

大気現象の予測可能性

— 簡単な大気モデルにおける局所的リアプノフ安定性解析 —

京大・理・地球物理 余田 成男 (YODEN Shigeo)

1. はじめに

Lorenz(1963a) が熱対流の簡単なモデルで「カオス」を発見して、約 20 年が経つ。いくつかの分野で独立に始められたカオスの研究は、1970 年代になって、統一的な視点で整理され、その理解が深められていった。さまざまな学問領域でカオスの重要性が認識され、研究されるようになったのは、ここ 10 年余りのことである。我々の気象学の分野では (Lorenz も気象学者であるが)、とくに「予測可能性」の問題においてカオスの概念を用いた研究が行われてきた。

カオスの特徴づける性質の 1 つに、初期値に対する敏感性がある。ある系における状態の時間変化を考えて、その初期時刻にわずかに異なった 2 つの状態が時間発展とともにそれらの差を増大させるとき、この振舞いをカオスと呼ぶ。

Lorenz(1963a) は数値天気予報モデルにおける初期値敏感性の考察より、たとえ完璧な予報モデルができたとしても観測にともなう初期値誤差は避けられないので、数値予報には限界がある (つまり、有限時間後には予報が不可能になる) と結論した。さらに、Lorenz(1965) はランダムで微小な初期誤差の線形時間発展を定式化し、簡単な大気モデルを用いて誤差成長の変動に関する数値実験を行った。その大枠は、今日の局所的リアプノフ安定性解析 (Goldhirsch, Sulem and Orszag 1987) にあたるものであり、Lorenz の先駆性を示すものである。

本研究 (Yoden and Nomura 1991, および 野村 1991) では、大気の予測可能性問題の視点から局所的リアプノフ安定性の概念を整理し、簡単な大気モデルを用いて Lorenz の研究を発

展させる。とくに、誤差成長の時間変動と成長する誤差の空間パターンに重点を置いて解析を行う。

2. 局所的リアプノフ安定性

2.1 力学系における基準解と摂動

n 次元力学系(自励系)を考える:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]. \quad (1)$$

この解 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ を基準解と呼ぶことにする。

ここで、ある初期時刻 $t = t_0$ において、基準解 $\mathbf{x}(t_0)$ に微小な摂動 $\mathbf{y}(t_0)$ を与える。この摂動の各成分 y_i の分布は互いに独立であるとし、平均 b_i 、分散 a_i^2 のガウス分布を仮定すると、確率密度関数は次で与えられる:

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \prod_{i=1}^n a_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - b_i)^2}{a_i^2} \right\}. \quad (2)$$

等確率密度面は、 $\sum_{i=1}^n (y_i - b_i)^2 / a_i^2 = \varepsilon^2 = \text{const.}$ という n 次元楕円体となる。力学系(1)をある数値予報モデルとし、 $\mathbf{y}(t_0)$ を初期値誤差とすると、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ は「系統的初期誤差」であり、そのまわりの楕円体状に分布した誤差は「ランダム初期誤差」である。

さて、初期に加えられた摂動 $\mathbf{y}(t_0)$ の時間発展を考えよう。基準解 $\mathbf{x}(t)$ からの摂動 $\mathbf{y}(t)$ が微小であるとする、その時間発展は(1)を局所的に線型化した方程式(tangent linear equation)で記述できる:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}(t)\mathbf{y}(t). \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{J}(t)$ は \mathbf{F} の $\mathbf{x}(t)$ におけるヤコビアン行列である。(3)を t_0 から $t_0 + \tau$ まで積分して $\mathbf{y}(t_0 + \tau)$ を求めると、次のようになる:

$$\mathbf{y}(t_0 + \tau) = \mathbf{M}(t_0 + \tau, t_0)\mathbf{y}(t_0), \quad (4)$$

$$M(t_0 + \tau, t_0) \equiv \exp\left[\int_{t_0}^{t_0 + \tau} J dt\right]. \quad (5)$$

行列 $M(t_0 + \tau, t_0)$ は, (3) の resolvent であり, Lorenz(1965) が誤差行列 (error matrix) と呼んだものである.

2.2 線形安定性とリアプノフ安定性

従来の線形安定性とリアプノフ安定性がこれらの表式ではどのように現されるかを見ておこう. まず, 定常解 \bar{x} の線形安定性を考える. (3) で $J = \text{const.}$ となるので, $y(t) \propto e^{\mu t}$ となり, μ は J の固有値で与えられる. J は普通の実行列であるので, その固有値 $\{\mu_i\}$ は一般に複素数であり, 固有ベクトル $\{\xi_i\}$ は一般に直交していない. 少なくとも 1 つの固有値が正の実部をもつとき, 摂動は指数的に増大するので, 定常解 \bar{x} は不安定である. このように J の固有値・固有ベクトルを求めるのが, 定常解の線形安定性解析である. 誤差行列は $M(t_0 + \tau, t_0) = e^{\tau J}$ であるので, その固有値, 固有ベクトルは, それぞれ, $\{e^{\tau \mu_i}\}, \{\xi_i\}$ である.

つぎに, 基準解 $x(t)$ のリアプノフ安定性を考える. Oseledec(1968) は次の乗法的エルゴード定理を証明した:

ほとんどすべての (確率 1 で) 初期値 $x(t_0)$ に対して, 次の極限が存在するような正規直交系 $f_i(t_0)$ が存在する.

$$\lambda_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log \|M(t_0 + \tau, t_0) f_i(t_0)\|. \quad (6)$$

エルゴード系では λ_i の値は初期値に依存しない.

この極限 λ_i ($1 \leq i \leq n$) を「リアプノフ指数」, f_i を「リアプノフ固有ベクトル」と呼ぶ. リアプノフ指数は初期値 $x(t_0)$ に依存せず, アトラクタの大域的な性質を表すが, リアプノフ固有ベクトルは $x(t_0)$ に依存する. 解軌道の近傍で f_i 方向に微小の距離だけ離れている 2 点は, 基本的に $e^{\lambda_i t}$ の割合で離れていくことを表している. $\forall \lambda_i \leq 0$ ならば, この力学系はリアプノフ安定である. このリアプノフ指数 $\{\lambda_i\}$ をもとにアトラクタの分類がなされてい

る。数値的にリアプノフ指数を計算するアルゴリズムは Shimada and Nagashima(1979) や Goldhirsch et al.(1987) によって提案されている。

リアプノフ安定性解析は、線形安定性解析を時間依存する系に一般化したものではない。定義 (6) より、リアプノフ指数 $\{\lambda_i\}$ は $\{\mu_i\}$ と違って実数であり、リアプノフ固有ベクトルは直交系である。線形安定性解析で Oseledec の定理に相当するものは存在しない。

2.3 局所的リアプノフ安定性

評価時間 τ が有限として、リアプノフ指数と同様の量を考えることができる (Goldhirsch et al. 1987)。まず、半正値対称行列 $M^T(t_0 + \tau, t_0)M(t_0 + \tau, t_0)$ の固有値を大きい順に並べたときの i 番目の固有値を $e^{2\lambda_i(t_0; \tau)\tau}$, それに対応する正規化された固有ベクトル (対称行列だから直交系をなす) を $f_i(t_0; \tau)$ とする:

$$M^T(t_0 + \tau, t_0)M(t_0 + \tau, t_0)f_i(t_0; \tau) = e^{2\lambda_i(t_0; \tau)\tau} f_i(t_0; \tau). \quad (7)$$

両辺に左から f_i^T をかけ、 $\|f_i\| = 1$ を用いて整理すると、

$$\|M(t_0 + \tau, t_0)f_i(t_0; \tau)\| = e^{\lambda_i(t_0; \tau)\tau}, \quad (8)$$

となる。従って、次が成り立つ:

$$\lambda_i(t_0; \tau) = \frac{1}{\tau} \log \|M(t_0 + \tau, t_0)f_i(t_0; \tau)\|. \quad (9)$$

ここで、 $\tau \rightarrow \infty$ の極限をとれば (6) に一致するので、 $\lambda_i(t_0; \tau)$ を「局所的リアプノフ指数」、 $f_i(t_0; \tau)$ を「局所的リアプノフ固有ベクトル」と呼ぶ。(これらの物理的意味については次節に述べる。) リアプノフ指数はノルムに依らず同じ値をとるが、局所的リアプノフ指数はノルムに依存する。ここでは、 L_2 ノルムを用いる。 $\forall \lambda_i(t_0; \tau) \leq 0$ であれば評価時間 τ に対して局所的にリアプノフ安定である。前節で定義したリアプノフ指数、リアプノフ固有ベクトルと比べて、局所的リアプノフ指数、局所的リアプノフ固有ベクトル、ともに、初期時刻 t_0 と評価時間 τ に依存することに注意すべきである。

2.4 等方的ランダム初期誤差の時間発展

Lorenz(1965)に従い,時刻 t_0 において基準解 $\mathbf{x}(t_0)$ の近傍で等方的にランダムに分布した,大きさ ε の摂動(初期誤差) $\mathbf{y}(t_0)$ を考える:

$$\mathbf{y}^T(t_0)\mathbf{y}(t_0) = \varepsilon^2. \quad (10)$$

(4)より,この摂動は時刻 $t_0 + \tau$ では

$$\mathbf{y}^T(t_0 + \tau)[M(t_0 + \tau, t_0)M^T(t_0 + \tau, t_0)]^{-1}\mathbf{y}(t_0 + \tau) = \varepsilon^2, \quad (11)$$

となり, n 次元球(10)が n 次元楕円体(11)に変形される.この楕円体を「誤差楕円体」と呼ぶ.半正値対称行列 $M(t_0 + \tau, t_0)M^T(t_0 + \tau, t_0)$ の固有値を大きい順に並べたときの i 番目の固有値を $\Gamma_i(t_0; \tau)$,対応する正規化された固有ベクトル(直交系をなす)を $\zeta_i(t_0; \tau)$ とすると,楕円体の主軸長は $\varepsilon\Gamma_i^{1/2}$,主軸方向は $\zeta_i(t_0; \tau)$ である.

ここで, $\Gamma_i(t_0; \tau)$, $\zeta_i(t_0; \tau)$ は,局所的リアプノフ指数,局所的リアプノフ固有ベクトルと次の関係にある:

$$\Gamma_i = e^{2\lambda_i\tau}, \quad (12)$$

$$e^{\lambda_i\tau}\zeta_i = M\mathbf{f}_i. \quad (13)$$

これより,局所的リアプノフ固有ベクトル $\mathbf{f}_i(t_0; \tau)$ は評価時間 τ 後に誤差楕円体の主軸方向を向くベクトルで,初期誤差の適当な正規直交基底であることがわかる.

2.5 簡単な系でのイラストレーション

これまでに導入してきた概念を,具体例を用いてイラストする.まず,次の線型の2次元力学系を考える:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

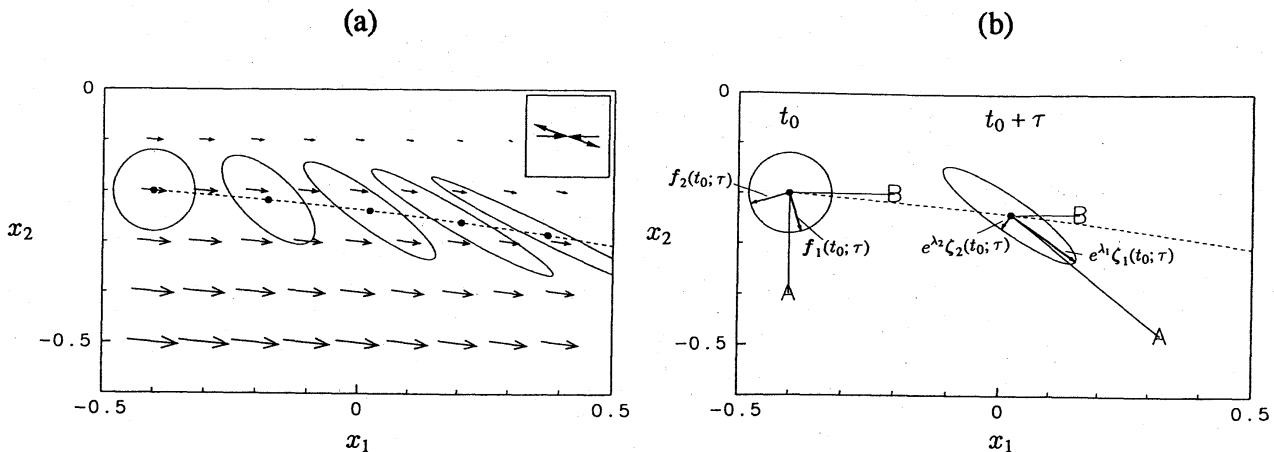


図 1: (a) 2次元線形力学系での等方的ランダム初期誤差の時間発展. (b) 局所的リアプノフ固有ベクトルと誤差楕円の主軸.

線型であるから, tangent linear equation も同じ式になる. 力学系 (14) は, 定常解 $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ をもつ. J の固有値は $\{1, -2\}$ であるので, この定常解は線形不安定である. 対応する固有ベクトル $\xi_{1,2}$ を図 1(a) 右上に示す. 誤差行列は $M(t_0 + \tau, t_0) = e^{\tau J}$ であるので, これより $\lambda_i(t_0; \tau)$, $f_i(t_0; \tau)$, $\Gamma_i(t_0; \tau)$, $\zeta_i(t_0; \tau)$ を求めることができる.

図 1(a) は 2次元相空間での (14) の「流れ」の場を示したものである. 初期値を $x_1(t_0) = -0.4$, $x_2(t_0) = -0.2$ とした場合の基準解を破線で示す. また, $t = t_0$ で半径 0.08 の円周上に摂動を与えたときの, 評価時間 $\tau = 0.09, 0.18, 0.27, 0.36$ での誤差楕円を示す. 楕円の長軸は, 最初は不安定固有ベクトルの向き ξ_1 と異なるが, τ を大きくするにつれてその向きに漸近する. 局所的リアプノフ固有ベクトルと誤差楕円体の主軸との関係 (13) を図 1(b) に示す. ここで, 大きさの等しい 2 つの摂動, A, B の τ 時間後を見ると, 1 番目の局所的リアプノフ固有ベクトル $f_1(0; \tau)$ への射影成分の大きい A のほうが, B よりも成長率が高い. このことは, 「流れ」の変化率が x_1 方向よりも x_2 方向に大きいことと関連して理解できる.

力学系 (14) は線形である ($J = \text{const.}$) ので, 摂動の時間発展は初期値に依らない. 誤差成長が時間とともに変動するのは, 非線形な力学系である. 図 2 は, 簡単な非線形系である Lorenz アトラクタ上で局所的誤差成長率を求めた 1 例である (Mukougawa, Kimoto and

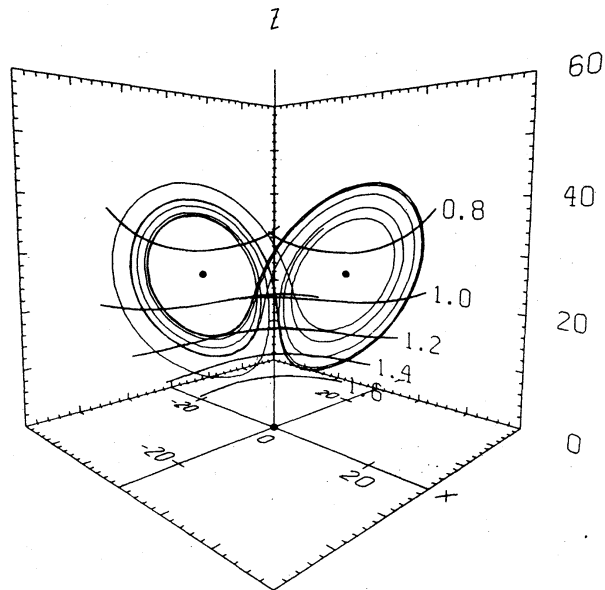


図2: Lorenz アトラクタ上での局所的誤差成長率.

Yoden 1991). ここで, 局所的誤差成長率の指標 $\alpha(t; \tau)$ として, 評価時間 $\tau = 0.1$ に対する誤差楕円体の主軸長の rms をとる:

$$\alpha(t_0; \tau) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Gamma_i(t_0; \tau)}. \quad (15)$$

この評価時間に対して, rms 誤差はアトラクタ上での位置によって増大 ($\alpha > 1$) したり減少 ($\alpha < 1$) したりしている. 滞在確率の重みを掛けて平均すると, 従来のリアプノフ指数から得られる値と一致するはずである. この局所的誤差成長率の指標 $\alpha(t; \tau)$ が何によって決まっているか, 基準解 $\mathbf{x}(t)$ の何と関連しているか, 大変興味ある問題であるが, 簡単な Lorenz 系においてさえ良く判っていない. 間欠的カオス解で, 少し手がかりが得られた程度である (Mukougawa et al. 1991).

3. 順圧大気モデルにおける局所的リアプノフ安定性解析

3.1 順圧大気モデル

中緯度 β 平面上での 2 次元非発散流は次の (適当に無次元化された) 渦度方程式で記述で

きる:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

ここで, $\psi(x, y, t)$ は流線関数, (x, y) は東向きおよび北向きの座標, t は時刻である. 水平ラプラシアンとヤコビアンはそれぞれ次で定義される: $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $J(a, b) = \partial a/\partial x \times \partial b/\partial y - \partial b/\partial x \times \partial a/\partial y$. また, 無次元ベータ・パラメータは $\beta = \sqrt{2}/6$ とする.

x 方向には 2π で周期的とし, y 方向には $y=0$ と $y=\pi$ に剛体壁があるとすると, 従属変数 ψ は次の直交関数系 $\{\phi_i\}$ で展開できる (Lorenz 1963b):

$$\phi_{A_m} = \frac{1}{\pi} \cos my, \quad \phi_{K_m} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin my \cos nx, \quad \phi_{L_m} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin my \sin nx, \quad (17)$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

展開された ψ を (16) に代入し直交性を使うと, 最終的に次のスペクトル表現を得る:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \mathcal{F}_i(\psi_1, \psi_2, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, M \times (2N + 1). \quad (18)$$

ここで, \mathcal{F}_i の具体的表式は Yoden(1985) を参照のこと.

(17) を $M = N = 8$ で切断すると, (18) は 136 変数の非線形常微分方程式系となる. これを力学系 (1) と考えて, 局所的リアプノフ安定性解析を行う. tangent linear equation は (18) を直接微分して求める. まず, 基準解を時間積分で求め, 同時に, 136 個の直交基底をそれぞれ初期値として tangent linear equation を 136 回時間積分して, 誤差行列 M を計算する (Lorenz 1965). 次に, $M^T M$, および MM^T の固有値・固有ベクトルを求め, 局所的なリアプノフ安定性を調べる. Yoden and Nomura(1991) では, 基準解として定常解, 周期解, カオス解を考え, それぞれについて詳細に調べたが, ここではカオス解の 1 例について述べる.

3.2 カオス解

(18) の不安定定常解 $\psi_{A_2} = -1.0$ に微小な摂動を加えた初期値から時間積分したところ, 図 3 のような非周期解が得られた. 東西波数 $n=1$ のロスビー波が卓越し西進している. 高

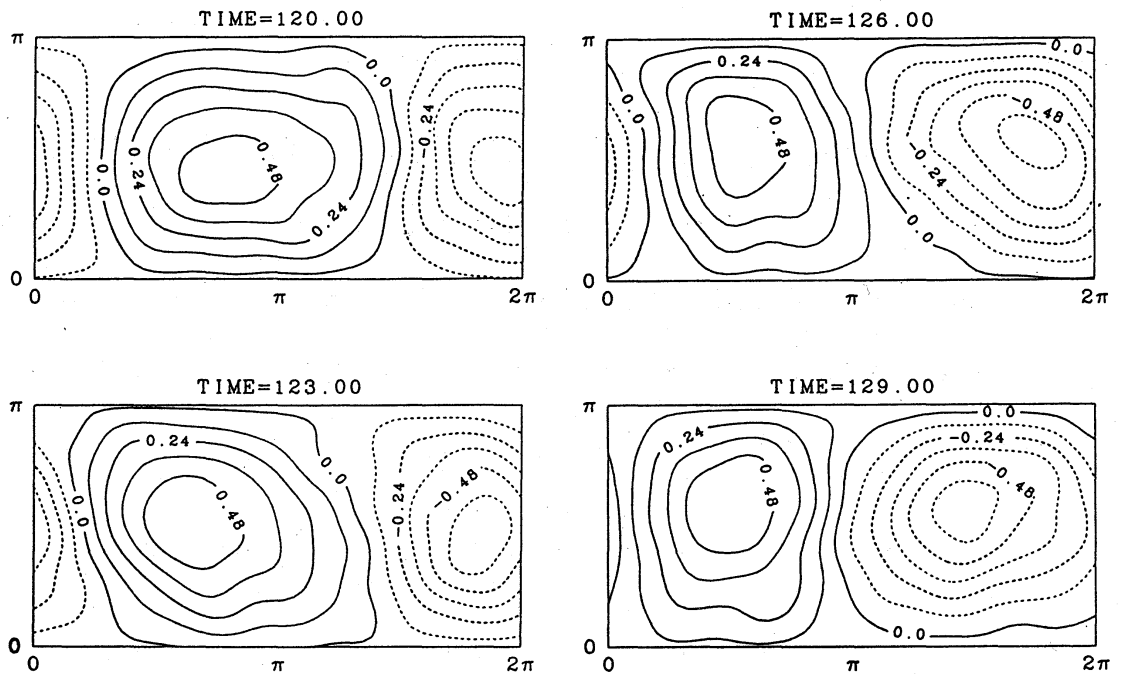


図 3: 流線関数の時間的推移.

波数成分も存在し不規則な変動をもたらしている. この基準解のまわりでの局所的リアブ
ノフ安定性解析を行う.

局所的誤差成長率の指標 $\alpha(t_0 = 120; \tau)$ の評価時間 τ による変化を図 4 に示す. 定常解
 $\psi_{A_2} = -1.0$ の不安定固有ベクトルの線型発達率と比べると rms 誤差成長率はかなり小さい
が, τ を大きくするにつれて指数的に増大している. これより, この非周期解がカオス的で

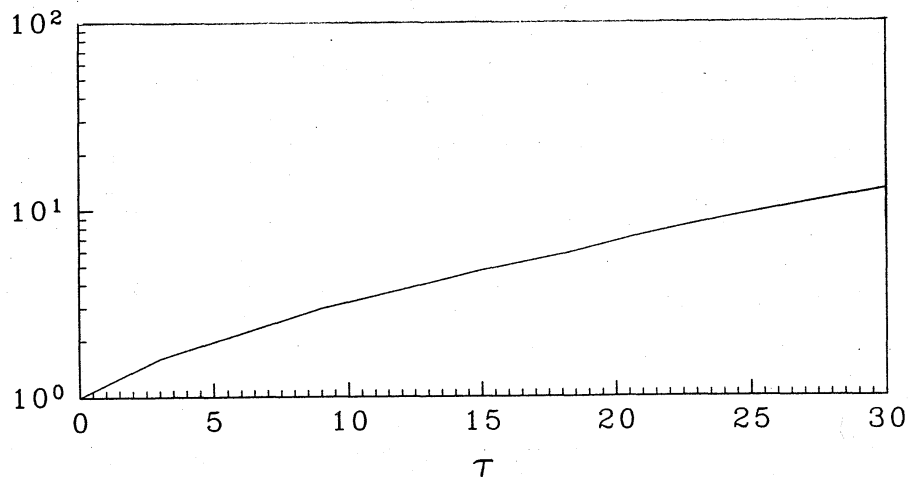


図 4: 局所的誤差成長率の指標 $\alpha(t; \tau)$ の評価時間 τ による変化.

あるといえる。

図5は $\tau=3,6$ での1番目の局所的リアプノフ固有ベクトル f_1 と誤差楕円体の長軸 ζ_1 の空間パターンを示す。局所的リアプノフ固有ベクトルは、小さな $\tau(=3)$ では東西に伸びた構造をもっている。基準解の合流部分の1つ(図3の $x \sim 1, y \sim 0$ 付近)で f_1 は大きな振幅を持つ。これが $\tau=3$ 時間後には ζ_1 となり(図5右),初期誤差が基準解の「移流」効果で変形されたと考えることができる。この時刻では、誤差は限られた領域でのみ大きな振幅を持っている。評価時間が長くなると、 f_1 はモデルの分解能程度まで細かな構造となり、 ζ_1 の振幅が大きな領域は全体に広がっている。

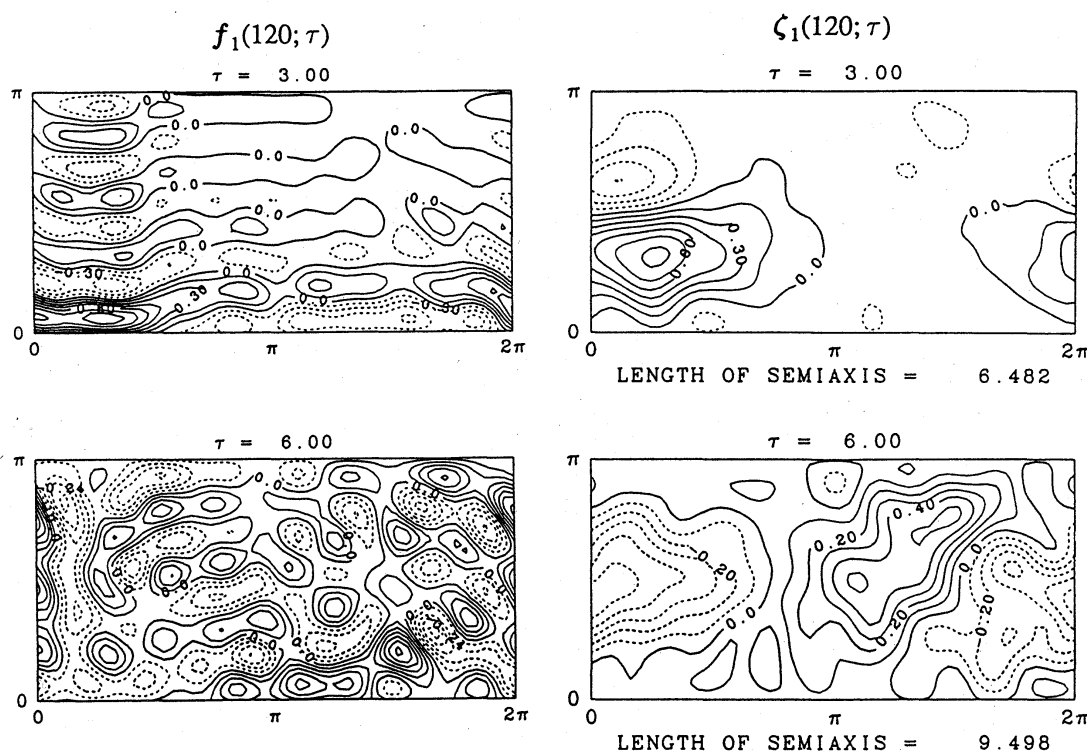


図5: 基準解 $\psi(t_0 = 120)$ に対する1番目の局所的リアプノフ固有ベクトル(左側)と誤差楕円体の長軸(右側)の空間パターン。上段から $\tau=3,6$ 。長軸の空間パターンの下に書かれた数字は、長軸の長さを示す。

4. おわりに

大気の予測可能性問題の視点から局所的リアプノフ安定性の概念を整理し、136変数の準地衝順圧大気モデルを用いてその有効性を検討した。

局所的リアプノフ指数は等方的ランダム初期誤差の成長率の指標となる。線形化して得られた指数であるので短い評価時間に対して有効である。その大きさは基準解に依存して変動する。しかし、基準解がどのような状態の時に誤差成長率が大きくなるかは、自明ではない。

評価時間が短い時、最大発達する局所的リアプノフ固有ベクトルは限られた空間領域で大きな振幅を持つので、ランダム初期誤差がどこで大きくなるかという情報を与える。それが大きく発達する領域は、基準解の流れ場の特徴的な場所-合流部分-である。

また、系統的初期誤差が存在する場合、その最大発達する局所的リアプノフ固有ベクトルへの射影成分の大小によって、系統的初期誤差の成長率が変動する。射影成分が大きい時に成長率も大きい。

本研究で整理した概念をもとに、現業の数値予報モデルを用いて、1週間程度の評価時間に対する予測可能性問題を研究した (Kimoto, Mukougawa and Yoden 1992)。数値予報モデルは100万変数以上の巨大なシステムであるので、ここで用いた手法がそのまま使えるわけではない。また、モデル自体が完全ではないので、観測と予報との差には、初期値誤差の成長以外にモデルの不完全さによる「誤差」が含まれている。現業の数値予報への応用はまだまだ実験的な段階であるが、予報誤差が予測できるようになればその情報価値は飛躍的に増大する。

参考文献

Goldhirsch, I., P.-L. Sulem, and S.A. Orszag, 1987: Stability and Lyapunov stability of dynam-

- ical systems: a differential approach and a numerical method. *Physica*, **27D**, 311–337.
- Kimoto, M., H. Mukougawa and S. Yoden, 1992: Medium-range forecast skill variation and blocking transition: A case study. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, in press.
- Lorenz, E.N., 1963a: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130–141.
- , 1963b: The mechanics of vacillation. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 448–464.
- , 1965: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, **17**, 321–333.
- Mukougawa, H., M. Kimoto and S. Yoden, 1991: A relationship between local error growth and quasi-stationary states: case study in the Lorenz system. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 1231–1237.
- 野村 真佐子, 1991: 予測誤差の時間的・空間的変動に関する理論的研究. 京都大学大学院理学研究科 修士論文, 56pp.
- Oseledec, V.I., 1968: A multiplicative ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19**, 197–231.
- Shimada, I. and T. Nagashima, 1979: A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, **61**, 1605–1615.
- Yoden, S., 1985: Multiple stable states of quasi-geostrophic barotropic flow over sinusoidal topography. *J. Met. Soc. Japan*, **63**, 1031–1045.
- and M. Nomura, 1991: Local Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, submitted.