数理解析研究所講究録
第781巻 1992年 67-73

分類空間のコホモロジーについての一注意

琉大理　手塚康誠(Michishige Tezuka)

序

最近、散在する単純有限群の素体上でのコホモロジーが、Adem, Milgram を中心としていくらの場合には、全次元に渉って決定された。[3], [4], [6], [7]. ここでは、Mathieu群 M_{12} の 3-torsionの場合を考える。尚、2-torsion の場合には、Adem-Maginnis-Milgram[3] に依って決定されている。方法は 2-torsion の場合と同様に、Webbの方法に依る有限群の p-局所構造を解析することで行なわれる。この結果は、Milgram教授との共同研究というより指導というのに近い形で得られたもので、この場を借りて感謝の意を表したい。

有限単純群のコホモロジーと親密な関係にあるものとして単純連結コンパクトリー群の分類空間のコホモロジーのAdams, Kono の結果があるが、これを Borel-De Siebenthal の定理を、p-局所構造の定理と考えることで、今後再考して見たいと思う。

§1 結果

ここでは G を有限群，k を体とする。BG を G の分類空間とすると良く知られるように，群のコホモロジーは，

$$H^*(G, k) = H^*(BG, k)$$

と定義される。右辺は BG の特異コホモロジーである。この時 Poincaré 級数 $P_G(x)$ を

$$P_G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k H^n(G, k)\, x^n$$

と定義する。M_{12} を Mathieu 群とする時，次の定理が成立する。

定理 A．$H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)$ は多項式環 $\mathbb{F}_3[Q, L^2]$ 上の有限生成自由加群である。ここに Q, L^2 の次元はそれぞれ 12, 16 である。更に $H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)$ の Poincaré 級数は

$$\frac{Q(x)}{(1-x^{12})(1-x^{16})},$$

$$Q(x) = 1 + x^3 + 2x^4 + x^5 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 4x^{11} + 2x^{12} + 2x^{13}$$
$$+ 2x^{14} + 4x^{15} + 3x^{16} + 2x^{17} + 2x^{18} + x^{19} + x^{21} + 2x^{22} + x^{23} + x^{26}$$

で与えられる。

系 B．$H(M_{12}, \mathbb{F}_3) = \oplus H^{2n}(M_{12}, \mathbb{F}_3)$ の極小素イデアルは $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{P}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{P}_{\mathrm{III}}$ で，

$$H(M_{12}, \mathbb{F}_3)/\mathfrak{P}_{\mathrm{I}} \cong H(M_{12}, \mathbb{F}_3)/\mathfrak{P}_{\mathrm{II}} \cong \mathbb{F}_3[Q, L^2]$$
$$H(M_{12}, \mathbb{F}_3)/\mathfrak{P}_{\mathrm{III}} \cong \mathbb{F}_3[Q, t^2],\ t^2 \text{の次元は } 4,$$

が成立する。

また、生成元を調べてみることで，$H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)$ は環として $H^*(GL_3(\mathbb{F}_3), \mathbb{F}_3)$ と同型になることがわかる。[9].

§2　3－局所構造

ここの詳しい定義は，Brown の群のコホモロジーの教科書や，Adem-Maginnis-Milgram [3]，Webb [12]，Quillen [13] Minami [11] 等の論文を見ていただく事にして結果のみ書くことにする。M_{12} は次数12の対称群 S_{12} の部分群とみなすことで以下の結果を得る。

M_{12} の3－Sylow群 G は位数 3^3 で次で与えられる。

$$G = \{\langle x, y\rangle \mid x^3 = y^3 = [x,y]^3 = [x,[x,y]] = [y,[x,y]] = 1\}.$$

G を $GL_3(\mathbb{F}_3)$ の上半行列と同一視

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

する。そして，

$$m = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される随伴変換で $m(x) = x^{-1}$, $m(y) = y$

$l(x) = x \quad l(y) = y^{-1}$

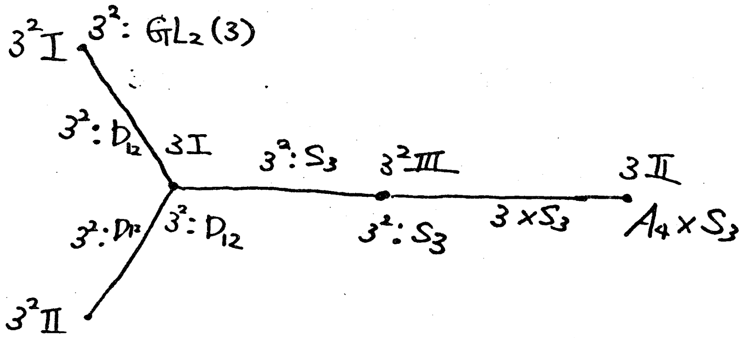
となる。この時，$N_{M_{12}}(G) = \langle G, m, l\rangle = G:2^2 = 3^2:D_{12}$.

$A:B$ は分列する半直積 $1 \to A \to A:B \to B \to 1$ を表わす。

M_{12} には，$(\mathbb{Z}/3)^2$ の共役類があり，これらは，$\langle x, [x,y]\rangle = 3^2\mathrm{I}$, $\langle y, [x,y]\rangle = 3^2\mathrm{II}$，$\langle xy, [x,y]\rangle = 3^3\mathrm{III}$ で代表される。

これらのM_{12}の中での正規化群は$GL_3(\mathbb{F}_3)$の中での正規化群と同様に，3^2I，3^2IIについては，$(\mathbb{Z}/3)^2 : GL_2(\mathbb{F}_3)$，$3^2$IIIに対しては$(\mathbb{Z}/3)^2 : S_3 = \langle x, y, ml \rangle$と同型になる。

位数3の元の共役類は2つで，$[x,y]$とxyが代表元で3^2I，3^2IIの単位元以外で生成される部分群は$\langle [x,y] \rangle$に共役で，3^2IIIで$\langle [x,y] \rangle$の元以外の元で生成される部分群は$\langle xy \rangle$に共役となる。更に，$\langle [x,y] \rangle = 3$Iの正規化群は$\langle x, y, l, m \rangle = N_{12}(Syl_3(M_{12}))$，$\langle xy \rangle$の正規化群は$A_4 \times S_3$と同型になる。
これよりPoset空間$A_3(M_{12})$の商空間$A_3(M_{12})/M_{12}$は



(1.1)

となる。

§2　$H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)$の計算法

Webbの公式に依れば，M_{12}の$\mathbb{F}_3$-係数コホモロジー群$H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)$のPoincaré級数P.Sは(1.1)のグラフで

$P_{M_{12}}(x) =$(頂点のisotropy群のコホモロジーのP.S) −
(辺のisotropy群のコホモロジーのP.S)

となるが，$H^*(\mathbb{Z}/3\times S_3, \mathbb{F}_3)\cong H^*(A_4\times S_3, \mathbb{F}_3)$に注意すると，

命題2.1.

$$P_{M_{12}}(x) = 2P_{3^2:GL_2(3)}(x) - P_{3^2:D_{12}}(x)$$

が得られる。

更に，EM_{12}を acyclic 自由M_{12}-空間として，$X = A_3(M_{12})$ $\times_{M_{12}} EM_{12} \longrightarrow A_3(M_{12})/M_{12}$に関する，Leray スペクトル列を考えると

定理2.2. $H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)\subset H^*(G, \mathbb{F}_3)$で$\theta\in H^*(G, \mathbb{F}_3)$が$H^*(M_{12}, \mathbb{F}_3)$に含まれる条件は，

$$\theta\in H^*(3^2\mathrm{I}, \mathbb{F}_3)^{GL_2(\mathbb{F}_3)} \text{ かつ } \theta\in H^*(3^2\mathrm{II}, \mathbb{F}_3)^{GL_2(\mathbb{F}_3)}$$

これから，$H^*(G, \mathbb{F}_3)$を計算すればよいことがわかる。

§3 $H^*(G, \mathbb{F}_3)$

Gの$\mathbb{Z}$-係数コホモロジーは Lewis に依って完全にわかっているので，$\mathbb{F}_3$-係数コホモロジーのベクトル空間としての構造は künneth公式からすぐわかる。そこで環構造を調べることにする。まず中心拡大 $0\to\langle[x,y]\rangle\to G\to\langle\bar{x},\bar{y}\rangle\to 1$，$\langle[x,y]\rangle\cong\mathbb{Z}/3$，$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle\cong(\mathbb{Z}/3)^2$から，Hochschild-Serre スペクトル列

$$E_2^{*,*} = H^*(\langle [x,y]\rangle, \mathbb{F}_3) \otimes H^*(\langle \bar{x}\rangle \times \langle \bar{y}\rangle, \mathbb{F}_3) \Rightarrow H^*(G, \mathbb{F}_3)$$

, $H^*(\langle [x,y]\rangle, \mathbb{F}_3) = \mathbb{F}_3[b_2] \otimes \Lambda(e_2)$, $H^*(\langle \bar{x}\rangle \times \langle \bar{y}\rangle, \mathbb{F}_3) = \mathbb{F}_3[b_1, b_3] \otimes \Lambda(e_1, e_3)$

を計算して

補題 $H^*(G, \mathbb{F}_3)$ はベクトル空間としての同型

$$\mathbb{F}_3[b_2^3] \otimes \begin{cases} \mathbb{F}_3[b_1](1, b_3, b_3^2, e_1, b_3 e_1, b_3^2 e_1) \oplus \mathbb{F}_3[b_3](b_3^3, e_3) \\ \oplus\, \mathbb{F}_3[b_1]\{e_1 \otimes e_2,\ b_3 e_1 \otimes e_2,\ b_3^2 e_1 \otimes e_2) \oplus \mathbb{F}_3[b_3](e_3 \otimes e_2) \\ \oplus\, \mathbb{F}_3[b_1](e_1 \otimes b_2,\ b_3 e_1 \otimes b_2,\ b_3^2 e_1 \otimes b_2) \oplus \mathbb{F}_3[b_3](e_3 \otimes b_2) \\ \oplus \{e_1 e_3 \otimes e_2\} \oplus \{b_1 e_3 \otimes e_2 - b_3 e_1 \otimes e_2\} \oplus \{e_1 e_3 \otimes b_2 e_2\} \end{cases}$$

を得る。

そこで，コチェイン複体の中で，$e_1 \otimes e_2$, $e_3 \otimes e_2 \in E_\infty^{1,1}$ を表わす元を具体的に書いて，すべての極大部分群 $3^2\mathrm{I} = \langle x, [x,y]\rangle$, $3^2\mathrm{II} = \langle y, [x,y]\rangle$, $3^2\mathrm{III}(a) = \langle xy, [x,y]\rangle$, $3^2\mathrm{III}(b) = \langle xy^2, [x,y]\rangle$ に制限して，次の定理を得る。

定理3.2. $H^*(G, \mathbb{F}_3) \longrightarrow \bigoplus_{-=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}(a),\mathrm{III}(b)} H^*(3^2-, \mathbb{F}_3)$ は単射環準同型である。

これから環構造を書きあげることができるが，複雑になるので省略する。Leary [7] は，Massey積を使うことで，積を書きあげている。更に詳しいことは，The geometry and cohomology of M_{12} : II [15] を参照。

文献

[1]. Adams, J. F. lecture at Northwestern University, 1984

[2]. ________ . a letter to A. Kono.

[3]. Adem, A. Maginnis, Milgram, R. J. The geometry and cohomology of the Mathieu group M_{12}, J. of Algebra

[4] ________ . Symmetric invariants and cohomology of group, Math Ann.

[5]. Brown, K.S. Cohomology of group, Springer-Verlag, GTM 87, (1982)

[6] Fong, P. Milgram, R J. On the geometry and cohomology of the simple groups $G_2(q)$ and $^3D_4(q)$, preprint

[7]. Leary, I. thesis, Cambridge (1989)

[8] Lewis, G. The integral cohomology rings of groups of order p^3, Trans. AMS, (1968) 501–529

[9] Tezuka, M Yagita, N. The mod p cohomology of $GL_3(\mathbb{F}_p)$, J. of Alg, 81 (1983), 295–303

[10]. Thomas, C. B. Characteristic classes and the cohomology of finite groups. Cambridge Univ press 1986

[11] Mimami, N. Thesis, Northwestern Univ

[12]. Webb, P, A local method in group cohomology, Comm Math. Helv, 62 (1987), 135–167.