数理解析研究所講究録
第 783 巻 1992 年 166-175

On the almost sure convergense of the quadratic variation of the Brownian motion

富山大学理学部　　保坂しのぶ　(Shinobu Hosaka)

1　はじめに

Brownian motion に対する quadratic variation の概収束性についての主な結果をいくつか紹介する.　$W = (W_t)_{0\leq t\leq 1}$ を 1 次元の Brownian motion, $\pi_n \equiv \left\{t_0^n, t_1^n, \cdots, t_{k_n}^n\right\}$ を $[0,1]$ の分割とし,

$$
\begin{aligned}
Q(\pi_n) &\equiv \sum_{i=1}^{k_n}\left(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}\right)^2 \\
d(\pi_n) &\equiv \max\left\{t_i^n - t_{i-1}^n \quad : i = 1, 2, \cdots, k_n\right\}
\end{aligned}
$$

とおく.　このとき,

問題:　$n \to \infty$ のとき　$Q(\pi_n)$ は 1 に概収束するか？

これについて, 次の結果はよく知られている.

定理 1 (P.Lévy (1940))

$$
\begin{aligned}
&\pi_n \subset \pi_{n+1} \quad , \quad d(\pi_n) \to 0 \quad (n \to \infty) \\
&\Longrightarrow \quad Q(\pi_n) \to 1 \quad a.s. \quad (n \to \infty) \quad .
\end{aligned}
$$

これは, $[0,1]$ の分割が文字どおり細分化になっている場合である. それでは, 分割がこのように細分化になっていない場合, つまり $\pi_n \not\subset \pi_{n+1}$ のときはどのようなことがいえるであろうか. 不思議なことに, この場合は必ずしも 1 に概収束しない. 従って, 概収束をするためには何らかの条件が必要となる.

2 $d(\pi_n)$ の order と $Q(\pi_n)$

結果を発表順に従って，まず述べておく.

定理 2 (F.Kozin (1957))

$$d(\pi_n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Q(\pi_n) = 1 \quad a.s.$$

定理 3 (R.M.Dudley (1973))

$$d(\pi_n) = o\left(\frac{1}{\log n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Q(\pi_n) = 1 \quad a.s.$$

定理３は定理２の改良になっている.

定理 4 (W.Fernandez (1974)) 次を満たすような分割の系列 π_n が存在する：

$$d(\pi_n) = O\left(\frac{1}{\log n}\right) \quad ,$$

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} Q(\pi_n) > 1\right) = 1 \quad .$$

定理 5 (A.Wróbel (1982)) 任意の $C>0$ に対して，次を満たすような分割の系列 π_n が存在する：

$$d(\pi_n) = o\left(\log^{-\alpha} n\right) \quad for\ 0 < \forall\alpha < 1 \quad ,$$

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} Q(\pi_n) > c\right) = 1 \quad .$$

$o\left(\log^{-\alpha} n\right)$ よりも $O\left(\frac{1}{\log n}\right)$ の方が条件としては強い．従って，定理４の条件の $d(\pi_n)$ の order を少しゆるめると，より強い結果である定理５が得られることがわかる.

本稿では，定理３と定理５の証明を紹介する.

3　定理3の証明

まず次の補題を要する.

補題 1 (D.L.Hanson - F.T.Wright (1971)) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を独立な確率変数で, 分布は $N(0,1)$ とし, $Y \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2$ とおく. ここで a_i は定数. このとき次を満たすような定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在する:

任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$P(|Y-1| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\alpha}.$$

$$\text{ここで,}\quad \alpha \equiv \min\left\{\frac{c_1\varepsilon}{\max|a_i|}, \frac{c_2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right\}.$$

講演の際に, この補題の中の定数 a_i について, 条件が必要ではないかと指摘を受けた. しかし, Hanson - Wright の結果は, 特に条件はなくて成立する.

この結果を用いて定理3の証明をする.

$\pi \equiv \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ を $[0,1]$ の分割とし,

$$\begin{aligned} A_i &\equiv [t_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \\ a_i &\equiv \mu(A_i) \qquad (\, \mu \text{ は Lebesgue measure }), \\ X_i &\equiv \frac{1}{\sqrt{a_i}} \int_0^1 I_{A_i}(t)\, dW_t \end{aligned}$$

とおく. このとき, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立でかつ $N(0,1)$ に従う. また, $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2 = Q(\pi)$ である. 従って補題1より, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Q(\pi) - 1| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\min\left\{\frac{c_1\varepsilon}{d(\pi)}, \frac{c_2\varepsilon^2}{d(\pi)}\right\}\right).$$

従って, $\varepsilon_k \downarrow 0$ に対して,

$$\sum_k P(|Q(\pi_k) - 1| \geq \varepsilon_k) < \infty \tag{1}$$

を示せば十分である．そこで，$\varepsilon_k \equiv \sqrt{\frac{2}{c_2} d(\pi_k) \log k}$ とおくと，定理３の仮定より $\varepsilon_k \downarrow 0 \quad (k \to \infty)$．　従って，

$$
\begin{aligned}
P\left(|Q(\pi_k) - 1| \geq \varepsilon_k\right) &\leq 2e^{-2\log k} \\
&= \frac{2}{k^2} \qquad \text{for sufficient large } k\ .
\end{aligned}
$$

よって，(1) が成立する．

4　定理５の証明

まず定義を１つ与える．

定義 1　$c > 0, \quad \omega \in \Omega,$

$$
[a,b] \ \textit{has} \ \omega \ \textit{-weight} \ c \ \textit{if} \ (\ W_a(\omega) - W_b(\omega))^2 \geq 2c(b-a).
$$

注意：　ω-weight c をもつ確率は区間によらない．実際に，

$$
\begin{aligned}
P(\omega :\ [a,b] \text{ has } \omega\text{-weight } c) &= P\big(\omega : (\ W_a(\omega) - W_b(\omega))^2 \geq 2c(b-a)\big) \\
&= P\left(\omega : \left(\frac{W_b(\omega) - W_a(\omega)}{\sqrt{b-a}}\right)^2 \geq 2c\right) \\
&= 2\int_{\sqrt{2c}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}
$$

そこで，$p \equiv P(\omega : [a,b] \text{ has } \omega\text{-weight } c)$ とおく．明らかに，$0 < p < 1$ である．

定理５の証明に入る．
$c > 0$ を 固定し，　$m \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ は自然数全体)，　$\varepsilon > 0$ とする．

4.1　(m, ε) - set S の構成

ここでは，

$$
\forall \pi \in S, \quad d(\pi) \leq \frac{1}{m} \quad ,
$$

$$P\,(\omega : \exists\pi \in S; Q(\pi)(\omega) \geq c) \geq 1 - \varepsilon$$

を満たす分割の集合 (m,ε) - set S を構成する．

$\mathbf{N} \ni n, M, j \quad (j \leq M-1)$ に対し，次を定義する．

$$\begin{aligned} J\,(n, [a,b]) &\equiv [a,b] \text{ を } n \text{ 等分した小区間の全体} \\ A(n,j,M,\omega) &\equiv \left\{ I : I \in J\left(n, \left[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}\right]\right), \quad I \text{ has } \omega\text{-weight } c \right\} \end{aligned}$$

まず，m_1 を次を満たすように十分大きくとる：

$$P\left(\omega : \sharp A\,(m_1, j, m, \omega) \geq \frac{m_1 p}{2} \quad \text{for } 0 \leq \forall j \leq m-1\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N} \tag{2}$$

注意： $q(n) \equiv \sum_{k<\frac{np}{2}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ とおくと，(2) の左辺は $(1-q(m_1))^m$ である．$n \to \infty$ のとき，$q(n) \to 0$ なので，m_1 を大きくとれる．

そして，m_{i+1} を次を満たすように十分大きくとる：

$$P\left(\omega : \sharp A\,(m_{i+1}, j, M_i, \omega) \geq \frac{m_{i+1} p}{2} \quad \text{for } 0 \leq \forall j \leq M_i - 1\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N} \tag{3}$$

ただし，$M_i \equiv m m_1 \cdots m_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$ とする．

このようにして，$m_1, m_2, \cdots, m_N$ をとる．

ここで，次のような集合を考える．($[\cdot]$ はガウス記号)

$$\begin{aligned} B_1(\omega) &\equiv A\,(m_1, j, m, \omega) \text{ に属する } [\frac{m_1 p}{2}] \text{ 個の区間} \\ &\quad\ (j = 0, 1, \cdots, m-1) \text{ の全体} \\ B_{i+1}(\omega) &\equiv \bigcup_{k=1}^{i} B_k(\omega) \text{ の区間を除いた残りの部分で，} A\,(m_{i+1}, j, M_i, \omega) \\ &\quad\ \text{に属する } [\frac{m_{i+1} p}{2}] \text{ 個の区間 } (j = 0, 1, \cdots, M_i - 1) \text{ の全体} \\ \pi(\omega) &\equiv \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} B_i(\omega) \text{ の区間の端点} \right\} \cup \left\{ \frac{j}{m} : j = 0, 1, \cdots, m \right\} \end{aligned}$$

とする．このとき，次のことがいえる．

(a)　$d(\pi(\omega)) \leq \frac{1}{m}$

(b)　$P(Q(\pi(\omega)) > c) \geq 1 - \varepsilon$

(a) は $\pi(\omega)$ のつくり方より明らかなので，(b) について示す．

$$E_i \equiv \left\{ \omega : \sharp A(m_i, j, M_{i-1}, \omega) \geq \frac{m_i p}{2} \quad \text{for } 0 \leq \forall j \leq M_{i-1} - 1 \right\}$$

とおく $(i = 1, 2, \cdots, N.$　ただし，$M_0 = m)$．

$P(E_i) \geq 1 - \dfrac{\varepsilon}{N}$ より，$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} E_i\right) \geq 1 - \varepsilon$ である．従って，

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^{N} E_i \quad \Longrightarrow \quad Q(\pi(\omega)) > c$$

を示せばよい．ところで，

$$Q(\pi(\omega)) = \sum_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \geq 2c{\sum_i}'(t_i - t_{i-1}) \quad .$$

ここで，Σ' は，ω -weight c をもつ区間についてのみ和をとるものとする．そこで，l_i を $B_i(\omega)$ に属する区間の長さの和とすると，

$$l_1 = \frac{1}{M_1}\left[\frac{m_1 P}{2}\right] m$$

より，

$$\frac{p}{2} \geq l_1 \geq \frac{p}{2} - \frac{1}{m_1} \equiv \frac{p}{2} + r_1(m_1) \quad .$$

計算をつづけると，

$$\begin{aligned}
l_2 &= (1 - l_1)\frac{1}{m_2}\left[\frac{m_2 P}{2}\right] \\
&\geq \left(1 - \frac{p}{2}\right)\frac{1}{m_2}\left(\frac{m_2 p}{2} - 1\right) \\
&= \frac{p}{2}\left(1 - \frac{p}{2}\right) - \frac{1}{m_1}\left(1 - \frac{p}{2}\right) \equiv \frac{p}{2}\left(1 - \frac{p}{2}\right) + r_2(m_1, m_2) \\
&\cdots \\
l_i &\geq \frac{p}{2}\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{i-1} + r_i(m_1, m_2, \cdots, m_i) \quad .
\end{aligned}$$

従って，$r(m_1, m_2, \cdots, m_N) \equiv \sum_{i=1}^{N} r_i(m_1, m_2, \cdots, m_i)$ とすると，

$$\begin{aligned} Q(\pi(\omega)) &\geq 2c\sum_{i=1}^{N} l_i \\ &\geq 2c\sum_{i=1}^{N} \frac{p}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right)^{i-1} + 2cr(m_1, m_2, \cdots, m_N) \\ &= 2c\frac{p}{2}\frac{1-\left(1-\frac{p}{2}\right)^N}{\frac{p}{2}} + 2cr(m_1, m_2, \cdots, m_N) \\ &\geq c + 2cr(m_1, m_2, \cdots, m_N) \quad . \end{aligned}$$

$m_1, m_2, \cdots, m_N$ は十分大きくとるので，$r(m_1, m_2, \cdots, m_N)$ は小さくできる．よって，

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^{N} E_i \quad \Longrightarrow \quad Q(\pi(\omega)) > c \quad .$$

以上より，(a), (b) が成立するので，(m, ε) -set が構成できた．

4.2 (π_n) の構成

$p \equiv P(\omega : [a, b] \text{ has } \omega\text{-weight } c)$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，$\left(1-\dfrac{p}{2}\right)^N \leq \dfrac{1}{2}$ をみたす．このような N をとって固定し，$\varepsilon(j) \equiv \dfrac{N}{j^2}(j \in \mathbf{N})$ とおく．この $j, \varepsilon(j)$ に対し，$(j, \varepsilon(j))$ - set を考える．

$$k_j \equiv \min\{\sharp S : \ S \text{ is } (j, \varepsilon(j)) \text{ - set}\}$$

と k_j をおく．そして，S_j を $\sharp S_j = k_j$ となる $(j, \varepsilon(j))$ - set とし，その S_j の要素を並べて (π_n) とする．つまり，

$$(\pi_n) : \underbrace{\pi_1, \cdots, \pi_{k_1}}_{S_1 \text{ の要素}}, \underbrace{\pi_{k_1+1}, \cdots, \pi_{k_1+k_2}}_{S_2 \text{ の要素}}, \pi_{k_1+k_2+1}, \cdots$$

4.3 $d(\pi_n) = o\left(\log^{-\alpha} n\right)$ for $0 < \forall\alpha < 1$ について

まず，n を十分大きいとすると，次をみたす $r > 0$ が存在する：

$$q(n) \equiv \sum_{k<\frac{np}{2}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq e^{-\frac{n}{r}} \quad .$$

そして，$\eta \equiv \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{m}}$ として，

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv -\left[r \log(1-\eta)\right] & (4) \\ m_{i+1} &\equiv -\left[r \log\left(1 - \eta^{\frac{m}{M_i}}\right)\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1) & (5) \end{aligned}$$

とおくと，(2), (3) を満たす．実際，(2) は，$P(E_1) = (1 - q(m_1))^m$，(3) は，$P(\ E_{i+1}) = (1 - q(m_{i+1}))^{M_i}$ であるので，代入して計算する．

このとき，

$$M_N = m m_1 \cdots m_N \leq \beta m m_1^N \quad \text{for some } \beta > 1 \quad .$$

これより，

$$k_m \leq 2^{M_N} \leq a^{m(\log m)^N} \quad \text{for some constant } a \quad . \qquad (6)$$

実際に，これを示すために次の不等式を用いる．

$0 < \forall\gamma < 1$ fixed ,

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{m}} \geq \frac{\gamma}{m^3} \quad .$$

これを用いると，

$$\begin{aligned} 1 - \eta(m) &= 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon(m)}{N}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &\geq \frac{\gamma}{m^3} \quad . \end{aligned}$$

(4) にこれを代入してまとめると，

$$m_1 \leq C_1 \log m \quad \text{for some constant } C_1 \quad .$$

従って，

$$
\begin{aligned}
2^{M_N} &\le 2^{\beta m m_1^N} \\
&\le 2^{\beta C m(\log m)^N} \quad \text{for some constant } C
\end{aligned}
$$

となり，(6) を得る．従って，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} k_j &\le m k_m \\
&\le m a^{m(\log m)^N} \\
&\le b^{m(\log m)^N} \quad \text{for some constant } b > a \; .
\end{aligned}
$$

示したいことは，$0 < \forall\alpha < 1$ に対して，$d(\pi_n) = o\left(\log^{-\alpha} n\right)$ である．このとき，$\alpha < \dfrac{1}{1+\delta}$ となるような $\delta(>0)$ が存在する．そして，

$$
\begin{aligned}
m(n) &\equiv \max\left\{m : b^{m(\log m)^N} < n\right\} \\
\overline{m}(n) &\equiv \max\left\{m : b^{m^{1+\delta}} < n\right\}
\end{aligned}
$$

とおくと，十分大きな n に対して，

$$
m(n) > \overline{m}(n)
$$

である．このとき，$1 \le \forall j \le m(n)$ に対し，$\pi_n \notin S_j$ ．実際に，n を固定すると，$\pi_n \in S_{j_0}$ となる $j_0 \in \mathbf{N}$ が存在する．このとき，

$$
n \le \sum_{j=1}^{j_0} k_j \le b^{j_0(\log j_0)^N}
$$

となるので，$j_0 > m(n)$ である．従って，

$$
\begin{aligned}
d(\pi_n) &\le \frac{1}{m(n)+1} \\
&\le \frac{1}{\overline{m}(n)+1} \\
&\le (\log_b n)^{-\frac{1}{1+\delta}}
\end{aligned}
$$

より，$d(\pi_n) = o\left(\log^{-\alpha} n\right)$ を得る．

4.4 $P\left(\limsup_{n\to\infty} Q(\pi_n) > c\right) = 1$ について

4.1 の (m,ε) - set の構成よりすぐに示すことができる．実際に，

$$P\left(\omega : \exists\pi^{(j)} \in S_j; Q\left(\pi^{(j)}\right)(\omega) > c\right) \geq 1 - \varepsilon(j).$$

このとき，complement をとることにより，

$$P\left(\omega : \forall\pi^{(j)} \in S_j, Q\left(\pi^{(j)}\right)(\omega) \leq c\right) < \varepsilon(j) = \frac{N}{j^2}.$$

最後に，j について両辺の和をとると右辺は収束するので，Borel-Cantelli's lemma より結果を得る．

以上で，定理 5 が証明された．

参考文献

[1] R.M.Dudley. *Sample functions of the Gaussian process*, Ann. Probab. 1 (1973), 66-103.

[2] W.Fernandez. *On almost sure convergence of quadratic Brownian variation*, Ann. Probab. 2 (1974), 551-552.

[3] D.L.Hanson-F.T.Wright. *A bound on tail probabilities for quadratic forms in independent random variables*, Ann. Math. Statist. 42 (1971), 1079-1083.

[4] F.Kozin. *A limit theorem for processes with stationary independent increments*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 960-963.

[5] P.Lévy. *Le mouvement brownien plan*, Amer. J. Math. 62 (1940), 487-550.

[6] A.Wróbel. *On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion*, Probab. Math. Statist. 3 (1982), 97-101.