数理解析研究所講究録
第781巻 1992年 25-37



# カテゴリーにおけるペアリング

福岡大理学部　小田信行（Nobuyuki Oda）

## 1. 基点をもつ位相空間のペアリング

連続写像 $\mu : X \times Y \to Z$ が軸(axis) $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ を持つペアリング(pairing)であるとは

$$\mu | X \times \{*\} \simeq f, \quad \mu | \{*\} \times Y \simeq g$$

が成立することである。（$*$ は基点とする）

(1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & X \times Y \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

任意の連続写像 $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ を考えるとこれらを軸とするペアリングは必ずしも存在するとは限らない。$f$ と $g$ を軸とするペアリングが存在するとき

$$f \perp g$$

と書き，$f$ と $g$ は直交するという．

例．(i) $X$ が Hopf 空間であることは $1_X \perp 1_X$ と同値である．ここで $1_X : X \to X$ は恒等写像

(ii) $g: Y \to Z$ が cyclic map であることは $1_Z \perp g$ と同値である。

連続写像 $v: X \longrightarrow Z$ を固定して

$$v^{\perp}(Y, Z) = \{ [g]: Y \to Z \mid v \perp g \}$$

と定める。([g] は $g: Y \to Z$ を含むホモトピー類)

例. $(1_X)^{\perp}(S^1, X) = G(X)$ Gottlieb group [2]

$(1_X)^{\perp}(S^n, X) = G_n(X)$ 〃 [3]

$(1_X)^{\perp}(A, X) = G(A, X)$ Varadarajan set [12]

$f^{\perp}(S^n, X) = G_n^f(X, A, *)$ Woo-Kim group [13]

(ただし $f: A \to X$)

上記の等号の右辺で使われている記号はそれぞれの引用文献で定義されている記号である。

$v^{\perp}(Y, Z)$ は $X, Y, Z$ のホモトピー型と $v: X \to Z$ のホモトピー類のみにより定まる $[Y, Z]$ (ホモトピー集合) の部分集合である。したがって $v$ を動かした時の族

$$\{ v^{\perp}(Y, Z) \mid {}^{\forall}v: X \longrightarrow Z \}$$

は $[Y, Z]$ の「ホモトピー不変な部分集合の族」を与える。

双対的に次の定義をする。（ $\vee$ は one point union）

$\theta : A \to H \vee R$ が coaxes $h : A \to H$ と $r : A \to R$ をもつ copairing であるとは次の図式がホモトピー可換であること（$q_1 : H \vee R \to H$, $q_2 : H \vee R \to R$ は projection）

(2)
$$\begin{tikzcd} H & H \vee R \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & R \\ & A \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "\theta"'] \arrow[ur, "r"'] \arrow[ul, phantom, shift right=4, "\simeq"] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

$h : A \to H$ と $r : A \to R$ に対し上の図式を可換とする $\theta : A \to H \vee R$ が存在するとき $h \top r$ と書く。

（ $f \perp g$ の関係を perpendicular または orthogonal, $h \top r$ の関係を coperpendicular または co-orthogonal と呼ぶ）

例 (i) $A$ が co-Hopf 空間 $\Leftrightarrow$ $1_A \top 1_A$

(ii) $r : A \to R$ が cocyclic map $\Leftrightarrow$ $1_A \top r$

連続写像 $u : A \to H$ を固定して

$$u^{\top}(A, R) = \{[r] : A \to R \mid u \top r\}$$

と定める。これは $A, H, R$ のホモトピー型と $u : A \to H$ のホモトピー類のみにより定まる $[A, R]$ の部分集合である。

## 2. 一般のカテゴリーにおけるペアリング

前節で定義した pairing と copairing を一般のカテゴリーで定義するために，前節の（1）と（2）の図式を一般のカテゴリーで考える。

まずホモトピー関係 $\simeq$ を一般のカテゴリーで定義しなければならない。公理論的なホモトピー論は Baues [1]，Heller [4]，Quillen [11] 等により研究されているが，pairing と copairing の概念を一般のカテゴリーで定義するには，そのような厳密な意味でのホモトピー論の公理系から与えられるホモトピー関係のみを考えるのでは範囲が狭くなりすぎるように思われる。そこで，ここでは"ホモトピー関係"を次のように定義する。

カテゴリー $\mathcal{C}$ の射 $f, g : X \to Y$ に対し同値関係 $f \simeq g$ があって

(i) $f \simeq g \Rightarrow h \circ f \simeq h \circ g, \quad \forall h : Y \to Z$

(ii) $f \simeq g \Rightarrow f \circ w \simeq g \circ w, \quad \forall w : W \to X$

をみたすとき同値関係 $\simeq$ を<u>ホモトピー関係</u>という

$f : X \to Y$ を含むホモトピー類（同値類）を $[f] : X \to Y$ で表す．ホモトピー集合 $[X, Y] = \{[f] : X \to Y\}$ が定義される。2つの射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ があって $g \circ f \simeq 1_X$ かつ $f \circ g \simeq 1_Y$ となるとき $X$ と $Y$ は同じホモトピー型

であるという.

$\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ がホモトピー関係をもつカテゴリーのとき関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ がホモトピーを保存するとは

$$f\simeq g: X\to Y \quad\Rightarrow\quad F(f)\simeq F(g): F(X)\to F(Y)$$

が成立することである。

$F, G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ をホモトピーを保存する関手とするとき，ホモトピー自然変換 $\tau: F \overset{\cdot}{\to} G$ とは射の族

$$\{\tau(X): F(X)\to G(X) \mid X\in\mathcal{C}\}$$

で次の図式が任意の $X$, $Y$ と任意の射 $f: X\to Y$ に対してホモトピー可換となるものである.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\tau(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\tau(Y)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

さて，カテゴリーにおける product とは図式

$$X \xleftarrow{p_1} X\times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

で任意の対象 $Z$ と任意の射 $f: Z\to X$ と $g: Z\to Y$ に対し次の図式

(3)

$$\begin{tikzcd}
X & X\times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \\
& Z \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\zeta"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換とする射 $\zeta : Z \longrightarrow X \times Y$ が一意的に存在するものである。双対的に coproduct とは図式

$$X \xrightarrow{j_1} X \vee Y \xleftarrow{j_2} Y$$

で任意の対象 $Z$ と任意の射 $h : X \to Z$ と $r : Y \longrightarrow Z$ に対し次の図式

(4)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "h"'] & X \vee Y \arrow[d, "\eta"] & Y \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, "r"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

を可換とする射 $\eta : X \vee Y \longrightarrow Z$ が一意的に存在するものである。

ここで図式 (1) (2) (3) (4) を比較してみると，*pairing* や *copairing* の定義 (1) (2) では *product* $X \times Y$ や *coproduct* $H \vee R$ を用いているが，そこで使われている写像 $i_1, i_2$ や $q_1, q_2$ は "*universal property*" をもっていないことがわかる。これは図式 (3) (4) にある *product* や *coproduct* を特徴づけている写像 $p_1, p_2$ や $j_1, j_2$ とカテゴリー論の立場からみて全く性質の異なる写像であると考えられる。

このような事情を考慮して次の定義をする。

*Pseudo-product* とはホモトピーを保存する関手

$$\sqcap : C \times C \longrightarrow C$$

でホモトピー自然変換 $i_1 : P_1 \dot{\to} \sqcap$ と $i_2 : P_2 \dot{\to} \sqcap$ をも

つものである．ここで $P_1 : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は $P_1(X,Y)=X$，$P_2 : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は $P_2(X,Y)=Y$ で与えられる関手とする．（$\sqcap(X,Y) = X\sqcap Y$ と書く．）したがって任意の対象 $X, Y, Z, W$ と任意の射 $f: X\to Z$ と $g: Y\to W$ に対し次の図式はホモトピー可換である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & X\sqcap Y \arrow[d, "f\sqcap g"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[r, "i_1"] & Z\sqcap W & W \arrow[l, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

双対的に，*pseudo-coproduct* とはホモトピーを保存する関手 $\sqcup : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ （$\sqcup(X,Y) = X\sqcup Y$ と書く）でホモトピー自然変換 $q_1 : \sqcup \overset{\cdot}{\to} P_1$ と $q_2 : \sqcup \overset{\cdot}{\to} P_2$ をもつものである。したがって任意の対象 $X, Y, Z, W$ と任意の射 $f: X\to Z$ と $g: Y\to W$ に対して次の図式はホモトピー可換である。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & X\sqcup Y \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "f\sqcup g"] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y \arrow[d, "g"] \\
Z & Z\sqcup W \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & W
\end{tikzcd}$$

*Pseudo-product* と *pseudo-coproduct* を用いて *pairing* と *copairing* は次のように定義される。

$\mathcal{C}$ をホモトピー関係をもつ一般のカテゴリーとする．

射 $\mu : X \sqcap Y \longrightarrow Z$ が axes $f : X \to Z$ と $g : Y \to Z$ をもつ pairing であるとは次の図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & X \sqcap Y \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

がカテゴリー $\mathcal{C}$ の中でホモトピー可換であると定義する.
射 $f, g$ に対し上の図式がホモトピー可換となる $\mu : X \sqcap Y \to Z$ が存在するとき $f \perp g$ と表す.

$g : Y \to Z$ は $1_Z \perp g$ のとき cyclic morphism とよばれる.

対象 $X$ は $1_X \perp 1_X$ のとき Hopf object とよばれる.

$v : X \longrightarrow Z$ を固定したとき

$$v^{\perp}(Y, Z) = \{ [g] : Y \longrightarrow Z \mid v \perp g \} \subset [Y, Z]$$

と定める.

双対的に, 図式

$$\begin{tikzcd}
H & H \sqcup R \arrow[l, "j_1"'] \arrow[r, "j_2"] & R \\
& A \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

がカテゴリー $\mathcal{C}$ でホモトピー可換のとき $\theta : A \longrightarrow H \sqcup R$ を coaxes $h : A \longrightarrow H$ と $r : A \longrightarrow R$ をもつ copairing という.

射 $h, r$ に対し上の図式がホモトピー可換となる $\theta : A \to H \sqcup R$ が存在するとき $h \top r$ と書く.

$r: A \to R$ は $1_A T r$ のとき cocyclic morphism とよばれる.
対象 $A$ は $1_A T 1_A$ のとき co-Hopf object とよばれる.
$u: A \longrightarrow H$ を固定するとき,

$$u^T(A, R) = \{[r]: A \longrightarrow R \mid uTr\} \subset [A, R]$$

と定義する.

## 3. Product, Coproduct および Zero object をもつカテゴリー

カテゴリー$C$が zero object $*$ をもつとする. zero object は initial かつ final な object なので任意の対象 $X, Y$ に対し射 $*: X \longrightarrow * \longrightarrow Y$ が一意的に定まる.
したがって次の図式

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \\ & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[u, dashed, "i_1"'] \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \\ & Y \arrow[ul, "*"] \arrow[u, dashed, "i_2"'] \arrow[ur, "1_Y"'] & \end{tikzcd}$$

により射 $i_1: X \longrightarrow X \times Y$ と $i_2: Y \longrightarrow X \times Y$ が定まる.
双対的に射 $q_1: X \vee Y \longrightarrow X$ と $q_2: X \vee Y \longrightarrow Y$ が定まる.
したがって product と coproduct がホモトピーを保存している場合 product を pseudo-product として用い, coproduct を pseudo-coproduct として用いることができる. この場合には基点を持つ位相空間のカテゴリーで得られた種々の結果が一般のカテゴリーに拡張される. 以下 $\Pi = \times$, $\amalg = \vee$ とする.

参考文献としては，Gottlieb [2,3]，Hoo [5]，Lim [6,7]，Oda [8,9,10]，Varadarajan [12]，Woo and Kim [13] などがある．

前節の図式 (3) の $\xi$ を $\xi=(f,g)$ と表し，図式 (4) の $\eta$ を $\eta=\langle h,r\rangle$ と表すことにする．

pairing $\mu: X\sqcap Y \longrightarrow Z$ が与えられたとき，任意の射 $\alpha: A\longrightarrow X$，$\beta: A\longrightarrow Y$ に対し $\alpha \underset{\cdot}{+} \beta: A\rightarrow Z$ を

$$\alpha \underset{\cdot}{+} \beta = \mu\circ(\alpha,\beta): A\longrightarrow X\sqcap Y \longrightarrow Z$$

と定義する． copairing $\theta: A\longrightarrow H\sqcup R$ が与えられたとき，任意の射 $\alpha: H\rightarrow Z$，$\beta: R\rightarrow Z$ に対し

$$\alpha \dot{+} \beta = \langle\alpha,\beta\rangle\circ\theta : A\longrightarrow H\sqcup R \longrightarrow Z$$

により $\alpha\dot{+}\beta: A\rightarrow Z$ を定義する．

<u>定理</u>　$\mu: X\sqcap Y\rightarrow Z$ を pairing，$\theta: A\rightarrow H\sqcup R$ を copairing とする．$\alpha: H\rightarrow X$，$\beta: R\rightarrow X$，$\gamma: H\rightarrow Y$，$\delta: R\rightarrow Y$ を任意の射とするとき次の関係が成立する

$$(\alpha\dot{+}\beta)\underset{\cdot}{+}(\gamma\dot{+}\delta) = (\alpha\underset{\cdot}{+}\gamma)\dot{+}(\beta\underset{\cdot}{+}\delta)$$

これは "square lemma" の一般化である

$$\begin{array}{cc} & \dot{+}\rightarrow \\ \underset{\cdot}{+}\downarrow & \boxed{\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}} \end{array}$$

この定理の特別な場合として種々の結果が得られる。特に,

<u>定理</u> (i) $X$ を Hopf object とする. $r: A \to R$ が cocyclic morphism ならば写像

$$r^*: [R, X] \longrightarrow [A, X]$$

の像は $[A, X]$ の center に含まれる.

(ii) $A$ を co-Hopf object とする. $g: Y \to X$ が cyclic morphism ならば写像

$$g_*: [A, Y] \longrightarrow [A, X]$$

の像は $[A, X]$ の center に含まれる.

<u>定理</u> $f: X \to Z$, $v: V \to Z$, $g: Y \to V$, $w: W \to V$ を射とする. $\theta: A \to X \sqcup Y$ を copairing とする. このとき,

$$f \perp v \text{ かつ } g \perp w \Rightarrow \{f \dotplus (v \circ g)\} \perp (v \circ w)$$

が成立する.

<u>定理</u>. $A$ を co-grouplike object とする. このとき, $(1_X)^{\perp}(A, X)$ は群 $[A, X]$ の中心に含まれる可換部分群である.

上の2つの定理の双対も成立する.

# 参考文献


[1] H. J. Baues, Algebraic homotopy, Cambridge Univ. Press, 1989.

[2] D. H. Gottlieb, A certain subgroup of the fundamental group, Amer. J. Math. 87 (1965) 840-856

[3] D. H. Gottlieb, Evaluation subgroups of homotopy groups, Amer. J. Math. 91 (1969) 729-756

[4] A. Heller, Abstract homotopy in categories of fibrations and the spectral sequence of Eilenberg and Moore, Illinois J. Math. 16 (1972) 454-474

[5] C. S. Hoo, Cyclic maps from suspensions to suspensions, Canad. J. Math. 24 (1972) 789-791

[6] K. L. Lim, On cyclic maps, J. Austral. Math. Soc. Ser A 32 (1982) 349-357

[7] K. L. Lim, Cocyclic maps and coevaluation subgroups, Canad. Math. Bull. 30 (1987) 63-71

[8] N. Oda, The homotopy set of the axes of pairings, Canad. J. Math. 42 (1990) 856-868

[9] N. Oda, Pairings of homotopy sets over and under B, Canad. Math. Bull. to appear

[10] N. Oda, Pairings and copairings in the category of topological spaces, Publ. RIMS Kyoto Univ. to appear

[11] D. G. Quillen, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. 43, Springer-Verlag, 1967

[12] K. Varadarajan, Generalized Gottlieb groups, J. Indian Math. Soc. 33(1969) 141-164

[13] M. H. Woo and J. R. Kim, Certain subgroups of homotopy groups, J. Korean Math. Soc 21(1984) 109-120.