数理解析研究所講究録
第 780 巻 1992 年 165-167



# Exponential Harmonic Function の Reularity について

名古屋大学・理学部 内藤 久資 (Hisashi NAITO)

## 1. Introduction.

はじめに, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の有界領域 $\Omega$ 上で定義された $\mathbb{R}^m$-valued function に対して, 汎関数

$$E(u) = \int_\Omega e^{|\nabla u|^2}\, dx$$

を考える.

この問題に関して, 次のような結果が得られている.

**Theorem 1.1** (Duc-Eells [1]). $\mathbb{R}^n$ 内の *strictly* に *convex* な領域上の *real-valued function* に対する汎関数 $E$ は, 与えられた *smooth* な境界値 $\varphi_0$ に対して, *smooth* な *E-minimizer* $\varphi$ *with* $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ が存在する.

主結果は, 上の結果を (local) に vector-valued に拡張する. ここでは考える関数空間は Orlicz space ではなく, より自然な空間 $W = \bigcap_{1<p<\infty} W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ で考える. 以下, 関数空間 $B$, $W_g$ を

$$B := \bigcap_{1<p<\infty} W^{1-1/p,p}(\partial\Omega, \mathbb{R}^m),$$
$$W_g := \left\{ u \in \bigcap_{1<p<\infty} W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) : u|_{\partial\Omega} = g \right\}, \quad \text{for} \quad g \in B$$

と定義する. このとき, 定理は次のように述べられる.

**Theorem 1.2** [3]. 任意の $g \in B$ に対して, $W_g$ のなかに *unique* な *minimizer* $u$ が存在して, $B_r(a) \subset \Omega$ ならば, $u$ は $B_{r/2}(a)$ 上 *Hölder continuous* である.

この結果に関しては, 筆者による解説 [4] に詳しく述べてあるので, ここでは定理の証明には立ち入らない. この解説では, さらに一般に, compact Riemann 多様体 $(M, g)$, $(N, h)$ の間の写像 $u\colon M \longrightarrow N$ に対して, 汎関数

$$\mathbb{E}(u) = \int_M e^{|\nabla u|^2}\, dx$$

を考えた時, どのようなことがわかるかについて, Eells-Lemaire [2] によって得られた結果を述べることにする.

## 2. Second variation.

Eells-Lemaire [2] では, 汎関数 $\mathbb{E}$ の第2変分を計算している. 汎関数 $\mathbb{E}$ の critical point (exponentially harmonic map) $u\colon M \longrightarrow N$ を1つ与えたとき, $M$ から $N$ への map の 2-parameter family $u_{s,t}$, $u_{0,0} = u$ を考えよう. この時, $u$ での $\mathbb{E}$ の Hessian は以下のようになる.

$$\begin{aligned} H_u(v,w) &= \left.\frac{\partial^2 \mathbb{E}(u_{s,t})}{\partial s \partial t}\right|_{s,t=0} \\ &= \int_M e^{|\nabla u|^2} \left[\langle \nabla^u v, du\rangle\langle \nabla^u w, du\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \nabla^u v, \nabla^u w\rangle - \langle R_N(du,v)du, w\rangle\right] dx. \end{aligned}$$

ここで, $v = \left.\dfrac{\partial u_{s,t}}{\partial s}\right|_{s,t=0}$, $w = \left.\dfrac{\partial u_{s,t}}{\partial t}\right|_{s,t=0}$ であって, $\nabla^u$ は pull-back bundle 上の connection, $R_N$ は $N$ の曲率テンソルである.

**Definition:** Exponentially harmonic map $u$ が **stable** であるとは, $u$ における Hessian が positive semi-definite である事をいう.

このことから, 直ちに次の結果を得る.

**Theorem 2.1** (Eells-Lemaire) [2]. もし $N$ の断面曲率 ($=: K_N$) が非正であれば, 任意の *exponentially harmonic map* は *stable* である.

実際, $K_N \leq 0$ から, $\langle R_N(du,v)du, w\rangle \leq 0$ が出てくる. さらに次の2つの結果を得ることが出来る.

**Theorem 2.2** (Eells-Lemaire) [2]. $K_N \leq 0$ と仮定する. $u_0$, $u_1\colon M \longrightarrow N$ を *exponentially harmonic maps* とし, $\partial M \neq \emptyset$ の時, $u_0$, $u_1$ は *Dirichlet problem* に関して同じ *homotopy class* に属するとすると, $u_0 = u_1$ である. また, $\partial M = \emptyset$ の時, $K_N < 0$ で, $u_0$ の *rank* がある点で2以上であれば, $u_0 = u_1$ である.

**Theorem 2.3** (Eells-Lemaire) [2]. $K_N \leq 0$ と仮定する. $u_0\colon M \longrightarrow N$ を *exponentially harmonic maps* とする. この時, $u_0$ は $u_0$ の属する *homotopy class* の中で $\mathbb{E}$ を *minimize* する.

これらの結果は, second variation formula から簡単な考察によって得ることができる.

これらの結果は, harmonic map, すなわち, Dirichlet 積分の critical point, に関しての第2変分公式から得られる結果とまったく同じである. すなわち, $K_N \leq 0$ という幾何学的な仮定までも同じ条件で成り立つ. さらに, harmonic map の場合は汎関数の compactness (Palais-Smale の条件 C) が一般には成り立たないのだが, exponentially harmonic map の場合には汎関数の compactness があるので, critical point の存在は保証されている.

幾何学においては, Harmonic map の存在から極めて豊富な結果を得ることができるのであるが, それらは, $K_N \leq 0$ という条件を抜きにしては導くことができない. ( $K_N \leq 0$ の条件なしでは harmonic map の存在がわからないため. ) そのような意味でも, exponentially harmonic map を使っていろいろな幾何学的な結果を得る事ができるかもしれない.

**References.**


[1] D. M. Duc and J. Eells, *Regularity of exponentially harmonic functions*, preprint.

[2] J. Eells and L. Lemaire, *Some properties of exponentially harmonic maps*, preprint.

[3] H. Naito, *On a local Hölder continuity for a minimizer of a certain functional*, preprint.

[4] H. Naito, *On a local regularity result for a minimizer of a functional with exponential growth*, to appear in 数理研講究録, "変分問題とその周辺, Sept. 1991".