

## 自由位相群の単位元の近傍系について

大阪教育大学 山田 耕三 (Kohzo Yamada)

### 0 序文

位相的構造と代数的構造を同時に持つ位相群に対しては、これまで多くの数学者によって研究されてきた。その基本的な問題、位相群は常に正規空間となるかという問題に対する反例として、1941年、A. A. Markov [10] によって位相空間  $X$  に対する自由（可換）位相群  $F(X)$  ( $A(X)$ ) が定義された。以下、 $F(X)$  と  $A(X)$  を区別する必要のない場合は、両者を代表して  $G(X)$  で表す。さて、 $G(X)$  の存在と唯一性は、A. A. Markov [11] さらには T. Nakayama [12], S. Kakutani [8] によってそれぞれ証明された。一方、M. I. Graev [5] は、少し拡張された自由位相群を定義し、その存在と唯一性を証明した。

以来、 $G(X)$  の位相的構造についての研究が行われてきたが、その重要なテーマの一つは、位相空間  $X$  の性質がどれだけ  $G(X)$  に反映するかを調べることである。しかしながら、 $G(X)$  の代数的構造に比べ、その位相的構造は相当複雑である。例えば、 $G(X)$  が第1可算公理を満たすのは、 $X$  が離散空間のときのみに限ることが分かっている。さらに、 $G(X)$  の定義にはその内部の位相的構造について何も述べられていない。これらのことが、 $G(X)$  の位相的構造の研究を困難なものとしてきた。さて、1970年代になって、具体的な空間から生成される自由位相群については、少しずつ位相的構造（位相的性質）が明らかにされてきたが、その重要な手段となったのが、M. I. Graev が自由位相群の存在の証明に用いた Graev の距離と呼ばれる、距離空間  $X$  から生成される  $G(X)$  上のある群位相を導入する距離である。

しかしながら、Graev の距離が導入する  $G(X)$  上の群位相は、自由位相群の本来の位相よりは弱いため、 $G(X)$  の位相的構造そのものを表現することはできない。それに対し、1980年代になって、A. V. Arhangel'skiĭ をはじめとするモスクワ大学のグループにより、 $G(X)$  の単位元の近傍系を直接表現する研究が行われた。彼らの研究により、いくつかの単位元の近傍系が得られ、それらを使って、 $G(X)$  の位相的構造の研究が飛躍的進

歩を遂げたが、それらの近傍系の構成はなお相当複雑であり、応用することが困難であった。これに対し、最近  $A(X)$  におけるその構成が比較的簡単な近傍系を作ることができた。この構成がこの論文の目的である。

さて、第1節には、自由位相群の基本的性質が述べられている。これらの性質は、今や頻繁に使われているが、その証明がどの論文に与えられているのかが分からないものや、証明無しに結果だけが報告されたものも少なくない。そこで、ここではそれらの証明を与えることにした。続く第2節は、前述した Graev の距離に関する話題である。現在では、より拡張された Graev の擬距離がよく使われる。そこで、ここではこの拡張された Graev の擬距離の性質と、それを使って得られる、重要な  $G(X)$  の位相的性質を紹介する。そして最後の第3節では、モスクワ大学のグループによって得られた近傍系と、最近得られた近傍系の構成について述べる。

尚、この論文においては、空間はすべて Tychonoff、写像はすべて連続とする。また、 $N$  はすべての自然数の集合を表す。位相空間論に関する用語及び諸事実については [4], [9] を、また位相群に関する諸事実については [6], [13] を参照されたい。さらに、自由位相群に関するいろいろな結果や話題については、[2] に詳しく述べられているので、それを参照されたい。

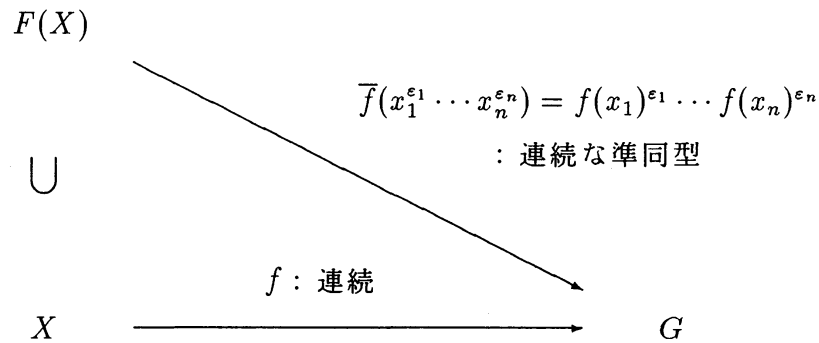
## 1 自由位相群の定義と基本的性質

まず、A. A. Markov によって与えられた位相自由群の定義と、この論文で使われる記号について述べる。

**定義 1.1 ([10])** 空間  $X$  から生成された自由群  $F(X)$  に、次の性質を満たす  $F(X)$  上の群位相  $\mathcal{T}$  を導入したとき  $(F(X), \mathcal{T})$  を  $X$  から生成された自由位相群と呼ぶ。(以後単に  $F(X)$  と表す。)

- (1)  $X$  は、 $F(X)$  の部分空間として含まれる。
- (2)  $X$  から任意の位相群  $G$  への連続写像  $f$  は、 $F(X)$  上の連続な準同型写像に拡張できる。

空間  $X$  から生成された自由可換群  $A(X)$  に、上記の性質 (1) と任意の可換位相群  $G$  に対する性質 (2) を満たす、 $A(X)$  上の群位相  $\mathcal{T}$  を導入したとき、 $(A(X), \mathcal{T})$  を  $X$  から生成された自由可換位相群と呼ぶ。(以後単に  $A(X)$  と表す。)



以下、この論文では、 $F(X)$  と  $A(X)$  を区別する必要のない場合は、両者を代表して、 $G(X)$  で表す。また、 $F(X)$  と  $A(X)$  の両者において同様の証明で得られる結果については、その証明は  $F(X)$  の場合の証明のみを与える。

**注意 1.2** M. I. Graev [5] は、少し拡張された自由（可換）位相群を定義し、その自由（可換）位相群についていろいろな結果を得たが、それらの多くは A. A. Markov が定義した自由（可換）位相群においても成立する。そこでこの論文では、それらの結果を A. A. Markov によって定義された自由（可換）位相群（定義 1.1）について証明する。

$G(X)$  の基本的性質を証明するために、まずいくつかの記号を準備する。

**記号 1.3**  $X$  を空間とする。 $F(X)$  の単位元を  $e$ 、 $A(X)$  の単位元を  $0$  とする。さて、 $F(X)$  の単位元以外の任意の元  $g$  は、唯一の既約表現  $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  で表される。但し、各  $i \leq n$  に対して、 $x_i \in X$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  とする。このとき、

$$l_+(g) = |\{i \leq n : \varepsilon_i = 1\}|, \quad l_-(g) = |\{i \leq n : \varepsilon_i = -1\}|, \quad \text{そして} \quad l(g) = l_+(g) + l_-(g)$$

とおく。このとき、 $l(g)$  を  $g$  の長さと呼ぶ。（但し、 $l(e) = 0$  とする。）また、各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $F_n(X) = \{g \in F(X) : l(g) \leq n\}$  とおく。さらに、 $\tilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$  とし、 $\tilde{X}^n$  から  $F_n(X)$  への写像  $i_n$  を  $i_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 x_2 \cdots x_n$  と定義する。

$A(X)$  に関してもこれらの記号は同様に定義される。

**命題 1.4** ([1], [5]) (1)  $T_1$  を  $G(X)$  上の群位相で、 $X$  上では空間  $X$  の位相と一致するものとするならば、 $T_1 \leq T$  となる。さらに、 $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$  をこのような性質を満たす  $G(X)$  上のすべての群位相としたとき、 $T = \sup\{T_\alpha : \alpha \in A\}$  となる。

(2)  $i_n$  は連続である。よって、もし  $X$  がコンパクトならば各  $G_n(X)$  もまたコンパクトとなる。

(3) 空間  $X$  及び各  $G_n(X)$  は  $G(X)$  の閉集合となる。

**証明** (1) の前半は、 $G(X)$  の定義の性質 (2) よりすぐに分かる。また、後半も  $\sup\{T_\alpha : \alpha \in A\}$  が  $G(X)$  上の群位相で且つ、 $X$  上では空間  $X$  の位相と一致することより明か。(2) は、群位相では群の演算は連続よりやはり明か。よって、(3) を証明する。今、空間  $X$  に対して  $\beta X$  を  $X$  の Stone-Čech コンパクト化とすると、包含写像  $i: X \rightarrow F(\beta X)$  は、 $F(X)$  上の連続な準同型写像  $\bar{i}$  に拡張される。すると、各  $n \in N$  に対して、

$$\bar{i}^{-1}(F_n(\beta X)) = F_n(X)$$

となる。今、(2) より各  $F_n(\beta X)$  はコンパクト、よって  $F(\beta X)$  の閉集合となる。このことより各  $F_n(X)$  は  $F(X)$  の閉集合となる。 ■

**定理 1.5** 空間  $X$  において、 $i: X \rightarrow A(X)$  を包含写像とする。このとき、 $i$  の  $F(X)$  上への拡張である連続な順同型写像を  $\phi$  とすると、 $\phi: F(X) \rightarrow A(X)$  は開写像となる。よって、 $A(X)$  は  $F(X)/\ker \phi$  と代数的に同型で且つ位相的にも同相である。

**証明**  $U$  を  $F(X)$  上での群位相の開基とすると、 $\phi(U)$  は、 $A(X)$  において群位相の公理 (cf. [6]) を満たすことが証明できる。そこで、 $\phi(U)$  によって導入される  $A(X)$  上の群位相を、 $T_1$  とするとき、 $T_1|_X$  が  $X$  の位相と等しいことを示す。そこで、 $F(X)$  の任意の開集合  $V$  と  $z \in V$  で  $\phi(z) = x \in X$  となるものをとると、

$$\phi(V) = \phi(xz^{-1}V) \supset \phi(xz^{-1}V \cap X) \ni x$$

となる。ここで、 $xz^{-1}V \cap X$  は  $x$  の  $X$  での開近傍より  $\phi(xz^{-1}V \cap X)$  はやはり  $x$  の  $X$  での開近傍となる。一方、 $\phi$  は連続より任意の  $x \in X$  と  $x$  の  $X$  での開近傍  $U$  に対して、 $x$  の  $F(X)$  での開近傍  $V$  で

$$x = \phi(x) \in \phi(V) \cap X \subset U$$

を満たすものが存在する。以上より、 $T_1|_X$  が  $X$  の位相と等しいことが分かる。よって、命題 1.4 の (1) より、 $T_1$  は  $A(X)$  の自由群位相より弱くなる。つまり、 $\phi$  は開写像となる。 ■

次に、 $G(X)$  の重要な部分群  $G_0$  を紹介する。この  $G_0$  は  $G(X)$  の位相的性質を調べるのに大変役だっている。実際、いくつかある単位元の近傍系も、実はすべて  $G_0$  上で構成されている。(第3節を参照せよ。)

**命題 1.6**  $G_0 = \{g \in G(X) : l_+(g) = l_-(g)\}$  とおくと、 $G_0$  は  $G(X)$  の閉且つ開部分群となる。

**証明**  $f$  を  $X$  から、加群で且つ離散空間である整数全体の集合  $Z$  への写像で、すべての  $x \in X$  に対して  $f(x) = 1$  となるものとする。そこで、 $\bar{f}$  を  $F(X)$  上へ拡張した連続な順同型写像とする。するとこのとき明らかに、 $F_0 = \bar{f}^{-1}(0)$  となる。 ■

$G(X)$  の位相的構造は、その代数的構造と比べると非常に複雑である。実際、M. I. Graev は、 $G(X)$  が第1可算公理を満たすのは、 $X$  が離散空間のときのみに限ることを示した。その事実を証明するために、まず次の補題を証明する。

**補題 1.7 ([5])**  $X$  を無限個の元をもつ空間とし、 $X$  から、点列  $\{x_i : i \in N\}$ ,  $\{y_i : i \in N\}$  で任意の  $i \in N$  に対して、 $x_i \neq y_i$  となるものをとる。そこで、任意の  $n \in N$  に対して、 $u_n = 2^n(x_n - y_n)$  とおくと、各  $u_n$  は  $A(X)$  の元で、 $0$  は点列  $\{u_n : n \in N\}$  の集積点にはならない。

**証明** 各  $n \in N$  に対して、次の性質を持つ連続写像  $f_n : X \rightarrow [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$  を帰納法で定義する。

(1)  $a \in \{0\} \cup \{x_i, y_i : i = 1, 2, \dots, n-1\}$  に対して、 $f_n(a) = 0$ 。

(2)  $f_n(y_n) = 0$ 。

(3)  $f_n(x_n) = \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ , 但し  $\varepsilon_n$  は、 $\sum_{i=1}^{n-1} (f_i(x_n) - f_i(y_n))$  の符号とする。また、 $f_1(x_1)$  の符号は、 $\pm 1$  のどちらでもよい。

まず、 $f_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  は  $f_1(0) = f_1(y_1) = 0$ ,  $f_1(x_1) = \frac{1}{2}$  を満たすようにとる。次に、 $f_2 : X \rightarrow [-\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}]$  を  $f_2(0) = f_2(x_1) = f_2(y_1) = f_2(y_2) = 0$ ,  $f_2(x_2) = \frac{\varepsilon_2}{2^2}$ , 但し  $\varepsilon_2$  は  $f_1(x_2) - f_1(y_2)$  の符号、をみたすようにとる。以下同様にして  $f_n$  を作り、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : X \rightarrow R$$

とおくと、 $f$  は連続で  $f(0) = 0$  となる。そこで、 $A(X)$  の定義より、 $\bar{f}$  を  $A(X)$  上へ拡張した連続な順同型写像とする。すると、任意の  $n \in N$  に対して

$$\begin{aligned} |\bar{f}(u_n)| &= |\bar{f}(2^n(x_n - y_n))| = 2^n |f(x_n) - f(y_n)| \\ &= 2^n \left| \sum_{i=1}^{\infty} (f_i(x_n) - f_i(y_n)) \right| \\ &= 2^n \left| \sum_{i=1}^{n-1} (f_i(x_n) - f_i(y_n)) + f_n(x_n) \right| \\ &\geq 2^n |f_n(x_n)| = 1 \end{aligned}$$

一方  $\bar{f}(0) = f(0) = 0$  より、 $0$  は  $\{u_n : n \in N\}$  の集積点にはならない。 ■

**命題 1.8 ([5])** 空間  $X$  が離散空間でないならば、 $G(X)$  は第 1 可算公理を満たさない。

**証明** 一般に、位相群  $G$  とその正規部分群  $H$  に対して、 $U$  を  $G$  のある元  $g$  の近傍系とすると、

$$\{U^* = \{xH : x \in U\} (=UH) : U \in \mathcal{U}\}$$

は商位相群  $G/H$  における  $[g]$  の近傍系となる。この事実と、定理 1.5 より、 $A(X)$  が第 1 可算公理を満たさないことを示せばよい。

$X$  が離散空間でないことより、 $X$  の元  $x$  で任意の  $x$  の近傍  $U$  に対し、 $|U \setminus \{x\}| \geq \aleph_0$  となるものがある。ここで、今  $0$  の可算個からなる近傍系  $\{U_n : n \in N\}$  が存在したとする。すると、各  $n \in N$  に対して、 $x$  の  $X$  における近傍  $V_n$  で

$$2^n(V_n - V_n) \subset U_n$$

を満たすものがある。すると仮定より、各  $V_n$  の中に異なる 2 点  $x_n, y_n$  がとれる。そこで、 $u_n = 2^n(x_n - y_n)$  とおくと、

$$u_n \in 2^n(V_n - V_n) \subset U_n$$

となり、点列  $\{u_n : n \in N\}$  が  $0$  に収束するが、これは、補題 1.7 に矛盾する。 ■

M. I. Graev は上記のような、 $G(X)$  の位相的構造を調べるうえには悲劇的な結果を示したが、一方現在の  $G(X)$  の研究の発展の元となる次の結果も示した。

**定理 1.9 ([5])** 空間  $X$  がコンパクトのとき、 $G(X)$  の部分集合  $U$  が  $G(X)$  で開集合となる必要十分条件は、任意の  $n \in N$  に対して、 $U \cap G_n(X)$  が  $G_n(X)$  で開集合となることである。

空間  $X$  がコンパクトのときは、各写像  $i_n$  は閉写像、つまり商写像となる。そこで今、 $T_\infty$  を  $G(X)$  上の位相で、次の条件を満たすものとする。

$$U \in T_\infty \iff \text{任意の } n \in N \text{ に対して } i_n^{-1}(U \cap G_n(X)) \text{ が } \widetilde{X}^n \text{ の開集合。}$$

すると、定理 1.9 から次のことが分かる。

**系 1.10**  $X$  がコンパクトならば、 $T_\infty = T$  となる。

この結果に関して、A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev そして V. G. Pestov [3] の結果を合わせることにより、最近、次の事実が証明できた。

**系 1.11 ([20])** 距離空間  $X$  において次は同値である。

- (1)  $F(X)$  は  $k$ -空間となる。
- (2)  $F(X)$  は  $k_\omega$ -空間、または離散空間となる。
- (3)  $T_\infty$  は  $F(X)$  上の群位相となる。
- (4)  $F(X)$  において  $T_\infty = T$  となる。
- (5)  $X$  は局所コンパクトな可分空間、または離散空間となる。

**系 1.12 ([20])** 距離空間  $X$  において次は同値である。

- (1)  $A(X)$  は  $k$ -空間となる。
- (2)  $T_\infty$  は  $A(X)$  上の群位相となる。
- (3)  $A(X)$  において  $T_\infty = T$  となる。
- (4)  $X$  は局所コンパクト空間、且つ  $X$  の導集合が可分となる。

さて、定理 1.9 の証明だが、ここでは、少し拡張された次の結果を証明する。

**定理 1.13 ([18])** 各  $G_n(X)$  が局所コンパクトとすると、 $G(X)$  の部分集合  $V$  が  $G(X)$  で開集合となる必要十分条件は、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $V_n = V \cap G_n(X)$  が  $G_n(X)$  で開集合となることである。

**証明** 必要性は明らかなので、十分性を示す。そこで、 $\mathcal{V} = \{V \subset F(X) : \text{各 } V_n \text{ は } F_n(X) \text{ で開集合}\}$  とおく。まず初めに、 $\mathcal{V}$  が  $F(X)$  上の群位相を導入することを示す。実際、 $\mathcal{V}$  が次の性質を満たすことを示せばよい。

任意の  $V \in \mathcal{V}$  と  $a, b \in F(X)$  で  $ab^{-1} \in V$  となるものに対して、ある  $U(a), U(b) \in \mathcal{V}$  が存在して、条件  $a \in U(a), b \in U(b)$ , そして  $U(a)U(b)^{-1} \subset V$  を満たす。

そこで、 $V \in \mathcal{V}$  と  $a, b \in F(X)$  で  $ab^{-1} \in V$  となるものをとる。今、 $\ell(a), \ell(b) \leq k$  と仮定しておき、 $i \geq k$  に関する帰納法により、集合  $U_i(a)$  と  $U_i(b)$  で次を満たすものを作る。

- (1)  $a \in U_i(a)$  且つ、 $b \in U_i(b)$ ,
- (2)  $U_i(a)$  と  $U_i(b)$  は共に  $F_i(X)$  の開集合,
- (3) 任意の  $j \leq i$  に対して  $U_j(a) \subset U_i(a)$  且つ、 $U_j(b) \subset U_i(b)$ ,
- (4)  $\overline{U_i(a)U_i(b)^{-1}} \subset V_{2i}$ ,
- (5)  $\overline{U_i(a)}$  と  $\overline{U_i(b)}$  は共にコンパクト。

$V_{2k}$  は  $F_{2k}(X)$  の開集合より、 $V_{2k} = V' \cap F_{2k}(X)$  となる  $F(X)$  の開集合  $V'$  をとる。すると、 $F_k(X)$  が局所コンパクトより、次を満たす  $F(X)$  の開集合  $U_a, U_b$  がとれる。

$$\overline{U_a U_b^{-1}} \subset V', \text{ 且つ } \overline{U_a \cap F_k(X)} \text{ と } \overline{U_b \cap F_k(X)} \text{ はコンパクトとなる。}$$

そこで、

$$U_k(a) = U_a \cap F_k(X) \text{ そして } U_k(b) = U_b \cap F_k(X)$$

とおくと、明らかに  $U_k(a)$  と  $U_k(b)$  は  $k$  における上記の性質を満たす。

さて、 $i = k, k+1, \dots, n$  に対して、 $U_i(a)$  と  $U_i(b)$  が作れたと仮定し、 $U_{n+1}(a)$  と  $U_{n+1}(b)$  を以下のようにして作る。まず、

$$E = \overline{U_n(a)^{-1}} (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2}) \overline{U_n(b)}$$



とおくと、 $E$  は、性質 (5) より  $F(X)$  の閉集合となる。しかも、 $e \notin E$  となっている。なぜならば、もしある  $u_n \in \overline{U_n(a)}$  と  $v \in F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2}$ , そして  $w_n \in \overline{U_n(b)}$  があって  $e = u_n^{-1}vw_n$  となったとすると、

$$v = u_n w_n^{-1} \in \overline{U_n(a) U_n(b)}^{-1} \subset V_{2n} \subset V_{2n+2}$$

となりこれは矛盾する。故に、 $e$  の近傍  $U_e$  で次を満たすものがとれる。

$$\overline{U_e U_e}^{-1} \subset F(X) \setminus E, \text{ 且つ } \overline{U_e \cap F_{2n+1}(X)} \text{ はコンパクト。}$$

ここで、

$$U_{n+1}(a) = (U_n(a) U_e) \cap F_{n+1} \text{ そして、 } U_{n+1}(b) = (U_n(b) U_e) \cap F_{n+1}$$

とおくと、明らかにこれらの集合は、性質 (1), (2) そして (3) を満たす。よって、性質 (4) と (5) を満たすことを示す。そのために、 $u = vw \in F_{n+1}(X)$ , 但し、 $v \in U_n(a)$ ,  $w \in U_e$  とする。すると、 $l(v) \leq n$  且つ  $l(u) \leq n+1$  より、 $l(w)$  は  $n+n+1=2n+1$  以下とならなければならない。よってこのことより、

$$U_{n+1}(a) \subset U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))$$

となることがわかる。故に、

$$\begin{aligned} \overline{U_{n+1}(a)} &\subset \overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))} \\ &\subset \overline{\overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))}} \\ &\subset \overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))} \end{aligned}$$

となる。そこで今、 $\overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))}$  はコンパクトより、 $\overline{U_{n+1}(a)}$  もまたコンパクトとなる。同様にすれば、 $\overline{U_{n+1}(b)}$  もコンパクトになることが分かる。つまり、性質 (5) が示せた。さらに、 $\overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))}$  は  $F(X)$  の閉集合より、

$$\overline{U_{n+1}(a)} \subset \overline{U_n(a) (U_e \cap F_{2n+1}(X))} \subset \overline{U_n(a) U_e}$$

となる。同様にすると、

$$\overline{U_{n+1}(b)} \subset \overline{U_n(b) (U_e \cap F_{2n+1}(X))} \subset \overline{U_n(b) U_e}$$

も得られる。以上より、

$$\begin{aligned} \overline{U_{n+1}(a) U_{n+1}(b)} &\subset \overline{U_n(a) U_e U_e}^{-1} \overline{U_n(b)}^{-1} \\ &\subset \overline{U_n(a) (F(X) \setminus E) U_n(b)}^{-1} \end{aligned}$$

となる。一方、

$$\overline{U_{n+1}(a)U_{n+1}(b)} \subset F_{2n+2}(X)$$

となっている。そこでもし、

$$x \in \overline{U_{n+1}(a)U_{n+1}(b)} \cap (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2})$$

となる  $x$  が存在したとすると、上の事実より  $x = u_n y v_n^{-1}$ 、但し  $u_n \in \overline{U_n(a)}$ 、 $y \in F(X) \setminus E$  且つ  $v_n \in U_n(b)$  とおける。すると、

$$y = u_n^{-1} x v_n \in \overline{U_n(a)}^{-1} (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+1}) \overline{U_n(b)} = E$$

となるが、これは不可能である。つまり、次のことが分かる。

$$\overline{U_{n+1}(a)U_{n+1}(b)}^{-1} \subset V_{2n+2}.$$

よって、性質 (4) が示せた。

次に、

$$U(a) = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_i(a) \text{ そして、 } U(b) = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_i(b)$$

とおくと、性質 (1) ~ (4) より、次のことがすぐに分かる。

$$U(a), U(b) \in \mathcal{V}, \text{ 且つ } U(a)U(b)^{-1} \subset V.$$

以上の議論より、 $\mathcal{V}$  が  $F(X)$  上のある群位相  $\mathcal{T}_1$  を導入する。明らかに、 $\mathcal{T}_1|_X$  は  $X$  の位相と等しいことより、 $\mathcal{T}_1$  は  $F(X)$  上の自由群位相よりは弱い。つまり、各  $V \in \mathcal{V}$  は  $F(X)$  の開集合となり、定理が証明された。 ■

この結果を利用すると、次の重要な性質が示される。

**系 1.14**  $K$  を  $G(X)$  のコンパクト部分集合とすると、ある  $n \in N$  が存在して  $K \subset G_n(X)$  となる。

**証明** 今、 $\bar{i}$  を包含写像  $i: X \rightarrow F(\beta X)$  を拡張した、 $F(X)$  上の連続な順同型写像とすると、 $K$  はコンパクトより  $\bar{i}(K)$  もコンパクトとなる。そこで、この  $\bar{i}(K)$  がある  $F_n(\beta X)$  に含まれることを示す。今、そうならないと仮定すると、ある点列  $\{g_n: n \in N\}$  が  $\bar{i}(K)$  に存在して、次を満たす。

$$g_n \in F_{k_{n+1}}(\beta X) \setminus F_{k_n}(\beta X).$$

但し、 $\{k_n : n \in N\}$  は  $N$  の無限部分点列である。すると、定理 1.9 より、 $\{g_n : n \in N\}$  は離散位相を持つ  $F(\beta X)$  の閉部分集合となるが、これは矛盾である。故に、ある  $n \in N$  が存在して、

$$K = \bar{i}^{-1} \bar{i}(K) \subset \bar{i}^{-1}(F_n(\beta X)) = F_n(X)$$

となる。 ■

## 2 Graev の擬距離

この節では、M. I. Graev が構成したいいわゆる “Graev の距離” を拡張した、 $G(X)$  上の擬距離を紹介する。その応用として、A. V. Arhangel'skiĭ [1] や C. Joiner [7] によって得られた、 $G(X)$  の位相的構造を調べる上に重要ないくつかの結果も紹介する。

さて、Graev の擬距離の構成は  $F(X)$  と  $A(X)$  のいずれにおいても同様にできるので、ここでは  $F(X)$  において構成する。まず、構成に必要ないくつかの概念を準備する。

空間  $X$  に対して、 $S(X)$  を  $\widetilde{X}$  の元から生成される全ての表現（規約な表現でなくてもよい） $x_1 x_2 \cdots x_n$  からなる半群とする。すると、 $F(X)$  は  $S(X)$  の規約な表現だけを集めた群となっている。さて、任意の  $g, h \in S(X)$  に対して、 $g \equiv h$  は  $g$  と  $h$  の表現が全く同じであることとする。また、 $g = h$  は、それぞれの  $g$  と  $h$  の規約表現が等しいことを表す。さて今、 $g \equiv x_1 x_2 \cdots x_n \in S(X)$  但し、各  $x_i \in \widetilde{X}$  とする。このとき、 $n$  を  $g$  の長さと呼び、 $\ell(g)$  と書く。各  $g \in F(X)$  においては、長さの定義は一致していることはすぐに分かる。

さて、空間  $X$  における連続な擬距離  $d$  をとる。まず最初に、この  $d$  を次のように  $\widetilde{X}$  上に拡張した  $d'$  を決める。

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して、} d'(x, e) = d'(x^{-1}, e) = 1,$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ の対して、} d'(x, y) = d'(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y),$$

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対して、} d'(x, y^{-1}) = d'(x^{-1}, y) = d'(x, e) + d'(y, e).$$

そこで、 $d'$  を  $F(X)$  上に拡張する。任意に  $g, h \in F(X)$  をとり、

$$\bar{d}(g, h) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k d'(x_i, y_i) : g' \equiv x_1 x_2 \cdots x_k, h' \equiv y_1 y_2 \cdots y_k \in S(X) \right. \\ \left. \text{但し } g = g' \text{ 且つ } h = h' \right\}$$

とおく。ここで便宜上、 $\phi(g', h') = \sum_{i=1}^k d'(x_i, y_i)$  とする。ここで、 $\bar{d}$  の持つ次の重要な性質を証明する。

命題 2.1 任意の  $g, h \in F(X)$  に対して、次を満たす  $g', h' \in S(X)$  が存在する。

$$g = g', h = h', \text{ 且つ } \bar{d}(g, h) = \phi(g', h').$$

証明 任意の  $g, h \in F(X)$  をとり、 $g \equiv x_1 x_2 \cdots x_m, h \equiv y_1 y_2 \cdots y_n$  を  $g$  と  $h$  の既約表現とする。但し、 $x_i, y_j \in X \cup X^{-1}$  である。また、任意の  $g', h' \in S(X)$  で  $g = g', h = h'$  となるものを取り、

$$(*) \begin{cases} g' \equiv a_1 a_2 \cdots a_s \equiv A_0 x_1 A_1 x_2 \cdots A_{m-1} x_m A_m \\ h' \equiv b_1 b_2 \cdots b_s \equiv B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \end{cases}$$

とおく。但し、各  $a_i, b_j \in \tilde{X}$  で  $A_i, B_j \in S(X)$  且つ  $A_i = B_j = e$  である。さて、上記の表現 (\*) において、各  $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$  をコラムと呼ぶことにする。そこで、(\*) の上段から  $x_i$  を 1 つとり、その下にある元を  $u_1$  とする。このときもし、 $u_1$  が  $e$  または  $y_j$  ならば操作を終わる。それ以外の場合は、 $u_1$  はある  $B_{j_1}$  の元となる。よって、 $u_1^{-1}$  が  $B_{j_1}$  に存在する。次に、 $u_1^{-1}$  の上にある元を  $u_2$  とする。ここで再び、もし  $u_2$  が  $e$  もしくはある  $x_{i'}$  ならばこの操作を終わる。以下、この操作を終了するまで続ける。(必ず終了する。)

するとこの操作で得られるパターンには、基本的には次の 4 つの場合がある。但し、左右の位置関係は考慮にいていない。

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1}^{-1} & e \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n-2}^{-1} & e \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1}^{-1} & y_j \end{cases} \\ (4) & \begin{cases} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \cdots & u_{2n-2}^{-1} & x_{i'} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \cdots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、(1) と (2) の場合において次のことが分かる。

$$\begin{aligned} & d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n}, u_{2n-1}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, e) \\ = & d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-1}, u_{2n}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, e) \\ \geq & d'(x_i, e), \end{aligned}$$

$$d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(e, u_{2n-1}^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(u_{2n-1}, e). \\
&\geq d'(x_i, e)
\end{aligned}$$

よって、全ての  $u_i$  を  $e$  におきかえても、 $\phi(g', h')$  の値は増えない。次に (3) の場合は、

$$\begin{aligned}
&d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n}, u_{2n-1}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, y_j) \\
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-1}, u_{2n}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, y_j) \\
&\geq d'(x_i, y_j)
\end{aligned}$$

となるので、全ての  $u_{2i-1}$  を  $y_j$  に、そして  $u_{2i}$  を  $y_j^{-1}$  におきかえても、 $\phi(g', h')$  の値は増えない。最後に、(4) の場合には、

$$\begin{aligned}
&d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(x_{i'}, u_{2n-1}^{-1}) \\
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(u_{2n-1}, x_{i'}^{-1}) \\
&\geq d'(x_i, x_{i'}^{-1})
\end{aligned}$$

となるので、全ての  $u_{2i-1}$  を  $x_{i'}^{-1}$  に、そして  $u_{2i}$  を  $x_{i'}$  におきかえても、 $\phi(g', h')$  の値は増えない。

そこで、この操作を残っている全ての  $x_k$ 、そして次に残っている全ての  $y_l$  に対して行う。但し、例えば、ある  $x_i$  における操作が、 $x_{i'}$  で終わった場合 (4) の場合は、 $x_{i'}$  についてはこの操作は行わない。さて、全ての操作が終了した後まだ残っているコラムがあれば、それらの元は全て  $e$  におきかえる。そして最後に、 $\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$  のコラムは全て取り除く。こうして得られた新しい表現を  $g_1, h_1 \in S(X)$  とおくと、 $g_1$  と  $h_1$  は次の性質を持っている。

- (1)  $g_1 = g, h_1 = h$  且つ  $\ell(g_1) = \ell(h_1)$ 。
- (2)  $g_1$  と  $h_1$  の全ての元は  $x_i^{\varepsilon_i}, y_j^{\varepsilon_j}$ , または  $e$  のいずれかである。但し、 $\varepsilon_i = \pm 1 = \varepsilon_j$ 。
- (3) 各  $x_i$  の下にくるのは  $e, x_{i'}^{-1}$  ( $i \neq i'$ ), または  $y_j$  のいずれかであり、各  $y_j$  の上にくるのは  $e, y_{j'}^{-1}$  ( $j \neq j'$ ), または  $x_i$  のいずれかである。
- (4)  $\begin{pmatrix} g_1 \\ h_1 \end{pmatrix}$  において、 $\phi(g_1, h_1)$  の値に影響を与えるコラムの数は、高々  $m+n$  である。
- (5)  $\phi(g_1, h_1) \leq \phi(g', h')$ 。

さて、性質 (4) より上記の (1) ~ (5) の性質を満たす  $g$  と  $h$  の表現に対して、関数  $\phi$  によるその値は高々有限個の値しか取り得ない。そこで、 $g_2, h_2 \in S(X)$  を上記の (1) ~ (5) の性質を満たし、 $\phi(g_2, h_2)$  が最小の値をとるものとする。すると、この  $g_2$  と  $h_2$  が求めるものとなる。 ■

そこで、 $g, h \in F(X)$  をとり、 $g', h' \in S(X)$  を

$$g = g', h = h', \text{ 且つ } \bar{d}(g, h) = \phi(g', h')$$

を満たすものとし、 $g \equiv x_1 x_2 \cdots x_m, h \equiv y_1 y_2 \cdots y_n$  を  $g$  と  $h$  の既約表現、但し  $x_i, y_j \in X \cup X^{-1}$  とおき、また、

$$(*) \begin{cases} g' \equiv a_1 a_2 \cdots a_s \equiv A_0 x_1 A_1 x_2 \cdots A_{m-1} x_m A_m \\ h' \equiv b_1 b_2 \cdots b_s \equiv B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \end{cases}$$

とおく。但し、各  $a_i, b_j \in \tilde{X}$  で  $A_i, B_j \in S(X)$  且つ  $A_i = B_j = e$  である。また、 $g'$  と  $h'$  の各元  $a$  において、 $|a|$  を  $a \in X$  のときは  $|a| = a$ 、 $a \in X^{-1}$  のときは  $|a| = a^{-1}$  となるものとし、 $\varepsilon(a) = \pm 1$  を  $a = |a|^{\varepsilon(a)}$  となるものとおく。すると、命題 2.1 の証明より、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$  は更に次の性質を満たすことが分かる。

**補題 2.2**  $i_1 \neq i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$  に対して、 $|x_{i_1}| = |x_{i_2}|$  且つ  $\varepsilon(x_{i_1}) \times \varepsilon(x_{i_2}) = -1$  すると、 $|i_1 - i_2| > 1$  となる。

**補題 2.3**  $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$  において、あるコラム  $\begin{pmatrix} x_i \\ x_j^{-1} \end{pmatrix}$  ( $i \neq j$ ) が存在して  $d'(x_i, x_j^{-1}) > 0$  で  $|i - j| > 1$  とする。このとき、任意の  $x_k$  ( $\min\{i, j\} < k < \max\{i, j\}$ ) に対して、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$  において  $x_k$  の下にくるのは、 $e$  または  $x_l^{-1}$  ( $\min\{i, j\} < l < \max\{i, j\}$ ) のみである。

**補題 2.4**  $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$  において、あるコラム  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}$  が存在して  $d'(x_i, y_j) > 0$  とする。このとき、任意の  $x_k$  ( $k < i$ ) に対して、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$  において  $x_k$  の下にくるのは、 $e$  または  $x_l^{-1}$  ( $l < i, l \neq k$ ) または  $y_l$  ( $l < j$ ) のみである。また、任意の  $y_k$  ( $k < j$ ),  $x_k$  ( $k > i$ ),  $y_k$  ( $k > j$ ) についても同様のことがいえる。

M. I. Graev [5] は、命題 2.1 を利用してさらに、 $\bar{d}$  が  $F(X)$  上のある群位相を導入する擬距離 (M. I. Graev の証明は距離) となり、自由群位相  $\mathcal{T}$  よりは弱い位相となることを示した。一方、A. V. Arhangel'skiĭ [1] と C. Joiner [7] は、それぞれ独立に次の重要な結果を証明した。この結果は、上記の補題を利用すると比較的簡単に証明できる。

**定理 2.5**  $X$  を空間とする。任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n |_{i_n^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \longrightarrow F_n(X) \setminus F_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は同相写像となる。

**証明**  $f_n$  が開写像となることを示せばよい。そこで、任意の  $g \in F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$  をとり、 $g \equiv x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$  をその既約表現とする。そこで、 $(x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}, \dots, x_n^{\varepsilon_n})$  の  $\widetilde{X}^n$  での任意の近傍  $U$  をとり、 $d$  を  $X$  上の連続な擬距離で次を満たすものとする。ある  $\delta' > 0$  があって、

$$U_{\delta'}(x_1^{\varepsilon_1}) \times U_{\delta'}(x_2^{\varepsilon_2}) \times \cdots \times U_{\delta'}(x_n^{\varepsilon_n}) \subset U$$

となる。ここで、各  $U_{\delta'}(x_i^{\varepsilon_i})$  は  $x_i^{\varepsilon_i}$  の  $\widetilde{X}$  での  $\delta'$ -近傍である。このとき、十分小さな  $\delta > 0$  に対して

$$B_\delta(g) \cap (F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \subset f_n(U_\delta(x_1^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times U_\delta(x_n^{\varepsilon_n})),$$

を示せばよい。ここで、各  $B_\delta(g)$  は  $g$  の  $(F(X), \bar{d})$  での  $\delta$ -近傍である。実際、 $\delta > 0$  を

$$2\delta < \min(\{d'(x_i, x_j) : x_i \neq x_j\}, 1, \delta')$$

を満たすようにとる。そこで、任意の  $h \equiv y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \cdots y_n^{\varepsilon_n} \in B_\delta(g) \cap (F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))$  をとり、命題 2.1 より  $g', h' \in S(X)$  を  $g' = g, h' = h$ , 且つ  $\bar{d}(g, h) = \phi(g', h')$  となるものとする。このとき、 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$  において、( $d'$  の値が 0 にならない) 各  $x_i^{\varepsilon_i}$  の下には  $y_i^{\varepsilon_i}$  がくることを示す。

今、 $\delta$  の仮定より  $x_i^{\varepsilon_i}$  の下には、 $e$  はこない。そこで  $x_i^{\varepsilon_i}$  の下に  $x_j^{-\varepsilon_j}$  があるとすると、 $\delta$  の仮定より  $x_i = x_j$  且つ  $\varepsilon_i \times \varepsilon_j = -1$  となる。よって、補題 2.2 より  $|i - j| > 1$  となる。今、 $j = i + k$  ( $1 \leq k \leq n - i$ ) としておく。もし、 $k$  が偶数とすると、 $x_i^{\varepsilon_i}$  と  $x_j^{\varepsilon_j}$  の間には奇数個の  $x_i^{\varepsilon_i}$  がある。よって、補題 2.3 と  $\delta$  の仮定より、ある  $k' \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$  が存在して  $x_{k'}^{\varepsilon_{k'}}$  の下には  $e$  がくることになり矛盾する。一方、 $k$  が奇数とすると、 $x_i^{\varepsilon_i}$  と  $x_j^{\varepsilon_j}$  の間には偶数個の  $x_i^{\varepsilon_i}$  がある。よって、補題 2.3 と  $\delta$  の仮定より、ある  $k' \in \{i + 1, \dots, j - 2\}$

が存在して、 $x_{k'}^{\varepsilon_{k'}}$  の下には、 $x_{k'+1}^{-\varepsilon_{k'+1}}$  がある。すると、 $\delta$  の仮定より、 $x_{k'} = x_{k'+1}$  且つ  $\varepsilon_{k'} \times \varepsilon_{k'+1} = -1$  となるが、これは補題 2.2 に矛盾する。よって以上より、 $x_i^{\varepsilon_i}$  の下にはある  $y_j^{\varepsilon_j}$  があることになる。しかしながら、同様の議論と補題 2.4 より、 $i = j$  となることが分かる。

故に、

$$\bar{d}(g, h) = \phi(g', h') = \sum_{i=1}^n d'(x_i^{\varepsilon_i}, y_i^{\varepsilon_i}) < \delta$$

となる。つまり各  $y_i^{\varepsilon_i} \in U_\delta(x_i^{\varepsilon_i})$  となり、結局  $h \in f_n(U_\delta(x_1^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times U_\delta(x_n^{\varepsilon_n}))$  となる。 ■

さて、 $A(X)$  に関しては同様の議論より、次のことが分かる。

**定理 2.6**  $X$  を空間とする。任意の  $n \in N$  に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n |_{i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)) \longrightarrow A_n(X) \setminus A_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は  $n! - 1$  の開且つ閉写像となる。

**系 2.7**  $(X, d)$  を距離空間とする。すると、各  $G_n(X)$  は  $(G(X), \bar{d})$  の閉部分集合となる。

**証明** 定理 2.5 の証明より、明らかに

$$B_\delta(g) \cap F_{n-1}(X) = \emptyset$$

となる。 ■

これらの事実より、A. V. Arhangel'skiĭ [1] によって得られた、次の結果が証明できる。

**定理 2.8**  $(X, d)$  を距離空間とする。すると  $G(X)$  は、継承的パラコンパクト且つ  $F_\sigma$ -距離空間となる。



証明 補題 2.7 より、任意の  $n \in N$  に対して  $Y_n = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$  は距離空間  $(F_n(X), \bar{d}|_{F_n(X)})$  の開部分集合となる。よって、

$$Y_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_{(n,i)},$$

但し各  $Z_{(n,i)}$  は  $(F_n(X), \bar{d}|_{F_n(X)})$  の、よって  $(F(X), \bar{d})$  の閉部分集合とおける。今、 $\bar{d}$  によって導入される  $F(X)$  の群位相は  $F(X)$  の自由群位相より弱いので、各  $Z_{(n,i)}$  は  $F(X)$  の閉部分集合となる。一方、定理 2.5 より、各  $Z_{(n,i)}$  は距離空間となる。つまり、 $F(X)$  は  $F_\sigma$ -距離空間となる。

つぎに、 $F(X)$  がパラコンパクトになることを示す。任意の  $F(X)$  の開被覆  $\mathcal{U}$  をとり、各  $n \in N$  に対して、

$$\mathcal{U}_n = \{U \cap Y_n : U \in \mathcal{U}\}$$

とおく。すると  $(F_n(X), \bar{d}|_{F_n(X)})$  における、よって実際  $(F(X), \bar{d})$  における  $\mathcal{U}_n$  の  $\sigma$ -疎な閉細分  $\mathcal{H}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{(n,i)}$  がとれる。そこで、各  $H \in \mathcal{H}_n$  に対して  $U(H) \in \mathcal{U}$  で  $H \subset U(H)$  となるものを選んでおく。すると、各  $n, i \in N$  に対して、 $(F(X), \bar{d})$  における開集合からなる疎な族  $\mathcal{W}_{(n,i)} = \{W(H) : H \in \mathcal{H}_{(n,i)}\}$  で

任意の  $H \in \mathcal{H}_{(n,i)}$  に対して  $H \subset W(H)$  且つ

任意の  $H \in \mathcal{H}_{(n,i)}$  に対して  $W(H) \cap Y_n \subset U(H)$

を満たすものが存在する。そこで、

$$\mathcal{G}_{(n,i)} = \{W(H) \cap U(H) : H \in \mathcal{H}_{(n,i)}\} \text{ そして } \mathcal{G} = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} \mathcal{G}_{(n,i)}$$

とおくと、 $\mathcal{G}$  は  $F(X)$  における  $\sigma$ -疎な  $\mathcal{U}$  の開細分となり、 $F(X)$  はパラコンパクトになる。同様の議論で、 $F(X)$  が継承的パラコンパクトになることも証明できる。 ■

### 3 単位元の近傍系

この節では、いくつかの単位元の近傍系の構成について述べる。まず最初に Graev の擬距離を使って得られた、M. G. Tkačendo [15] が構成した  $A(X)$  の単位元の近傍系を紹介する。

さて、 $X$  を空間とし、 $\mathcal{D}$  を  $X$  上の連続な擬距離をすべて集めた族とする。任意の  $d \in \mathcal{D}$  に対して、 $\bar{d}$  を 2 節で紹介した  $G(X)$  上の Graev の擬距離とし、それによって導入される  $G(X)$  上の群位相を  $T_{\bar{d}}$  とする。そこで  $T_1$  を

$$T_1 = \sup\{T_{\bar{d}} : d \in \mathcal{D}\}$$

とおくと、 $T_1$  は  $G(X)$  上の群位相となり、また  $X$  は Tychonoff より、 $T_1|_X$  は  $X$  の位相と等しくなることが分かる。故に命題 1.4 より、

$$T_1 \leq T$$

となる。さらに、M. G. Tkačenko [15] は次のことを示した。

**定理 3.1 ([15])**  $\mathcal{V} = \{B_{(1,\bar{d})}(0) : d \in \mathcal{D}\}$ , 但し  $B_{(1,\bar{d})}(0) = \{g \in A(X) : \bar{d}(g, 0) < 1\}$  とおくと、 $\mathcal{V}$  は  $A(X)$  における 0 の近傍系となる。故に、 $T_1$  は  $A(X)$  における自由群位相と等しくなる。

さて、後で述べるが、空間  $X$  が離散空間でないならば一般に  $G(X)$  は Čech 完備空間とはならない。しかしながら、 $G(X)$  における、左一様系が完備になるかどうか、つまり  $G(X)$  が Weil 完備空間になるかどうかは問題となっていた。この問題に対して、M. G. Tkačenko は上記の近傍系を使って、次のことを示した。

**定理 3.2 ([15])** 空間  $X$  において、 $A(X)$  が Weil 完備空間となる必要十分条件は  $X$  が Dieudonné 完備空間となることである。

また V. V. Uspenskii [17] が、やはり  $X$  上の連続な擬距離を使って、別の  $G(X)$  の単位元の近傍系を構成した。ここでは、 $F(X)$  の場合についてその構成を紹介する。

今、任意の  $g \in F_0$  ( $F_0$  については、命題 1.6 を参照のこと) をとると、 $g$  は次のように表現される。

$$(*) \quad g = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

但し、各  $x_i, y_i \in X$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$ , そして  $g_i \in F(X)$  である。このとき次のことが分かる。

**定理 3.3 ([17])**  $X$  を空間とし、任意の  $S = \{d_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{D}^{F(X)}$  をとる。このとき任意の  $g \in F_0$  に対して、

$$p_S(g) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d_{g_i}(x_i, y_i) : g \text{ のすべての } (*) \text{ の表現を動かす。} \right\},$$

とおくと、次のことがいえる。

- (1) 各  $p_S$  は  $F_0$  上の連続な半ノルムとなる。
- (2)  $\{ \{g : p_S(g) < 1\} : S \in \mathcal{D}^{F(X)} \}$  は  $F(X)$  における  $e$  の近傍系となる。

この結果の応用として、V. V. Uspniskii は次の重要な事実を証明した。

**定理 3.4 ([17])**  $X$  を距離空間、 $Y$  をその閉部分集合とする。今、 $Y$  から生成された  $G(X)$  の部分位相群を  $\langle Y \rangle$  とすると、 $\langle Y \rangle$  は  $G(Y)$  と代数的に同型であることはもちろんのこと、位相的にも同相である。

さらに最近、O. V. Sipacheva [14] は、新たな  $G(X)$  の単位元の近傍系を構成し（その構成は非常に複雑であるが）、定理 3.4 を発展させた次の結果を得た。

**定理 3.5 ([14])**  $X$  を空間、 $Y$  をその部分空間とする。このとき、 $G(X)$  の部分位相群  $\langle Y \rangle$  が  $G(Y)$  と代数的に同型で、且つ位相的にも同相となる必要十分条件は、 $Y$  上の連続で有界な擬距離が  $X$  の連続な擬距離に拡張できることである。

さらに、この事実より  $F(X)$  に関する定理 3.2 と同じ次の結果を得た。

**定理 3.6 ([14])** 空間  $X$  において、 $F(X)$  が Weil 完備空間となる必要十分条件は  $X$  が Dieudonné 完備空間となることである。

以上、モスクワ大学のグループによって得られた、いくつかの近傍系とその応用を紹介したが、最後に最近得られた  $A(X)$  における  $0$  の近傍系の構成について述べる。その構成には、 $X$  上の極大一様系を利用するので、まず一様系に関するいくつかの定義と記号について述べる。

$(X, \mathcal{U})$  を一様空間とする。任意の  $U, V \in \mathcal{U}$  対して、

$$U^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in U\},$$

$$U \circ V = \{(x, z) \in X \times X : \text{ある } y \in X \text{ があって } (x, y) \in U \text{ 且つ } (y, z) \in V\}$$

とおく。また、 $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$  を  $X \times X$  の対角集合と呼ぶ。空間  $X$  において、 $X$  の位相と同じ位相を導入する  $X$  上の一様系の中で、最も強いものを極大一様系と呼び、 $\mathcal{U}_X$  で表す。まず、次の補題を証明する。

**補題 3.7** 今、 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  と  $p, k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$  をとり、 $\sum_{i=1}^p 2^{-k_i} < 2^{-k}$  とする。このとき、次が成立する。

- (1)  $(X, \mathcal{U})$  を一様空間、 $\{U_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  を  $\mathcal{U}$  の可算部分族で、各  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して、 $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$  を満たすとするならば、 $U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_p} \subset U_k$  となる。
- (2)  $G$  を群で、その単位元が  $e$  とする。このとき、 $\{V_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  を  $G$  の  $e$  を含む部分集合の可算族で、各  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して、 $V_{n+1} \cdot V_{n+1} \cdot V_{n+1} \subset V_n$  を満たすとするならば、 $V_{k_1} \cdot V_{k_2} \cdot \dots \cdot V_{k_p} \subset V_k$  (cf. [16]) となる。

**証明** (1) と (2) のどちらも同様に示せるのでここでは、(1) のみを示す。証明は  $p$  に関する帰納法で示す。そこで、各  $n \leq p$  に対して (1) が示されたと仮定し、 $p+1$  のときを示す。今、ある  $j \in \{1, 2, \dots, p+1\}$  があって  $k_j = k+1$  となったとする。すると帰納法の仮定を使うと、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

となることが簡単に分かる。よって、各  $j \in \{1, 2, \dots, p+1\}$  に対して、 $k_j < k+1$  と仮定しておく。このときさらに  $\sum_{i=1}^{p+1} 2^{-k_i} < 2^{-(k+1)}$  となったとすると、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_p} \subset U_{k+1},$$

となることより、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \dots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

が示される。よって、今  $2^{-(k+1)} \leq \sum_{i=1}^p 2^{-k_i} < 2^{-k}$  の場合を考えると、ある  $j \in \{2, \dots, p\}$  があって、

$$\sum_{i=1}^j 2^{-k_i} < 2^{-(k+1)} \text{ 且つ } \sum_{i=1}^{j+1} 2^{-k_i} \geq 2^{-(k+1)}$$

となる。よってこのことより、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \cdots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k_{j+1}} \circ U_{k+1} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

となることが分かり、以上より (1) は示された。 ■

さて、

$$\mathcal{P} = \{P \subset U_X : P \text{ は可算}\}$$

とし、任意の  $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  に対して、

$$\begin{aligned} W(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k \\ &\quad : (x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, k, k \in N\}, \text{ そして} \\ W &= \{W(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。さらに、任意の  $n \in N$  をとる。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P) &= \{Q \subset P : |Q| = n\}, \\ W_n(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n \\ &\quad : (x_j, y_j) \in U_{i_j}, j = 1, 2, \dots, n, \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}\} \in \mathcal{Q}_n(P)\}, \text{ そして} \\ W_n &= \{W_n(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。

**注意 3.8** 上記の定義において、各  $P \in \mathcal{P}$  に対して、 $P$  の中には同じ元が存在してもよい。特に、任意の  $U \in U_X$  に対して、 $\{U, U, \dots\}$  も  $\mathcal{P}$  の元としておく。

また、 $W(P)$  と  $W_n(P)$  の定義において、

$$g \equiv x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k$$

とはなっていないことに注意せよ。つまり、右辺は、規約表現とは限らない。そこで、 $W_n(P)$  において、

$$\mathcal{R}_n(P) = \{Q \subset P : |Q| \leq n\}.$$

とすると、 $\Delta_X$  は任意の  $U \in U_X$  に含まれているので、明らかに

$$\begin{aligned} W_n(P) &= \{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k \\ &\quad : (x_j, y_j) \in U_{i_j}, j = 1, 2, \dots, k, \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \in \mathcal{R}_n(P)\} \end{aligned}$$

となる。

**定理 3.9**  $W$  は  $A(X)$  における  $0$  の近傍系となる。

**証明** まず、 $W$  が  $A(X)$  の  $0$  の近傍系の次の公理を満たすことを示す。

- (i) 任意の  $V \in W$  に対して、ある  $W \in W$  があって  $W + W \subset V$  を満たす。
- (ii) 任意の  $V \in W$  に対して、ある  $W \in W$  があって  $-W \subset V$  を満たす。
- (iii) 任意の  $V \in W$  と  $g \in V$  に対して、ある  $W \in W$  があって  $g + W \subset V$  を満たす。
- (iv) 任意の  $U, V \in W$  に対して、ある  $W \in W$  があって  $W \subset U \cap V$  を満たす。
- (v)  $\{0\} = \bigcap W$ .

今、 $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  と  $g \in W(P)$  を任意にとり、 $g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n$  但し、 $(x_i, y_i) \in U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , としておく。そこで、 $P_1 = \{A_1, A_2, \dots\}$ ,  $P_2 = \{B_1, B_2, \dots\}$  そして  $P_3 = \{C_1, C_2, \dots\}$  を、次を満たすものとする。

- (1)  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}$ ,
- (2) 任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対して、 $A_i \subset U_{2i-1} \cap U_{2i}$ ,
- (3) 任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対して、 $B_i \subset U_i$  且つ  $B_i = -B_i$ ,
- (4) 任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対して、 $C_i \subset U_{i+n}$ .

すると、 $W(P_1) + W(P_1) \subset W(P)$ ,  $-W(P_2) \subset W(P)$ , そして  $g + W(P_3) \subset W(P)$  となることは明らか。よって、(i), (ii), (iii) は示された。また、(iv), (v) は明らかに成立する。

以上より、 $T_1$  を  $W$  によって生成される  $A(X)$  の群位相とする。ここで、任意の  $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  と  $x \in X$  をとり、 $W(x) = \{y \in X : (y, x) \in U_1\}$  とおく。すると、 $\mathcal{U}_X$  が導入する  $X$  の位相は、 $X$  のもともとの位相と一致するので、 $W(x)$  は  $X$  の開部分集合となる。また、 $x \in W(x) \subset (W(P) + x) \cap X$  となる。つまり、このことは、 $T_1|_X$  が  $X$  の位相より弱いことを示している。

そこで次に、 $T_1$  が  $A(X)$  の自由群位相より強くなることを示す。そのために、 $A(X)$  における  $0$  の近傍  $V$  を任意にとる。ここで、 $V_0 = V$  とし、さらに  $A(X)$  における  $0$  の近傍からなる可算族  $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  で、 $V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1}$  となるものをとる。次に、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : x - y \in V_n\}$$

とおき、 $P = \{U_1, U_2, \dots\}$  とする。今、各  $U_n \in \mathcal{U}_X$  より  $P \in \mathcal{P}$  となる。そこで、任意の  $g \in W(P)$  をとると、ある  $n \in N$  と  $(x_i, y_i) \in U_n \ i = 1, 2, \dots, n$  があって、

$$g = x_1 - y_1 + \dots + x_n - y_n$$

となっている。よって補題 3.7 の (2) より、

$$g \in V_1 + V_2 + \dots + V_n \subset V_0 = V.$$

故に、 $W(P) \subset V$  となる。

以上より、 $T_1|_X$  は  $X$  の位相と等しくなり、命題 1.4 の (1) より、 $T_1$  は  $A(X)$  の自由群位相より弱くなる。つまり、 $T_1$  は  $A(X)$  の自由群位相と等しくなる。よって、 $W$  は  $A(X)$  における 0 の近傍系となる。 ■

**定理 3.10** 任意の  $n \in N$  に対して、 $W_n$  は  $A_{2n}(X)$  における 0 の近傍系となる。

**証明** 任意に  $n \in N$  をとり固定する。定理 3.9 より  $W|_{A_{2n}(X)} = \{W(P) \cap A_{2n}(X) : P \in \mathcal{P}\}$  は  $A_{2n}(X)$  における 0 の近傍系となる。よって、任意の  $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  に対して、 $W_n(P) \subset W(P) \cap A_{2n}(X)$  となる。つまり、次のことを示せばよい。

任意の  $P \in \mathcal{P}$  に対して、ある  $P_1 \in \mathcal{P}$  があって  $W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$  となる。

任意の  $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  をとり、 $V_0 = U_1$  とおく。さらに、帰納的に  $\{V_m : m \in N\} \subset \mathcal{U}_X$  を、次を満たすようにとる。

$$\text{任意の } n \in N \text{ に対して、 } V_m \circ V_m \circ V_m \subset V_{m-1} \cap U_{m+1}.$$

さて、この族  $P_1 = \{V_m : m \in N\}$  に対して、

$$W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$$

となることを示す。そこで、任意に  $g \in W(P_1) \cap A_{2n}(X)$  をとり、

$$(1) \quad g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_k - y_k,$$

とする。但し、 $k \in N$  で各  $i = 1, 2, \dots, k$  に対して  $(x_i, y_i) \in V_i$  とする。今、

$$A(g) = \{x_i : x_i \text{ は (1) の表現を規約にしたときに残る。 } i = 1, 2, \dots, k\},$$

$$B(g) = \{y_i : y_i \text{ は (1) の表現を規約にしたときに残る。 } i = 1, 2, \dots, k\}.$$

とおく。ここで、 $i \neq j$  となる  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  に対して、 $x_i = x_j$  ( $y_i = y_j$ ) であっても、これらの元  $x_i$  と  $x_j$  ( $y_i$  と  $y_j$ ) は  $A(g)$  ( $B(g)$ ) の中では異なる元とみなすことにする。さて、 $g \in A_{2n}(X)$  より、 $|A(g)| = |B(g)|$  且つ  $|A(g)| + |B(g)| \leq 2n$  となっている。よって、 $A(g) = \{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$  ( $\ell \leq n$ ) とおき、任意に  $a_i \in A(g)$  をとる。すると、ある  $k(i, 1) \in \{1, 2, \dots, k\}$  があって  $a_i = x_{k(i,1)}$  となる。このとき、もし  $y_{k(i,1)} \in B(g)$  となっていれば  $b_{\varphi(i)} = y_{k(i,1)}$  とおく。そうでないときは、 $y_{k(i,1)}$  は (1) の表現を規約にすると消えるので、ある  $k(i, 2) \in \{1, \dots, k\}$  があって  $y_{k(i,1)} = x_{k(i,2)}$  となる。このとき明らかに  $k(i, 2) \neq k(i, 1)$  である。このとき、もし  $y_{k(i,2)} \in B(g)$  となっていれば、 $b_{\varphi(i)} = y_{k(i,2)}$  とおく。そうでないときは、同様にして  $k(i, 3) \in \{1, 2, \dots, k\}$  で  $y_{k(i,2)} = x_{k(i,3)}$  且つ  $k(i, 3) \notin \{k(i, 1), k(i, 2)\}$  となるものがとれる。以下、この操作を  $B(g)$  の元が現れるまで行い、その  $B(g)$  の元を  $b_{\varphi(i)}$  とする。明らかに、 $b_{\varphi(i)}$  は、必ず現れる。

以上の操作を  $A(g)$  の全ての元に対して行くと、 $\varphi$  は  $\{1, 2, \dots, \ell\}$  上の置換となり、また  $\{k(i, 1), k(i, 2), \dots, k(i, j(i))\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ , は次のことを満たす。

- (2) 各  $i = 1, 2, \dots, \ell$  に対して、 $a_i = x_{(i,1)}$  且つ  $b_{\varphi(i)} = y_{k(i,j(i))}$ ,
- (3) 各  $j = 1, 2, \dots, j(i) - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$  に対して、 $y_{k(i,j)} = x_{k(i,j+1)}$ ,
- (4)  $\{k(i, j) : j = 1, 2, \dots, j(i), i = 1, 2, \dots, \ell\}$  はすべて異なる数からなる。

よって (2) と (3) より、各  $i = 1, 2, \dots, \ell$  に対して、

$$(a_i, b_{\varphi(i)}) \in V_{k(i,1)} \circ V_{k(i,2)} \circ \dots \circ V_{k(i,j(i))}$$

となる。ここで、 $k(i) = \min\{k(i, 1), k(i, 2), \dots, k(i, j(i))\}$  とすると (4) より、 $\{k(1), k(2), \dots, k(\ell)\}$  は異なる数からなる  $\{1, 2, \dots, n\}$  の部分列となる。故に補題 3.7 の (1) と  $P_1$  の定義より、

$$\text{任意の } i = 1, 2, \dots, \ell \text{ に対して、} (a_i, b_{\varphi(i)}) \in V_{k(i)-1} \subset U_{k(i)}$$

となる。一方、 $\varphi$  は  $\{1, 2, \dots, \ell\}$  上の置換より

$$g = a_1 - b_{\varphi(1)} + a_2 - b_{\varphi(2)} + \dots + a_\ell - b_{\varphi(\ell)}.$$

と表される。よって、注意 3.8 より、 $\{U_{k(1)}, U_{k(2)}, \dots, U_{k(\ell)}\} \in \mathcal{R}_n(P)$  となっていることから  $g \in W_n(P)$  となることが分かる。故に、 $W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$  が示された。■



以上より、 $A(X)$  における  $0$  の近傍系と各  $A_{2n}(X)$  における  $0$  の近傍系が得られたが、 $A(X)$  と各  $A_n(X)$  が  $k$ -空間になる状況について、これらの近傍系を利用していくつかの結果が得られた。このことについては、[18] と [19] を参照されたい。そこで最後に、ここではこれらの近傍系を使って得られる  $A(X)$  の基本的な位相的性質について少し述べる。

まず、 $W$  の定義より、空間  $X$  が離散空間でないならば、任意の  $n \in N$  と任意の  $W \in W$  に対して、

$$W \cap (A_{n+1}(X) \setminus A_n(X)) \neq \emptyset$$

となることがすぐに分かる。また定理 1.5 より、結局次のことが分かる。

**系 3.11** 空間  $X$  が離散空間でないならば、 $G(X)$  は Baire 空間とはならない。つまり、局所コンパクトにも Čech 完備空間にもなり得ない。

ここで、再び記号を準備する。空間  $X$  と各  $n \in N$  に対して、写像  $j_n : X^{2n} (= X^n \times X^n) \rightarrow A_{2n}(X)$  を次のように定義する。任意の  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  と  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$  に対して、

$$j_n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

すると、次のことが分かる。

**系 3.12**  $X$  を空間、 $n \in N$ 、 $E$  を  $A_{2n}(X)$  の部分集合とする。このとき  $0 \in \overline{E}$  となる必要十分条件は、任意の  $U \in \mathcal{U}_X$  に対して  $j_n^{-1}(E) \cap U^n \neq \emptyset$  となることである。但し、 $U^n = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in X^{2n} : (x_i, y_i) \in U, i = 1, 2, \dots, n\}$  とする。

**証明** 必要性 今、 $U \in \mathcal{U}_X$  を任意にとり  $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  を任意の  $n \in N$  に対して  $U_i = U$  となるものとする。すると  $W_n(P)$  は  $A_{2n}(X)$  における  $0$  の近傍系より、 $g \in W_n(P) \cap E$  がとれる。よって、

$$g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n,$$

但し、 $(x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, n$  と表せる。つまり、 $\mathbf{x} = ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$  とおくと、明らかに  $\mathbf{x} \in j_n^{-1}(E) \cap U^n$  となる。

十分性 今、 $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$  を任意にとり、 $U \in \mathcal{U}$  を  $U \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$  となるようにとる。すると仮定より、 $\mathbf{x} = ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in j_n^{-1}(E) \cap U^n$  がとれる。すると、各  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $(x_i, y_i) \in U \subset U_i$  となることより、 $j_n(\mathbf{x}) \in W_n(P) \cap E$  となる。故に、定理 3.10 より  $0 \in \overline{E}$  となる。 ■

系 3.13  $X$  をパラコンパクト空間、 $E$  を  $A_2(X)$  の部分集合とする。このとき、 $0 \in \overline{E}$  となる必要十分条件は  $\overline{j_1^{-1}(E)} \cap \Delta_X \neq \emptyset$  となることである。

## 参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, Mapping related to topological groups, Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1011-1015.
- [2] A. V. Arhangel'skiĭ, Algebraic objects generated by topological structure, J. Soviet Math. 45 (1989) 956-978.
- [3] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.
- [4] R. Engelking, General Topology, Heldermann, Berlin, 1989.
- [5] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.
- [6] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Academic Press, 1963.
- [7] C. Joiner, Free topological groups and dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976) 401-418.
- [8] S. Kakutani, Free topological groups and infinite direct product topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 595-598.
- [9] Y. Kodama and K. Nagami, 位相空間論, 岩波書店, 1974.
- [10] A. A. Markov, On free topological groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, N. S. 31 (1941) 299-301.
- [11] A. A. Markov, On free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 30 (1950) 11-88; Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.

- [12] T. Nakayama, Note on free topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 471-475.
- [13] L. S. Pontrjagin, Continuous groups, Moscow, 1938; English translation: Topological groups, Princeton, N. I.: Princeton University Press 1939.
- [14] O. V. Sipacheva, Free topological groups of spaces and their subspaces, Preprint.
- [15] M. G. Tkačenko, Completeness of free abelian topological groups, Soviet Math. Dokl. 27 (1983) 341-345.
- [16] M. G. Tkačenko, On topologies on free groups, Czechoslovak Math. J. 34 (1984) 541-551.
- [17] V. V. Uspenskiĭ, On subgroups of free topological groups, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 847-849.
- [18] K. Yamada, Free Abelian topological groups and  $k$ -spaces, Submitted.
- [19] K. Yamada, Characterizations of a metrizable space such that every  $A_n(X)$  is a  $k$ -space, Topology Appl. (to appear).
- [20] K. Yamada, Remark on a topology of free topological groups, Manuscript.