数理解析研究所講究録
第 783 巻 1992 年 143-156

Abel 平均から作られる Littlewood-Paley の g-関数と Gauss-Weierstrass 平均から作られるものとの間の補間.

東北大教養 金子 誠 (Makoto Kaneko)

序. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とし、その Abel 平均

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

から作られる平方関数

$$g(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

が、通常 Littlewood-Paley の g-関数と呼ばれている。
Abel 平均を Gauss-Weierstrass 平均

$$w(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi$$

で置きかえて作られる平方関数

$$G(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

も重要である(Calderón-Torchinski[ ]). ここで、$\mathbb{R}^n$の点をゴチックであらわし、$\hat{f}$はfのFourier変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

である. この二つの平方関数の間には

$$g(f)(x) \leqq C\, G(f)(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

という、点ごとの関係がある(Kaneko-Sunouchi[ ]).

この$g(f)(x)$と$G(f)(x)$との間を補間するような平方関数を考えるのが本稿の目的である。

1. <u>$g(f)(x)$と$G(f)(x)$との間の補間.</u> 上半空間$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ t>0\}$でのPoisson核$P_t(x)$は

$$P_t(x) = t^{-n} P(t^{-1}x), \quad P(x) = c_n \left(1+|x|^2\right)^{-(n+1)/2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

で与えられる．そして、

$$g(f)(x) = \left\{ \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t}(P_t * f)(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}.$$

一方、

$$W(x) = e^{-\pi|x|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

とすれば、$w(x,t) = (W_{2\sqrt{\pi t}} * f)(x)$ である。こゝで、$W_s(x) = s^{-n} W(s^{-1}x)$．平方関数を作る $(0,\infty)$ 上の測度 dt/t は拡大不変であり、

$$G(f)(x) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left| t \frac{\partial}{\partial t}(W_t * f)(x) \right|^2 \frac{dt}{t} \right\}^{1/2}$$

となる．そこで、次のような関数 K^m を導入する([ ])。

$$K^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{m+1}} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^n e^{-t^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi|x|t) \frac{dt}{t}$$

こゝで、$V_\nu(z)=J_\nu(z)/z^\nu$ であり、J_ν は Bessel 関数である。
そして、

$$(1.1)\quad g_{K^m}(f)(x)=\left[\int_0^\infty \left|t\frac{\partial}{\partial t}\{(K^m)_t*f\}(x)\right|^2\frac{dt}{t}\right]^{1/2}$$

とおく。容易に

$$g(f)(x)=g_{K^0}(f)(x),\qquad G(f)(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,g_{K^1}(f)(x)$$

がわかる。そして次の結果が得られる。

<u>Proposition 1</u>　　$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、各点 x で

$$g(f)(x)\leqq C_{m_1}g_{K^{m_1}}(f)(x)\leqq C'_{m_1,m_2}g_{K^{m_2}}(f)(x)\leqq C''_{m_2}G(f)(x)$$

となるような定数 C_{m_1}, C'_{m_1,m_2}, C''_{m_2} が存在する。こゝで、
$0\leqq m_1<m_2\leqq 1$. $C_{m_1}, C'_{m_1,m_2}, C''_{m_2}$ は n, m_1, m_2 で定まる.

P と W の間の補間として、t-分布の確率密度関数を考えるのも自然なことのように思われる。

$$T^{\nu}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{|x|^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}$$

とおけば、 $T^{n}(x) = c_n' P_{\sqrt{n}}(x)$ であり、 $\lim_{\nu\to\infty} T^{\nu}(x) = c_1 W\left(\frac{x}{c_2}\right).$
この T^{ν} を用いて

$$g_{T^{\nu}}(f)(x) = \left[\int_0^{\infty} \left| t\frac{\partial}{\partial t}\{(T^{\nu})_t * f\}(x)\right|^2 \frac{dt}{t}\right]^{1/2}$$

とおく。すると次のような関係がわかる。

<u>Proposition 2</u>　　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とすれば、

$n \leqq \nu < \infty, \quad 0 < m \leqq 1$

に対して、すべての点 x において

$$g(f)(x) \leqq C_{\nu}\, g_{T^{\nu}}(f)(x) \leqq C'_{\nu,m}\, g_{K^m}(f)(x) \leqq C''_{\nu,m}\, G(f)(x)$$

となる、n, ν, m で定まる定数 C_{ν}, $C'_{\nu,m}$, $C''_{\nu,m}$ が存在する。

$P_t(x)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_+$ での Laplace の方程式に関係しており、$W_{2\sqrt{\pi t}}(x)$ は熱方程式と関係している。$K^{m,\delta}(x)$ を

$$K^{m,\delta}(x)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-e^{i\delta}|\xi|^{m+1}} e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

で定義すれば、$K^{0,0}(x)=P_{\sqrt{2\pi}}(x)$, $K^{1,0}(x)=W_{\sqrt{2\pi}}(x)$ であり、$K^{0,\pi/2}(x)$（または $K^{0,-\pi/2}(x)$）は波動方程式 $\partial^2 u/\partial t^2=\Delta_x u$ の解である。$K^{m,\delta}$ を K^m のかわりに用いて (1.1) で定義される平方関数 $g_{K^{m,\delta}}(f)(x)$ を考えるのも自然かとも思う。$g_{K^{m,\delta}}(f)(x)$ と先に導入されている平方関数の間の関係は Prop. 1, 2 のような形のものは得られない。これについては最後の節で触れる。

2. <u>Proposition 1 の証明</u>　$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $x\in\mathbb{R}^n$ を固定し、$0\leqq m\leqq 1$ を考える。

$$\theta(t)=\theta(t;x,f)=\int_{S^{n-1}} -t y'\cdot\nabla f(x-ty')\,d\sigma(y'),$$

$$\Theta(x)=\Theta(x;x,f)=\theta(e^x;x,f)$$

とおく。こゝで、$x\in(-\infty,\infty)$, $t>0$, $\nabla f=(\partial f/\partial x_1,\cdots,\partial f/\partial x_n)$ であり、$d\sigma$ は $\mathbb{R}^n$ での単位球面の面積要素である。さらに、

$$\kappa^m(x)=e^{-nx}k^m(e^{-x}),$$

$$k^m(s) = (2\pi)^{n/2}\int_0^\infty t^n e^{-t^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi st)\frac{dt}{t}$$

とおく。すると、$K^m(x) = k^m(|x|)$ であり、

$$\{(K^m)_t * f\}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^m(y) f(x-ty)\,dy$$

$$= \int_0^\infty s^n k^m(s)\frac{ds}{s}\int_{S^{n-1}} f(x-tsy')\,d\sigma(y')$$

となる。従って、

$$t\frac{\partial}{\partial t}\{(K^m)_t * f\}(x) = \int_0^\infty \theta(ts)\cdot s^n k^m(s)\frac{ds}{s}$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \theta(e^{x-y}) e^{-ny} k^m(e^{-y})\,dy$$

$$= (\Theta * \mathcal{K}^m)(x) \qquad (t = e^x) \quad .$$

従って、

(2.1) $$\{g_{K^m}(f)(x)\}^2 = \int_{-\infty}^\infty |(\mathcal{K}^m * \Theta)(x)|^2\,dx$$

$$= \sup_{A\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \|A\|_2\le 1}\left|\int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}^m(y)(\check{\Theta} * A)(y)\,dy\right| .$$

ここで、$\check{\Theta}(x)=\Theta(-x)$. そこで、$A\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ を一つとり、

$$(2.2)\qquad F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{zy}k^{m}(y)(\check{\Theta}*A)(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{zy}k^{m}(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Theta}(-\xi)\hat{A}(\xi)e^{2\pi iy\xi}\,d\xi$$

とおく。$k^{m}(s)$ の定義より、

$$|k^{m}(s)|\leqq C\quad(0<s\leqq 1),\quad\leqq Cs^{-1}\quad(1\leqq s<\infty)$$

がわかる. $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ としているから、$\forall N>0$ に対して

$$|\theta(t)|\leqq Ct^{2}\quad(0\leqq t\leqq 1),\quad\leqq Ct^{-N}\quad(1\leqq t<\infty)$$

が得られる。$A\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ であるから

$$(|\check{\Theta}|*|A|)(y)\leqq Ce^{-2y}\quad(y>0),\quad\leqq Ce^{Ny}\quad(y<0).$$

これらのことより、

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|)^{\eta|y|}|\varkappa^m(y)|\left(|\check{\Theta}|*|A|\right)(y)\,dy<\infty \quad (\eta<n+2),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{zy}\varkappa^m(y)\,\hat{\Theta}(-\xi)\hat{A}(\xi)\,e^{2\pi i y\xi}\right|dy\,d\xi<\infty$$

$$(n-1<\mathrm{Re.}\,z<n)$$

がわかる。上のことから (2.2) で定義される F は複素 z-平面の $-(n+2)<\mathrm{Re.}\,z<n+2$ で解析的であることがわかる。そして、(2.2) における累次積分の順序交換が許されて

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Theta}(-\xi)\hat{A}(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa^m(y)\,e^{(z+2\pi i\xi)y}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{k^m}(n-z-2\pi i\xi)\,\hat{\Theta}(-\xi)\hat{A}(\xi)\,d\xi$$

$$(n-1<\mathrm{Re.}\,z<n)$$

となる。こゝで

$$\widehat{k^m}(z)=\int_0^{\infty}t^z k^m(t)\frac{dt}{t}.$$

$0<\mathrm{Re.}\,z<\frac{m+1}{2}$ なる z に対して $\widehat{k^m}(z)$ は次のように計算できる。

$$\hat{\overset{m}{k}}(z) = (2\pi)^{n/2}\int_0^\infty t^z \frac{dt}{t}\int_0^\infty s^n e^{-s^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi ts)\frac{ds}{s}$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}-z}\int_0^\infty s^{n-z} e^{-s^{m+1}}\frac{ds}{s}\int_0^\infty u^z V_{\frac{n}{2}-1}(u)\frac{du}{u}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}-z}\Gamma(\frac{z}{2})}{(m+1)2^{\frac{n}{2}-z}\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{z}{2})}\int_0^\infty v^{\frac{n-z}{m+1}} e^{-v}\frac{dv}{v}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}-z}}{m+1}\,\frac{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{n-z}{m+1})}{\Gamma(\frac{n-z}{2})}$$

ここで三番目の等号の所では Weber の公式 ([, p.391, (1)]) を用いている。 $n-1<\mathrm{Re}\,z<n$ であれば、 $0<\mathrm{Re}(n-z-2\pi i\xi)<1\leqq(n+1)/2$ であるから、

$$F(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\pi^{-\frac{n}{2}+z+2\pi i\xi}}{m+1}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{z}{2}-i\pi\xi)\Gamma(\frac{z+i2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(\frac{z}{2}+i\pi\xi)}\hat{\textcircled{A}}(-\xi)\hat{A}(\xi)d\xi$$

$$(n-1<\mathrm{Re}\,z<n)$$

が成立することがわかる。ところが右辺は $-(m+1)<\mathrm{Re}\,z<n$ で解析的であり、 $F(z)$ は $-(n+2)<\mathrm{Re}\,z<n+2$ で解析的であったから、上の等式は $-(m+1)<\mathrm{Re}\,z<n$ で成立することになる。特に $z=0$ で成立する。従って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^m(y)(\check{\Theta}*A)(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^{-\frac{n}{2}+2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-i\pi\xi)\Gamma(i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(i\pi\xi)} \hat{\Theta}(-\xi)\hat{A}(\xi)\,d\xi$$

を得る。$A\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ の任意性から

$$\{g_{Km}(f)(x)\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi\xi)\Gamma(-i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi\xi)} \hat{\Theta}(\xi) \right|^2 d\xi$$

が得られる。Γ-関数が零点を持たないことゝ、Stirling の公式とより、

$$(2.3)\quad \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}+2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi\xi)\Gamma(-i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi\xi)} \right| \approx (1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\pi^2\frac{|\xi|}{m+1}}$$

という評価が得られる。こゝで、ξ の関数 $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ が $\psi_1(\xi)\approx\psi_2(\xi)$ であるとは、$C\psi_1(\xi)\leqq\psi_2(\xi)\leqq C'\psi_1(\xi)$ $(-\infty<\xi<\infty)$ となる正定数 C, C' が存在することゝする。以上のことから Proposition 1 の結論が得られる。

3. Proposition 2 の証明　$c_\nu=\Gamma(\frac{\nu+1}{2})/\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})$ とし、

$$\tau^\nu(x) = c_\nu\left(1+\frac{e^{-2x}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-nx}$$

とおけば、前節の（2.1）と同様に

$$\{g_{T^\nu}(f)(x)\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |(\tau^\nu * (f))(x)|^2 dx$$

が得られる。そして、この場合、$\nu > n-1$ なる ν に対しては $\hat{\tau}^\nu(\xi)$ が次のように直接計算ができる。

$$\begin{aligned}\hat{\tau}^\nu(\xi) &= c_\nu \int_0^\infty \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} t^{n+2\pi i\xi} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\nu^{\frac{n-1}{2}}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \nu^{i\pi|\xi|} \Gamma\left(\frac{n}{2}+i\pi\xi\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-n}{2}-i\pi\xi\right) \\ &\approx (1+|\xi|)^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\pi^2|\xi|}\end{aligned}$$

そして、最後の評価と（2.3）とより、Proposition 2 の結論が得られる。

4. $K^{m,\delta}$ から作られる g-関数　(1.1) において K^m を $K^{m,\delta}$ で置き換えて作られる平方関数を $g_{K^{m,\delta}}(f)(x)$ とおく。$k^m(s)$ のかわりに、

$$k^{m,\delta}(s) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^n e^{-e^{i\delta} s^{m+1}} V_{\frac{n}{2}-1}(2\pi s t) \frac{ds}{s}$$

を考え、$\hat{k}^{m}(z)$ の計算を辿れば

$$\hat{k}^{m,\delta}(z) = \int_0^{\infty} t^{z} k^{m,\delta}(t) \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-z}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{n-z}{m+1})}{\Gamma(\frac{n-z}{2})} e^{-i\delta z}$$

$$\left(m > -1,\ -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \mathrm{Re}\, z < \frac{n+1}{2} \right)$$

が得られる。そして、2節と同様の解析接続を考えて、上の z が $n+2\pi i\xi$ のときが問題となり、

$$\left\{ g_{K^{m,\delta}}(f)(x) \right\}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi\xi)\Gamma(-i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi\xi)} e^{-i\delta(n+2\pi i\xi)} \times \hat{\Theta}(\xi) \right|^2 d\xi,$$

$$\left| \frac{\pi^{-\frac{n}{2}-2\pi i\xi}}{m+1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+i\pi\xi)\Gamma(-i\frac{2\pi\xi}{m+1})}{\Gamma(-i\pi\xi)} e^{-i\delta(n+2\pi\xi)} \right|$$

$$\approx (1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\pi^2\frac{|\xi|}{m+1}} e^{2\pi\delta\xi}$$

となる。$e^{2\pi\delta\xi}$ が掛り、(2.3) と比較ができない。

参考文献

[1] A. P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Adv. in Math., 16 (1975), 1-64.

[2] B. I. Golubov, On the summability method of Abel-Poisson type for multiple Fourier integrals, Math. USSR-Sb., 36 (1980), 213-229.

[3] M. Kaneko and G. Sunouchi, On the Littlewood-Paley and Marcinkiewicz functions in higher dimensions, Tôhoku Math. J., 37 (1985), 343-365.

[4] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1966.