数理解析研究所講究録
第 783 巻 1992 年 76-85

Pre-Nested Fractal 上の Random Schrödinger Operator における Lifschitz Tail について

島 唯史 (TADASHI SHIMA)
大阪大学 基礎工学部

1. 準備

最近筆者は nested fractal 上での random Schrödinger operator の Lifschitz tail の計算を行なった ([7])。(この事に関しては異なるアプローチによる、特に 2 次元 Sierpinski gasket 上での、研究が Paluba [6] によりなされている。) [7] で筆者は、同じ議論が pre-nested fractal 上で構成した Anderson model に対しても有効であることを注意している。(Anderson model は Z^d 上で構成した random な potential を持つ Schrödinger operator の事であるが、Z^d の代りに (infinite) pre-nested fractal を置いたものを考えていただきたい。pre-nested fractal の例としては pre-Sierpinski gasket をあげておく。) 即ち、Lifschitz tail の評価を Kirsch and Martinelli [3], Simon [8] の方法に沿って行なうということであり。この場合、固有値の scaling property (Fukushima [1])、及び Dirichlet norm による評価式 (Kusuoka [4]) が有効である (補題 3.1,3.2)。この小論は、この注意を実際に検証することが目標である。まず、続く §2 で pre-nested fractal 上での random Schrödinger operator に対する integrated density of states $k(\lambda)$ の存在を示す (定理 2.1)。これは [2] にしたがってなされる。§3 で Lifschitz tail 即ち、$k(\lambda)$ がスペクトルの下端 a の近傍で $\exp[-\mathrm{const.}(\lambda-a)^{-d_s/2}]$ と振舞うのを見る (定理 3.1)。ここで d_s は nested fractal のスペクトル次元である。(この場合 $d_s = \log N^2/\log\frac{N}{1-c}$ となる。[1] [5] を参照されたい。)

以下記号を準備し、setting を明確にしよう。まず R^D 上に 単位 nested fractal $(\Psi, \mathbf{E})$ を与える。ここで $\Psi = \{\Psi_0, \cdots, \Psi_{N-1}\}$ は N コのα-similitude の族である。即ち、$|\Psi_i(x) - \Psi_i(y)| = \alpha^{-1}|x-y|$ for $x, y \in R^D$, $i = 0, \cdots N$。但、$\alpha > 1$。$\mathbf{E}$ は $\mathbf{E} = \cup_{i=0}^{N-1}\Psi_i(\mathbf{E})$ を満たす compact set として一意的に定まる。nested fractal はある幾何的な条件が課せられた自己相似集合であるがここでは言及しない, 詳しくは Lindstrφm [5], Kusuoka [4] を参照されたい。

以下 $\Psi_0(x)=\alpha^{-1}x$ とする。 F_0 を Ψ_i $(i=0,\cdots,N-1)$ の不動点の集合，そして $F=\{e_1,\cdots,e_M\}\subset F_0$ を essential fixed point の集合とする。この時 nested fractal の定義から $2\le M\le N$。(例えば、2 次元 Sierpinski gasket の場合 $M=N=3$ となる。) 次に $I=\{0,\cdots,N-1\}$, Z_N^+ を非負 N-進整数の集合とする。$p\in Z_N^+$, $p\neq 0$ が以下のように表されるとき

$$p=p_kN^k+p_{k-1}N^{k-1}+\cdots+p_0, \qquad (p_i\in I,\ p_k\neq 0)$$

これを $p=p_k\cdots p_0$ で示す。 また $\mathrm{ord}(p)=k+1$ $(\mathrm{ord}(0)=1)$ と定義する。

更に以下の記号を準備する。$p=p_k\cdots p_0\in Z_N^+$, $A\subset R^D$ に対して

$$\Phi_p=\alpha^{\mathrm{ord}(p)}\Psi_{p_k}\circ\Psi_{p_{k-1}}\circ\cdots\circ\Psi_{p_0},$$
$$A_p=\Phi_p(A)$$

また $F^{<0>}=F$, $B^{<0>}=\{(e_i,e_j);\ e_i,e_j\in F,\ i<j\}$

$$F^{<n>}=\bigcup_{\mathrm{ord}(p)\le n}F_p$$
$$B^{<n>}=\bigcup_{\mathrm{ord}(p)\le n}\left\{(\Phi_p(e_i),\Phi_p(e_j));\ (e_i,e_j)\in B^{<0>}\right\}$$

と定義する。このようにして得られるグラフ $(F^{<n>},B^{<n>})$ を n-th expanded pre-nested fractal と呼ぶ。この時、 α^nF はグラフ $F^{<n>}$ の境界とみなせるからこれを $\partial F^{<n>}$ で示す。更に、 $\overset{o}{F}{}^{<n>}$ を $F^{<n>}\backslash\partial F^{<n>}$ とする。特に infinite pre-nested fractal $(F^{<\infty>},B^{<\infty>})$ を $F^{<\infty>}=\cup_nF^{<n>}$, $B^{<\infty>}=\cup_nB^{<n>}$ として定める。

$\pi_{\xi,\eta}$ $(\xi,\eta\in F,\ \xi\neq\eta)$ を Lindstrϕm's invariant probability とし、又これに従って構成した $F^{<1>}$ 上の random walk による、 $\partial F^{<1>}$ に含まれる点での再帰確率を c とする。$\ell(F^{<n>})$ を $F^{<n>}$ 上の実数値関数の集合とし、$\ell(F^{<n>})$ 上の双一次形式を次のように定める。

$$\mathcal{E}^{<n>}(f,g)=\sum_{\mathrm{ord}(p)\le n}\sum_{\xi,\eta\in F}(f(\Phi_p(\xi))-f(\Phi_p(\eta)))(g(\Phi_p(\xi))-g(\Phi_p(\eta)))\pi_{\xi,\eta},$$

この時 Kusuoka [4] に依り以下の事実が知られている。

補題 1.1

$$0 < C = \inf\{(1-c)^{-n}\mathcal{E}^{<n>}(f,f);\ \max\{|f(x)-f(y)|^2;\ x,y \in F^{<n>}\} = 1 \\ f \in \ell(F^{<n>}),\quad n = 1,2,\cdots\}$$

$F^{<n>}$ 上の discrete measure $\mu^{<n>}$ を

$$\mu^{<n>}(\{x\}) = \sharp\{p \in Z_N^+;\ F_p \ni x,\ \mathrm{ord}(p) \leq n\},\quad x \in F^{<n>}$$

と定義する。明らかに $\mu^{<n>}(F^{<n>}) = MN^n$。 $\ell(F^{<n>})$ 上に内積 $(\cdot,\cdot)$ を

$$(f,g) = \sum_{x \in F^{<n>}} f(x)g(x)\mu^{<n>}(\{x\})$$

で定める。以下、$\ell(F^{<n>})$ にこの内積の伴った実 Hilbert 空間を $\ell^2(F^{<n>})$ と表わすことにする。

$\ell^2(F^{<n>})$ 上での上記の双一次形式に対応する自己共役作用素を $H^{<n>}$ で示す。即ち、

$$\mathcal{E}^{<n>}(f,g) = (H^{<n>}f,g),\qquad f,g \in \ell^2(F^{<n>})$$

$H^{<n>}$ は $x \in F^{<n>}$ 毎に定まり

$$H^{<n>}f(x) = f(x) - \sum_{(x,y)\mathrm{or}(y,x) \in B^{<n>}} f(y)\frac{\pi_{x,y}\rho(x,y)}{\mu^{<n>}(x)}$$

となる。ここで

$$\rho(x,y) = \sharp\{p \in Z_N^+;\ \mathrm{ord}(p) \leq n, \{x,y\} \subset F_p\}$$

とし、又 $(x,y) = (\Phi_p(\xi),\Phi_p(\eta)) \in B^{<n>}$, $(\xi,\eta) \in B^{<0>}$ に対して $\pi_{x,y} = \pi_{\xi,\eta}$ とした。これは Lindstrøm [5] が構成した $F^{<n>}$ 上の Markov chain の生成作用素にほかならない。

更に $\ell_0^2(F^{<n>}) = \{f \in \ell^2(F^{<n>});\ f(p) = 0 \quad p \in \partial F^{<n>}\}$ とする、この上での $\mathcal{E}^{<n>}$ に対応する自己共役作用素を $H_0^{<n>}$ としよう。これは $F^{<n>}$ 上の点毎には次の様に定まる。

$$H_0^{<n>}f(x) = \begin{cases} H^{<n>}f(x), & x \in \overset{\circ}{F}{}^{<n>} \\ 0, & x \in \partial F^{<n>} \end{cases}$$

$V_\omega(x)$ $(x \in F^{<\infty>})$ を確率空間 $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ 上の非負実数値独立同分布確率変数とする。双一次形式 $\mathcal{E}_\omega^{<n>}$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{E}_\omega^{<n>}(f,g) = \mathcal{E}^{<n>}(f,g) + \int_{F^{<n>}} f(x)g(x)V_\omega(x)\mu(dx), \quad f,g \in \ell^2(F^{<n>})$$

この時 $\ell^2(F^{<n>})$, $\ell_0^2(F^{<n>})$ 上で $\mathcal{E}_\omega^{<n>}$ に対応する自己共役作用素を それぞれ $H_\omega^{<n>}$, $H_{0,\omega}^{<n>}$ と定める。更に、それぞれの作用素の eigenvalue counting function を $k_\omega^{<n>}(\lambda)$, $k_{0,\omega}^{<n>}(\lambda)$ で示す。即ち、

$$k_\omega^{<n>}(\lambda) = \lambda \text{ 以下の } H_\omega^{<n>} \text{ の固有値の数。}$$

$k_{0,\omega}^{<n>}(\lambda)$ についても同様。

$(F^{<n>})_p$ $(p \in Z_N^+)$ 上の discrte measure $\mu^{<n>,p}$ を $\mu^{<n>} \circ (\Phi_p)^{-1}$ と定め、$(F^{<n>})_p$ 上の実数値関数に、この measure から定まる内積を伴った実 Hilbert 空間を $\ell^2((F^{<n>})_p)$ で表わす。$\ell^2((F^{<n>})_p)$ 上での双一次形式 $\mathcal{E}^{<n>,p}$ $\mathcal{E}_\omega^{<n>,p}$ を次の様に定める。

$$\mathcal{E}^{<n>,p}(f,g) = \mathcal{E}^{<n>}(f \circ \Phi_p, g \circ \Phi_p)$$
$$\mathcal{E}_\omega^{<n>,p}(f,g) = \mathcal{E}^{<n>,p}(f,g) + \int_{(F^{<n>})_p} f(x)g(x)V_\omega(x)\mu^{<n>,p}(dx).$$

更に、先と同様にして $\ell^2((F^{<n>})_p)$ 上対応する自己共役作用素 $H^{<n>,p}$, $H_\omega^{<n>,p}$ を定める。他の記号も右肩に添字 p を付けて示すことにする。即ち、$H_{0,\omega}^{<n>,p}$, $k^{<n>,p}(\lambda)$ 等。

自然数 $m > l$ に対して

$$Z_{m,l} = \{p = p_k p_{k-1} \cdots p_0 \in Z_N^+;\ \mathrm{ord}(p) < m, p_j = 0, (j < l)\}$$

とする。この時 nested fractal の定義により次の事実を得る。

<u>Fact</u> $\quad p, q \in Z_{m,l}$, $p \neq q$

$$F^{<m>} = \cup_{r \in Z_{m,l}} (F^{<l>})_r$$
$$(F^{<l>})_p \cap (F^{<l>})_q = (\partial F^{<l>})_p \cap (\partial F^{<l>})_q$$

特に

$$Z_{m,m-1} = \left\{ i\underbrace{00\cdots0}_{m-2};\ i = 1, \cdots N-1 \right\} \cup \{0\}$$

であるから、$p = i0\cdots0 \in Z_{m,m-1}$ の時 $(F^{<m-1>})_p$, $k_\omega^{<m-1>,p}(\lambda)$ 等、を単に $F^{<m-1>,i}$ $k_\omega^{<m-1>,i}(\lambda)$ と表わすことにする。

2. Integrated Density of States の存在

<u>命題 2.1</u>　任意の $\omega \in \Omega$, n に対して以下が成立。

(1) $$0 \le k_\omega^{<n>}(\lambda) - k_{0,\omega}^{<n>}(\lambda) \le M,$$

(2) $$\sum_{i=0}^{N-1} k_{0,\omega}^{<n-1>,i}(\lambda) \le k_{0,\omega}^{<n>}(\lambda),$$

(3) $$\sum_{i=0}^{N-1} k_\omega^{<n-1>,i}(\lambda) \ge k_\omega^{<n>}(\lambda),$$

証明:　(1) 及び (2) の証明は、[7] と同様になされるので略す。以下 (3) の証明を行なう。

まず、$\tilde{\ell^2} = \oplus_{i=0}^{N-1} \ell^2(F^{<n-1>,i})$ とし、この上の双一次形式 $\tilde{\mathcal{E}}$ を以下のように定める。

$$\tilde{\mathcal{E}}(u,v) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}_\omega^{<n-1>,i}(u|_{F^{<n-1>,i}}, v|_{F^{<n-1>,i}}), \quad u,v \in \tilde{\ell^2}$$

更に、$\tilde{\ell^2}$ の内積を $<\cdot,\cdot>$ とし対応する自己共役作用素を $\tilde{H}$ で表わすことにする。即ち、

$$\tilde{\mathcal{E}}(u,v) = <\tilde{H}u, v> \quad u,v \in \tilde{\ell^2}$$

この時 $\tilde{H}$ の固有値全体は、$H^{<n-1>,0}, \cdots, H^{<n-1>,N-1}$ の固有値を（多重度まで込めて）合わせたものとなっている。従って $\tilde{H}$ の eigenvalue counting function を $\tilde{k}(\lambda)$ とすると、$\tilde{k}(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} k^{<n-1>,i}(\lambda)$。$\ell^2(F^{<n>})$ から $\tilde{\ell^2}$ への写像 ι を $\iota(u) = (u|_{F^{<n-1>,0}}, \cdots, u|_{F^{<n-1>,N-1}})$ と定めると、これは $\ell^2(F^{<n>})$ から $\tilde{\ell^2}$ への等長写像となっており同時に、$\mathcal{E}_\omega^{<n>}(u,u) = \tilde{\mathcal{E}}(\iota u, \iota u)$ が成りたつ。従って、任意の $\tilde{\phi}_1, \cdots, \tilde{\phi}_{m-1} \in \tilde{\ell^2}$ に対して $\phi_1, \cdots, \phi_{m-1} \in \ell^2(F^{<n>})$ を

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \tilde{\phi}_j(x), & x \in \cup_{i=0}^{N-1} \overset{o}{F}{}^{<n-1>,i} \\ \mu^{<n>}(\{x\})^{-1} \sum_{\{i;\, \partial F^{<n-1>,i} \ni x\}} \tilde{\phi}_j|_{F^{<n-1>,i}}(x), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定めると以下が成りたつ。

$$\begin{aligned} &\inf\{\tilde{\mathcal{E}}(u,u);\ <u,u>=1,\ <u,\tilde{\phi}_j>=0, \quad j=0,\cdots,m-1\} \\ &\le \inf\{\tilde{\mathcal{E}}(u,u);\ u \in \iota(\ell^2(F^{<n>})),\ <u,u>=1,\ <u,\tilde{\phi}_j>=0, \quad j=0,\cdots,m-1\} \\ &\le \inf\{\mathcal{E}_\omega^{<n>}(u,u);\ u \in \ell^2(F^{<n>}),\ (u,u)=1,\ (u,\phi_j)=0, \quad j=0,\cdots,m-1\} \end{aligned}$$

これより min-max principle から $\tilde{H}$ の m-番目の固有値は $H_\omega^{<n>}$ の m-番目の固有値以下であることが判る。即ち、$\tilde{k}(\lambda) \geq k_\omega^{<n>}(\lambda)$ 。 ∎

命題 2.1(2),(3) を繰返し適用することにより任意の $n > m$ について、

$$\sum_{p \in Z_{n,m}} k_{0,\omega}^{<m>,p}(\lambda) \leq k_{0,\omega}^{<n>}(\lambda) \leq k_\omega^{<n>}(\lambda) \leq \sum_{p \in Z_{n,m}} k_\omega^{<m>,p}(\lambda)$$

が成立する。しかも、大数の法則により

$$\frac{1}{N^{n-m}} \sum_{p \in Z_{n,m}} k_{\sharp,\omega}^{<m>,p}(\lambda) \longrightarrow E[k_{\sharp,\omega}^{<m>}(\lambda)] \quad \text{a.s. as } n \to \infty$$

以下添字の $\sharp$ は $k_\omega^{<m>}$, $k_{0,\omega}^{<m>}$ のどちらについても成立つことを示し、E は 確率 P による期待値を示す。これより殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に関して

$$\frac{E[k_{0,\omega}^{<m>}(\lambda)]}{N^m} \leq \varliminf_{n \to \infty} \frac{k_{\sharp,\omega}^{<n>}(\lambda)}{N^n} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \frac{k_{\sharp,\omega}^{<n>}(\lambda)}{N^n} \leq \frac{E[k_\omega^{<m>}(\lambda)]}{N^m}$$

が成立。更に命題 2.1(1) 及び、$\{\frac{E[k_{0,\omega}^{<m>}(\lambda)]}{N^m}\}$ が m に関して非減少であることから

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\mathbf{E}[k_{0,\omega}^{<m>}(\lambda)]}{N^m} = \lim_{n \to \infty} \frac{k_{\sharp,\omega}^{<n>}(\lambda)}{N^n}, \qquad \text{a.s.}$$

が判る。以上の結果をまとめて、

<u>定理 2.1</u>　$\omega \in \Omega$ に依存しない R^1 上の右側連続単調増加関数 $k(\lambda)$, $\lambda \in R^1$ が存在して以下をみたす。: 殆ど全ての $\omega \in \Omega$ に関して、

$$k(\lambda) = \lim_{m \to \infty} \frac{k_\omega^{<m>}(\lambda)}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} = \lim_{m \to \infty} \frac{k_{0,\omega}^{<m>}(\lambda)}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}$$

が $k(\lambda)$ の全ての連続点で成立する。更に、以下の不等式 (Dirichlet-Neumann bracketing) を得る。

$$\frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} E[k_{0,\omega}^{<m>}(\lambda)] \leq k(\lambda) \leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} E[k_\omega^{<m>}(\lambda)] \qquad \text{for any } m,$$

この $k(\lambda)$ を Integrated Density of States (abb. I.D.S.) とよぶ。

<u>注意</u>　特に、この場合 $k(\lambda) \nearrow 1$ as $\lambda \uparrow \infty$ が成立つ。

3. Lifschitz Tail の評価

Lifschitz tail の評価のために $V_\omega(0)$ の分布 ν に関して以下の仮定を置く。

(1) ある正定数 $\epsilon_0, \gamma, \delta$ が存在して任意の $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ に対して $\nu\{(-\infty, \epsilon)\} \geq \gamma \epsilon^\delta$ が成立。

(2) 分布 ν は原点に集中した Dirac 分布ではない。

<u>定理 3.1</u>　上の仮定の下で

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\log[-\log k(\lambda)]}{\log\lambda}=-\frac{d_s}{2}$$

証明の前に、固有値の scaling property について以下の補題を準備する。

<u>補題 3.1</u>　$H^{<m>}$ の第二固有値を $\lambda_2^{<m>}$、$H_0^{<m>}$ の第一固有値を $\lambda_{0,1}^{<m>}$ とする。

(1) 補題 1.1 での正定数 $C>0$ に対して $\lambda_2^{<m>}\geq\frac{C}{M}(\frac{1-c}{N})^m$。

(2) ある正定数 $a>0$ が存在して $\lambda_{0,1}^{<m>}\leq a(\frac{1-c}{N})^m$。

証明:　$H^{<m>}$ の第一固有値は 0 であり、しかもその固有空間は定数関数より成る。従ってその直交補空間は、$\{f\in\ell^2(F^{<m>});\int_{F^{<m>}}fd\mu^{<m>}=0\}$ である。一方、この直交補空間に属する f に関して

$$\begin{aligned}\int_{F^{<m>}}f^2d\mu^{<m>}&=\int_{F^{<m>}}\{\frac{\int_{F^{<m>}}(f(x)-f(y))\mu^{<m>}(dy)}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}\}^2\mu^{<m>}(dx)\\&\leq\max_{x,y\in F^{<m>}}\{|f(x)-f(y)|^2\}\mu^{<m>}(F^{<m>})\end{aligned}$$

が成立つから、補題 1.1 により

$$C\leq\frac{\mu^{<m>}(F^{<m>})}{(1-c)^m}\inf\{\frac{\mathcal{E}^{<m>}(f,f)}{(f,f)};\int_{F^{<m>}}fd\mu^{<m>}=0,\quad f\in\ell^2(F^{<m>})\}$$

故に、$\lambda_2^{<m>}\geq\frac{C}{M}(\frac{1-c}{N})^m$。

今、$F^{<m>}$ を Lindstrϕm の記号での $F^{(m)}(=\alpha^{-m}F^{<m>})$ と同一視する。更に、nested fractal $\mathbf{E}$ において Kusuoka [4] によって構成された $L^2(\mathbf{E};d\mu)$ ($d\mu$ は $\mathbf{E}$ 上の $\log N/\log\alpha$-次元 normalized Hausdorff measure) 上の Dirichlet form を、$(\mathcal{E},D(\mathcal{E}))$ とする。ここで $D(\mathcal{E})\subset C(\mathbf{E};R)$ に注意すると ([4]) 、先の同一視により $f(x)=0$, $x\in F$ となる任意の $f\in D(\mathcal{E})$ に対して $f|_{F^{(m)}}\in\ell_0^2(F^{<m>})$ とみなせる。この時、$\{(1-c)^{-m}\mathcal{E}^{<m>}(f|_{F^{(m)}},f|_{F^{(m)}})\}_{m\geq1}$ は単調増加で $\mathcal{E}(f,f)$ に収束する事が知られている ([4]) 。従って、

$$\lambda_{0,1}^{<m>}\leq\frac{\mathcal{E}^{<m>}(f|_{F^{(m)}},f|_{F^{(m)}})}{(f|_{F^{(m)}},f|_{F^{(m)}})}\leq(\frac{1-c}{N})^m\frac{\mathcal{E}(f,f)}{N^{-m}(f|_{F^{(m)}},f|_{F^{(m)}})}$$

更に、$F^{(m)}$ と $F^{<m>}$ の同一視のもとで $d\mu^{<m>}/(MN^m)$ は $d\mu$ に弱収束する。故に

$$(f|_{F^{(m)}},f|_{F^{(m)}})/(MN^m)\longrightarrow\int_{\mathbf{E}}f(x)^2\mu(dx)\quad\text{as }m\to\infty\text{。}$$

以上より結論を得る。∎

<u>注意</u>　expanded nested fractal においてこの関係は等号でなりたつ ([1] Corollary 3.2)。

<u>定理の証明（下からの評価）</u>　$H_{0,\omega}^{<m>}$ の第一固有値を $\lambda_{0,\omega,1}^{<m>}$ とする。更に、充分小さな正数 $\epsilon > 0$ を取り $\epsilon_m = (\frac{1-c}{N})^m \epsilon$ とする。この時、補題 3.1 より次の命題を得る：If $V_\omega(x) \le \epsilon_m$ for any $x \in F^{<m>}$, then $\lambda_{0,\omega,1}^{<m>} \le (\frac{1-c}{N})^m (a+\epsilon)$.

$\lambda \in (0, a+\epsilon)$ に対して m を

$$(\frac{1-c}{N})^m (a+\epsilon) \le \lambda < (\frac{1-c}{N})^{m-1}(a+\epsilon)$$

となるように取る。定理 2.1 及び先の命題より、

$$\begin{aligned}
k(\lambda) \ge& \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} E[k_{0,\omega}^{<m>}(\lambda)] \\
\ge& \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} \mathrm{P}(\lambda \ge \lambda_{0,\omega,1}^{<m>}) \ge \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} \mathrm{P}(\lambda_{0,\omega,1}^{<m>} \le (\frac{1-c}{N})^m (a+\epsilon)) \\
\ge& \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} \mathrm{P}(V_\omega(x) \le \epsilon_m \quad \text{for } x \in F^{<m>})
\end{aligned}$$

$V_\omega(0)$ の分布に対する仮定より、

$$\ge \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})} \{\gamma(\epsilon_m^\delta)\}^{\sharp F^{<m>}}$$

ここで以下の事実に注意する。適当な $b > 0$, $d \ge 0$ を用いて $\sharp F^{<m>} = bN^m + d$ と表わされる。又、$\mu^{<m>}(F^{<m>}) = MN^m$。更に、

$$N^{-m} \le (\frac{\lambda}{a+\epsilon})^{d_s/2} < N^{-(m-1)} \qquad (d_s = \log N^2 / \log \frac{N}{1-c})$$

これより、

$$k(\lambda) \ge \frac{N}{M} (\frac{\lambda}{a+\epsilon})^{d_s/2} \left[\gamma\{\frac{1-c}{N} \frac{\lambda\epsilon}{a+\epsilon}\}^\delta \right]^{bN(\frac{\lambda}{a+\epsilon})^{-d_s/2}+d} \qquad ∎$$

上からの評価の前に、補題 1.1 を用いて得られる以下の補題を述べておく。証明は [7] Lemmma (4.8) と同様。

<u>補題 3.2</u>　$H_\omega^{<m>}$ の第一固有値を $\lambda_{\omega,1}^{<m>}$ とする。任意の $L > 0$ に対して $\epsilon \ge \frac{C}{L}(1-c)^m$ とする時、$\int_{F^{<m>}} V_\omega(x) \mu^{<m>}(dx) \ge L$ ならば $\lambda_{\omega,1}^{<m>} \ge \frac{C}{M(1+\epsilon)}(\frac{1-c}{N})^m$。

定理の証明（上からの評価） 正定数 $\epsilon > 0$ を $h_0 = \mathrm{P}(V_\omega(0) \geq \epsilon) > 0$ となるように選ぶ。$\gamma_m = \sharp(F^{<m>})$ とする。明らかに、$\sharp\{x \in F^{<m>}; V_\omega(x) \geq \epsilon\} \geq \frac{h_0\gamma_m}{2}$ ならば $\int_{F^{<m>}} V_\omega(y)\mu^{<m>}(dy) \geq \epsilon h_0\gamma_m/2$。以下、$n$ を固定し $\epsilon_n = \frac{2C}{\epsilon h_0\gamma_n}(1-c)^n$ 、$m \geq n$ に対して $L_m = \epsilon h_0\gamma_m/2$ とする。$\lambda \in (0, (\frac{1-c}{N})^n\frac{C}{M(1+\epsilon_n)})$ に対して $m \geq n$ を

$$(\frac{1-c}{N})^{m+1}\frac{C}{M(1+\epsilon_n)} \leq \lambda < (\frac{1-c}{N})^m\frac{C}{M(1+\epsilon_n)}$$

となるように選ぶ。補題 3.1 により、この時 λ は $H_\omega^{<m>}$ の第二固有値よりも小さくなっていることが判る。従って、定理 2.1 及び 補題 3.2 とから

$$\begin{aligned}
k(\lambda) &\leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}E[k_\omega^{<m>}(\lambda)] = \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}\mathrm{P}(\lambda_{\omega,1}^{<m>} \leq \lambda) \\
&\leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}\mathrm{P}(\lambda_{\omega,1}^{<m>} < (\frac{1-c}{N})^m\frac{C}{M(1+\epsilon_n)}) \\
&\leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}\mathrm{P}(\int_{F^{<m>}} V_\omega(x)\mu^{<m>}(dx) < L_m) \\
&\leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}\mathrm{P}(\sharp\{x \in F^{<m>}; V_\omega(x) \geq \epsilon\} < \frac{h_0\gamma_m}{2})
\end{aligned}$$

ここで、$h_\omega(x) = 1$ (if $V_\omega(x) \geq \epsilon$), $= 0$ (if $V_\omega(x) < \epsilon$) とすると、

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}\mathrm{P}(\sum_{x \in F^{<m>}} h_\omega(x) < \frac{h_0\gamma_m}{2}) \\
&\leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}E[\exp[y\sum_{x \in F^{<m>}}(\frac{h_0}{2} - h_\omega(x))]] \\
&= \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}e^{-\frac{h_0}{2}\gamma_m y}\exp[\gamma_m F(y)]
\end{aligned}$$

最後の式で、$F(y) = \log E[\exp[-y(h_\omega(0) - h_0)]]$ $(y > 0)$ とした。$E[h_\omega(0)] = h_0$ に注意すると、$F(0) = F'(0) = 0$, $F''(y) \leq \frac{1}{4}$。 従って、$F(y) \leq \frac{1}{8}y^2$ を得る。よって、

$$k(\lambda) \leq \frac{1}{\mu^{<m>}(F^{<m>})}e^{-\frac{h_0}{2}\gamma_m y}\exp[\gamma_m\frac{1}{8}y^2]$$

$y = 2h_0$ とすると、下からの評価と同様にして、

$$k(\lambda) \leq \frac{N}{M}(\frac{M(1+\epsilon_n)}{C}\lambda)^{d_s/2}\exp[-\frac{1}{2}h_0^2\{\frac{b}{N}(\frac{M(1+\epsilon_n)}{C}\lambda)^{-d_s/2} + d\}] \quad \blacksquare$$

References

1. M. Fukushima, *Dirichlet forms, diffusion processes and spectral dimensions for nested fractals*, in "Ideas and Methods in Mathematical Analysis, Stochastics, and Applications, In Memory of R. Hφegh-Krohn, vol. 1," (Albeverio, Fenstad, Holden and Lindstrφm, eds.), Cambridge Univ. Press (to appear).
2. M. Fukushima, S. Nakao and S. Kotani, "*Random spectrum*," Seminar on Probability, Vol. 45, 1977. In Japanese.
3. W. Kirsch and F. Martinelli, *Large deviations and Lifschitz singularity of the integrated density of states of random Hamiltonians*, Commun. Math. Phys. **89** (1983), 27–40.
4. S. Kusuoka, *Lecture on Diffusion Processes on Nested Fractals.* to appear in Springer Lect. Notes in Math.
5. T. Lindstrφm, *Brownian motion on nested fractals*, Mem. Amer. Math. Soc., 420 (1990).
6. K. Piertruska-Paluba, *The lifschitz singularity for the density of states on the Sierpinski gasket*, Probab. Th. Fields 89 (1991), 1–33.
7. T. Shima, *Lifschitz Tails for Random Schrödinger Operators on Nested fractals.* Preprint.
8. B. Simon, *Lifschitz Tails for tha Anderson Model*, J. Stat. Phys. **38** (1985), 65–76.