用いたものである。

さて，我々の方程式(1)に関して，変分法を用いてこのような漸近挙動を調べたいが，(1)は非線型方程式なので，(2)のように，$\mu\in\mathbb{R}$をfixしても$\lambda(\mu)$が一意に定まらなく，パラメータを必要とする。ここでは，Zeidler (Math. Nachr. 1986) によって導入された，general level set における，Ljusternik-Schnirelman理論により求まる(1)の固有値，固有関数について定理Aのようなことを示したい。ここでいう general level set とは，$\alpha<0$ を parameter として，

$$N_{\alpha,\mu} := \{ u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)\ ;\ \int_0^1 u'(x)^2dx - \mu\int_0^1 u^2(x)dx = 2\alpha,\ \alpha<0 \}$$

のことで，general とは，一般に，$N_{\alpha,\mu}$は球と同相でないことをいっている，

<u>Remark</u>. この定義より，$\alpha<0$ から，$\mu>\pi^2$ でならなければならないことがわかる。

さて，我々の考える，第n変分固有値 $\lambda_n(\alpha,\mu)$ とは，次の条件をみたす固有関数 $u_n(\alpha,\mu,x)\in N_{\alpha,\mu}$ が存在するとき

をいう：$u_n(\alpha,\mu,x)$ は $x=0$ の近傍で正であり，

(a) $(u_n(\alpha,\mu,x), \lambda_n(\alpha,\mu)) \in N_{\alpha,\mu}\times\mathbb{R}$ は(1)をみたす。

(b) $\varphi(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2(x)dx + \frac{1}{p+1}\int_0^1 |u(x)|^{p+1}dx$

としたとき，

$$\varphi(u_n(\alpha,\mu,x)) = \beta_n(\alpha,\mu) := \inf_{K\in\Lambda_{n,\alpha,\mu}}\ \sup_{u\in K}\varphi(u)$$

をみたす。ここで

$\Lambda_{n,\alpha,\mu} := \{K\subset N_{\alpha,\mu} ; K : \text{cpt},\ 0\notin K,\ \text{symmetric},\ \gamma(K)\geq n\}$,

$\gamma(K) := \inf\{j\in\mathbb{N} ; {}^{\exists}h : K\to\mathbb{R}^j\setminus\{0\} ; h : \text{odd, conti}\}$

このとき存在定理としては，

<u>定理B</u>（Zeidler）　$n_0\in\mathbb{N}$，$(n_0\pi)^2<\mu<((n_0+1)\pi)^2$ と仮定し，$\alpha<0$，$\mu>\lambda_1$ を fix する。このとき，$1\leq{}^{\forall}n\leq n_0$ に対し $\lambda_n(\alpha,\mu)$，$u_n(\alpha,\mu,x)$ が存在する。

さて，この定理Bに基づき，定理Aのような漸近挙動を調べるのに，次の2通り考えられる：

(i) $\alpha<0$: fix　$\mu\to\infty$，$\mu\to(n\pi)^2$

(ii) $\mu>(n\pi)^2$: fix　$\alpha\to0$，$\alpha\to-\infty$

まず，定理Aに対応するように，(i)の場合の，$\lambda_n(\alpha,\mu)$ と $u_n(\alpha,\mu,x)$ の挙動を調べよう。

<u>Prop. 1</u>（一意性）　$n_0\in\mathbb{N}$ として，$\mu>(n_0\pi)^2$ とする。α を fix すると，このとき，$1\leq{}^{\forall}n\leq n_0$ に対して $\lambda_n(\alpha,\mu)$ は

一意的に定まる．

<u>Prop. 2</u>（連続性）$\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha < 0$: fix する。このとき $\mu > ((n_0\pi)^2)$ において，$1 \leq \forall n \leq n_0$ に対して，$\lambda_n(\alpha,\mu)$ は μ について連続である。

証）Prop. 1 と，$\beta_n(\alpha,\mu)$ の μ に関する連続性を利用する。 //

従って，$\mu > (n_0\pi)^2$ について，$1 \leq n \leq n_0$ として，$\lambda_n(\alpha,\mu)$ の曲線をかくことができる。

<u>定理 1.</u> $\mu \to \infty$ のとき，

(4) $$\lim_{\mu\to\infty} \lambda_n(\alpha,\mu)/\mu = 1.$$

さらに，

(5) $$\lim_{\mu\to\infty} \int_0^1 \mu u_n^2(\alpha,\mu,x)\,dx = 2(-\alpha).$$

<u>Remark.</u> 定理 A を，$r(x) = 1 + |u(x)|^{p-1}$ と思えば，$u(0) = u(1) = 0$，$f(x) \equiv 1$ なので，

$$c := \operatorname*{ess.sup}_{0\leq x\leq 1} \frac{f(x)}{r(x)} = 1$$

となり，定理 1 は，定理 A に対応する。

次に，$\mu \to (n\pi)^2$ のときの $\lambda_n(\alpha,\mu)$ の挙動について

<u>定理 2.</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha < 0$: fix に対し，

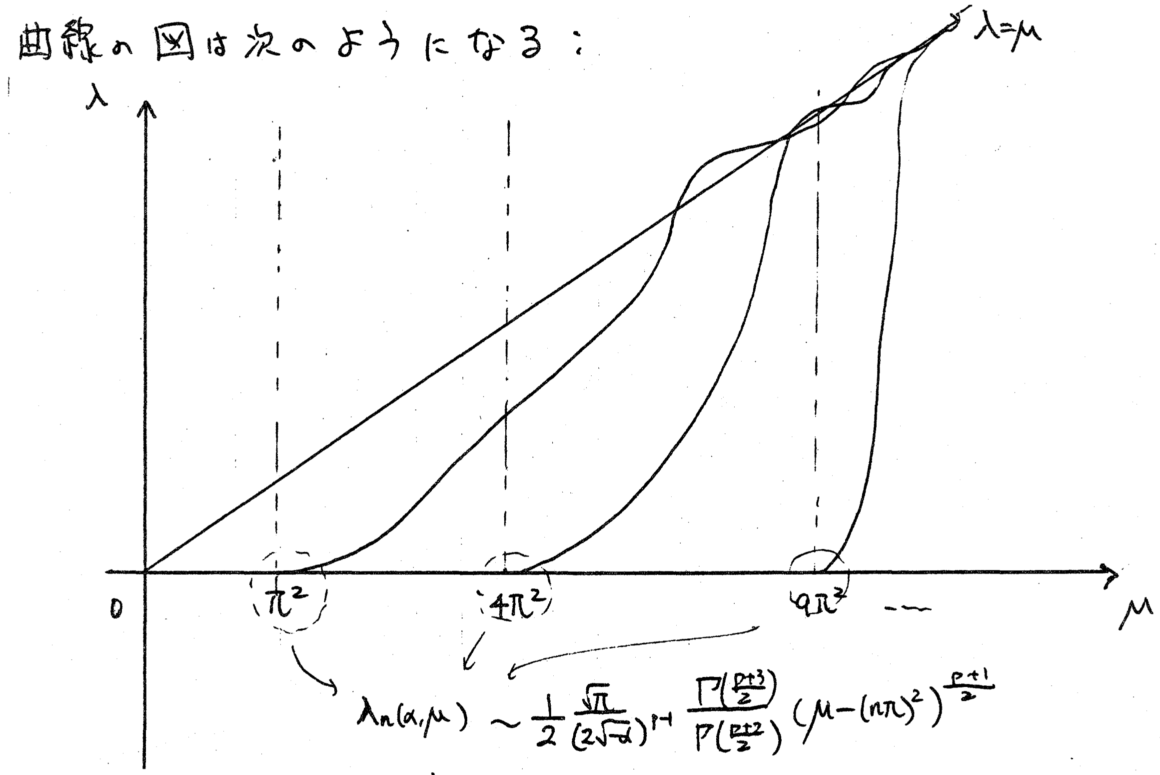
(6) $$\lim_{\mu\downarrow(n\pi)^2} \lambda_n(\alpha,\mu)/(\mu-(n\pi)^2)^{\frac{p+1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2(\sqrt{-\alpha})^{p-1}}\,\frac{\Gamma(\frac{p+3}{2})}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}$$

ここで $\quad \Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad$ である．

さらに，

(7) $\quad (\mu-(n\pi)^2)^{\frac{1}{2}}u_n(\alpha,\mu,x) \longrightarrow 2\sqrt{-\alpha}\,\sin n\pi x \quad$ as $\mu\to(n\pi)^2$ in $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)$.

以上の事柄により，$\alpha<0$：fix したときの，$\lambda_n(\alpha,\mu)$の曲線の図は次のようになる：



<u>証明の手順</u>　まず，定理1について，簡単のため，$\lambda_1(\alpha,\mu)$ についてだけ方針を述べる。

(a) $\quad w_\mu(x) := \mu^{\frac{1}{2}}u_1(\alpha,\mu,x)$ とおき，$\mu>>1$ のとき，$\exists C>0$

$$C^{-1} < \int_0^1 w_\mu^2(x)\,dx < C$$

を示す。

(b) $\quad \int_0^1 w_\mu^2(x)\,dx \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 2(-\alpha) \quad$ を示すが，このとき

$2\sqrt{-\alpha}\sin\pi x/(\mu-\pi^2)^{\frac{1}{2}} \in N_{\alpha,\mu}$ であることを使う。

(c) さて，部分積分により，

$$2\alpha = \int_0^1 u_1'(\alpha,\mu,x)^2 dx - \mu\int_0^1 u_1^2(\alpha,\mu,x)dx$$
$$= -\lambda_1(\alpha,\mu)\left[\int_0^1 u_1^2(\alpha,\mu,x)dx + \int_0^1 u_1^{p+1}(\alpha,\mu,x)dx\right]$$

これより，

$$2(-\alpha) = \frac{\lambda_1(\alpha,\mu)}{\mu}\left(\int_0^1 \omega_\mu^2(x)dx + \frac{1}{\mu^{\frac{p-1}{2}}}\int_0^1 \omega_\mu^{p+1}(x)dx\right)$$

ここで

$$\frac{1}{\mu^{\frac{p-1}{2}}}\int_0^1 \omega_\mu^{p+1}(x)dx \longrightarrow 0 \quad \text{as } \mu\to\infty$$ を示す。

従って，(b)と合わせて定理1を得る。

定理2についての証明の手順は次の通りである：簡単のため，$n=1$ とすると，

(a) $\exists C>0$ s.t. $\mu\downarrow\pi^2$ のとき，

$$C^{-1}(\mu-\pi^2)^{\frac{p+1}{2}} \le \lambda_1(\alpha,\mu) \le C(\mu-\pi^2)^{\frac{p+1}{2}}$$

を示す。このとき，Berestycki (1981) の解の a priori 評価：

$$(8)\quad \begin{cases} -u''(x) + f(u(x)) = \lambda u(x), \quad 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

ここで $f(u)$ は，$|u|^{p-1}u$ の性質と同じような性質をもつものに対し，(u,λ) が(8)の正値解とすると，$f(u)/u$ の逆関数を χ として，

$$\chi(\lambda-\pi^2)\sin\pi x \le u_\lambda(x) \le \chi(\lambda), \quad 0\le x\le 1$$

をつかう。

(b) $v_\mu(x) := (\mu-\pi^2)^{\frac{1}{2}} u_1(\alpha,\mu,x)$ とおいて，

$$v_\mu(x) \longrightarrow v_{\pi^2}(x) \quad \text{as } \mu\to\pi^2 \text{ in } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)$$

をいう。ここで，$v_{\pi^2}(x)$ は，

$$\begin{cases} -u''(x) = \pi^2 u(x), & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

の解である。よって，$v_{\pi^2}(x) = {}^{\exists}C \sin \pi x$ となる。

(c) $C = 2\sqrt{-\alpha}$ であることを示す。ここで，

$$\hat{u}(x) := 2\sqrt{-\alpha}\sin\pi x/(\mu-\pi^2)^{\frac{1}{2}} \in N_{\alpha,\mu} \quad \text{であることより，}$$

$C \le 2\sqrt{-\alpha}$ が示せる。逆に定義より，

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \int_0^1 u_1'^2(\alpha,\mu,x)dx - \mu\int_0^1 u_1^2(\alpha,\mu,x)dx \\ &= \int_0^1 u_1'^2(\alpha,\mu,x)dx - \pi^2\int_0^1 u_1^2(\alpha,\mu,x)dx + (\pi^2-\mu)\int_0^1 u_1^2(\alpha,\mu,x)dx \end{aligned}$$

であるから，定義より，

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_\mu^2(x)dx &= 2(-\alpha) + \left[\int_0^1 u_1'^2(\alpha,\mu,x)dx - \pi^2\int_0^1 u_1^2(\alpha,\mu,x)dx\right] \\ &\ge 2(-\alpha) \end{aligned}$$

ここで $\mu \downarrow \pi^2$ として，

$$\int_0^1 v_{\pi^2}(x)^2 dx = \frac{C^2}{2} \ge 2(-\alpha)$$

$$\therefore \quad C \ge 2\sqrt{-\alpha}$$

従って，定理2の(7)は示された。

このことより，

$$\lambda(\alpha,\mu)/(\mu-\pi^2)^{\frac{p+1}{2}} = 2(-\alpha)/\left\{(\mu-\pi^2)^{\frac{p-1}{2}}\int_0^1 v_\mu^2(x)dx + \int_0^1 v_\mu^{p+1}(x)dx\right\}$$

$$\xrightarrow[\mu\downarrow\pi^2]{} 2(-\alpha)\Big/\left\{(2\sqrt{-\alpha})^{p+1}\int_0^1 \sin^{p+1}\pi x\,dx\right\}$$

となり，(6)が示された。　　　　　　　　　証明終

次に，$\mu>\pi^2$をfixし，$\alpha\uparrow 0$，$\alpha\to-\infty$のときの，

$\lambda_n(\alpha,\mu)$，$u_n(\alpha,\mu,x)$の挙動を調べる。

Prop.3（$\alpha<0$に関する連続性）

$n_0\in\mathbb{N}$：fix，$(n_0\pi)^2<\mu<((n_0+1)\pi)^2$：fixする。このとき，$1\le{}^\forall n\le n_0$に対して，$\lambda_n(\alpha,\mu)$は$\alpha$に関して連続である。

定理3　$(n_0\pi)^2<\mu<((n_0+1)\pi)^2$とする。このとき，$1\le{}^\forall n\le$ $\le n_0$に対し，$\alpha\uparrow 0$のとき

$$(9)\qquad \lambda_n(\alpha,\mu)=\mu-(n\pi)^2+O(\sqrt{-\alpha}^{\,p-1})$$

さらに，

$$(10)\qquad u_n(\alpha,\mu,x)/\sqrt{-\alpha}\xrightarrow[\alpha\uparrow 0]{} 2\sin n\pi x/(\mu-(n\pi)^2)^{\frac{1}{2}}\quad\text{in } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)$$

Remark. 定理3については，次元が2以上でも，fに適当な条件を課せば成り立つ。

定理4　μは定理3のとおりとする。このとき，${}^\exists C_\mu>0$：定数 s.t. as $\alpha\to-\infty$

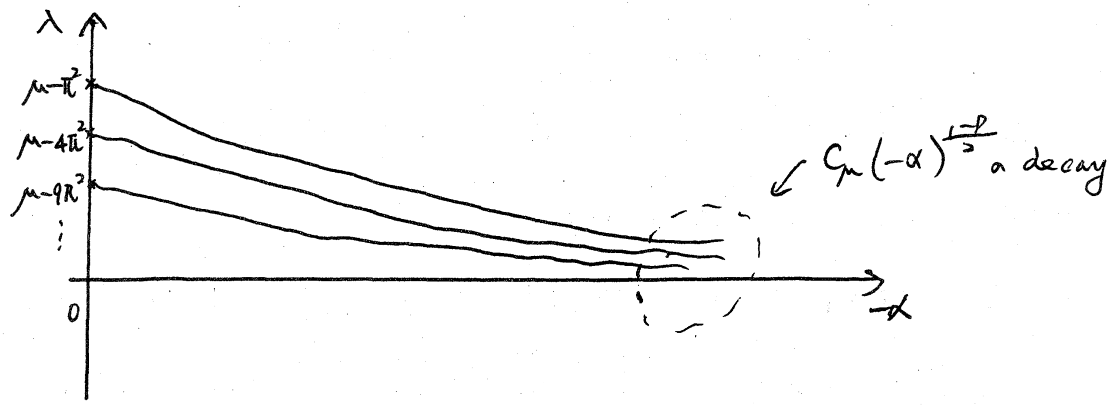
$$(11)\qquad \lambda_n(\alpha,\mu)=C_\mu(-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}+o\left((-\alpha)^{\frac{1-p}{2}}\right)$$

ここで

$$C_\mu=2\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}}+O(\mu^{\frac{p}{2}})\qquad\text{for }\mu\gg 1.$$

<u>Remark.</u> C_μは、(1)より導かれるある非線形固有値問題の固有値を定めたときの固有関数のノルムのようなもので、一般のμに対してもとめるのは困難である。

Prop 3，定理3，定理4を図にすると、次のようになる。



<u>定理3の証明の方針</u>

(a) $|1/\lambda_n(\alpha,\mu) - \beta_n(\alpha,\mu)/(-\alpha)| \le {}^{\exists}C(\sqrt{-\alpha})^{p-1}$ を示す。これは、まず、$\int_0^1 u_n'^{\,2}(\alpha,\mu,x)^2\,dx \le {}^{\exists}C(-\alpha)$

を示して、これと

$$|-\alpha/\lambda_n(\alpha,\mu) - \beta_n(\alpha,\mu)| = (p-1)\int_0^1 |u_n^{p+1}(\alpha,\mu,x)|\,dx\,/(p+1)$$

より導かれる。

(b) $|\beta_n(\alpha,\mu)/(-\alpha) - 1/(\mu-(n\pi)^2)| \le C(\sqrt{-\alpha})^{p-1}$

を示す。(a)と(b)を組み合わせて、(9)が示される。

(10)の場合，簡単の為，$n=1$とすると、

$$(11)\quad \begin{cases} -u''(x) - \mu u(x) = -\lambda u(x), & 0<x<1, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

とし，$v_\alpha(x) := u_1(\alpha,\mu,x)/\sqrt{-\alpha}$ として

$$v_\alpha(x) \xrightarrow[\alpha\uparrow 0]{} v_0(x) \quad \text{in } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)$$ を示す。ここで、

$v_0(x)$ は (11) の非自明解である。

(b) $$\int_0^1 v_0'(x)dx - \mu\int_0^1 v_0^2(x)dx = -2$$

を示す。これは，$v_\alpha \in N_{-1,\mu}$ より示される。

(c) $$\int_0^1 v_\alpha'^2(x)dx \xrightarrow[\alpha\uparrow 0]{} \int_0^1 v_0'^2(x)dx$$

を示す。従って，(a)，(c) より $v_\alpha \longrightarrow v_0$ in $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)$ が示され，(b) より，係数が定まる。

<u>定理4の証明の手順</u>　簡単のため，$n=1$ とする。

(a) $d\beta_1(\alpha,\mu)/d\alpha = -1/\lambda_1(\alpha,\mu)$ を示す。

(b) $\beta_1(\alpha,\mu)/(-\alpha)^{\frac{p+1}{2}} \xrightarrow[\alpha\to-\infty]{} {}^{\exists}A_\mu$ を示す。

(a)，(b) を用いると，

$$\lambda_1(\alpha,\mu) = C_\mu(-\alpha)^{\frac{1-p}{2}} + o((-\alpha)^{\frac{1-p}{2}})$$

がわかる。ここで，$C_\mu = 2/(p+1)A_\mu$ である。

(c) $w_\alpha(x) := u_1(\alpha,\mu,x)/(-\alpha)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(p+1)A_\mu}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ とおく。

$\alpha \to -\infty$ のとき，

$$w_\alpha(x) \longrightarrow w_0(x) > 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(0,1)$$

を示す。ここで $w_0(x)$ は、次の非線形 Sturm－Liouville 問題の解：

(12) $$\begin{cases} -w''(x) + |w(x)|^{p-1}w(x) = \mu w(x), & 0<x<1, \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

(d) $s^2 := \int_0^1 w(x)^2 dx$ とするとき，$\mu \gg 1$ で

$$\mu = s^{p-1} + O(s^{\frac{p-1}{2}}) \tag{13}$$

が成り立つ。これより，

$$\int_0^1 w_0^2(x)\,dx = \mu^{\frac{2}{p-1}}\left(1 + O(\mu^{-\frac{1}{2}})\right) \qquad \mu \gg 1$$

が成り立つ。このことを利用して，$\int_0^1 w_0^{p+1}(x)\,dx$，$\int_0^1 w_0'(x)^2 dx$ を計算し，結論を導く。 証明終