

スカラー保存則に対する 差分近似の admissibility について.

科学技術庁航空宇宙技術研究所

数理解析部応用解析研究室

相曾秀昭 (Hideaki Aiso)

1. 問題の設定

本稿では、スカラー保存則の初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

に対する差分近似解が entropy 条件を満たす解に収束する為の条件について論じる。

但し、 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は C^1 -級である。本稿では初期関数 u_0 は有界、即ち、ある実数 m 及び M が存在して

$$m \leq u_0(x) \leq M, \quad x \in \mathbf{R},$$

であり、かつ、有界変動:

$$u_0 \in BV(\mathbf{R})$$

であると仮定する。

初期値問題 (1) の entropy 条件を満たす弱解の大域的存在との一意性は Oleinik[12] が示した。その証明中で Lax-Friedrichs の差分近似が使われていることは良く知られている。entropy 条件については同値な表現が幾つかあるが、ここでは Lax[9] による表現を用いる。

定義 1. 凸関数 U と $F' = U'f$ なる関数 F との対 (U, F) を entropy 対と呼ぶ。初期値問題 (1) の弱解 u の entropy 不等式

$$(2) \quad U(u)_t + F(u)_x \leq 0$$

が distribution の意味で任意の entropy 対について成立するとき、弱解 u は entropy 条件を満たすと言う。

また、admissible な解を次の様に定義する。

定義 2. $BV(\mathbf{R} \times [0, T]), T > 0$, に属する弱解 u が entropy 条件を満たし、かつ、 $u(\cdot, t) \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ について $\lim_{t \downarrow 0} u(\cdot, t) = u_0(\cdot)$ となるとき u を admissible な解と呼ぶ。

admissible な解は一意に定まる。

ここでは差分近似解を粘性型差分近似を用いて次の様に構成する。まず、CFL 条件

$$(3) \quad \lambda \max_{m \leq s \leq M} |f'(s)| \leq 1.$$

を満たす λ を固定し、次に

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

を満たすように x, t 方向それぞれの差分幅 $\Delta x, \Delta t$ を定める。差分の初期値 $\{u_i^0\}_{i \in \mathbf{Z}}$ は、有界性:

$$m \leq u_i^0 \leq M, \quad i \in \mathbf{Z}$$

及び有界変動性:

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} |u_{i+1}^0 - u_i^0| < +\infty$$

を満たすものとする。この初期値と粘性型差分近似

$$(4) \quad \begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \frac{\lambda}{2} \{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)\} \\ & + \frac{\lambda}{2} \left\{ a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right\}, \quad n, i \in \mathbf{Z}, n \geq 0 \end{aligned}$$

から $\{u_i^n\}_{n,i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$ が決定する。各 $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$ に対し、差分近似解 u_Δ が

$$u_\Delta(x, t) = u_i^n, \quad i\Delta x \leq x < (i+1)\Delta x, n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t$$

で定義される。

粘性型差分近似の例を次にあげておく。ここでは特に係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ に注目してそれらの例を特徴づける。

1. Lax-Friedrichs [8]

$$(5) \quad a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{LF} \equiv \frac{1}{\lambda}.$$

2. Engquist-Osher [4]

$$(6) \quad a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{EO}(u_i^n, u_{i+1}^n) \equiv \int_0^1 |f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta)| d\theta.$$

3. Godunov [5]

$$(7) \quad a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) \equiv \begin{cases} \max_{(s-u_i^n)(s-u_{i+1}^n) \leq 0} \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) - 2f(s)}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & u_i^n \neq u_{i+1}^n \\ |f'(u_i^n)|, & u_i^n = u_{i+1}^n. \end{cases}$$

4. Harten [6, 7]

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\lambda} Q \left(\lambda \int_0^1 f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) d\theta \right)$$

但し、 Q は次の条件を満たす関数である。

$$\begin{cases} |\alpha| \leq Q(\alpha) \leq 1, & -1 \leq \alpha \leq 1 \\ Q(0) \neq 0 \end{cases}$$

5. Murmann-Roe [14, 13]

$$(8) \quad a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) \equiv \left| \int_0^1 f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) d\theta \right|.$$

6. Law-Wendroff [10]

$$\begin{aligned} a_{i+\frac{1}{2}}^n &= a^{LW}(u_i^n, u_{i+1}^n) \\ &\equiv \lambda f' \left(\frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \right) \left| \int_0^1 f'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) d\theta \right|. \end{aligned}$$

上の例の係数の間には

$$(9) \quad a^{LW} \leq a^{MR} \leq a^G \leq a^{EO} \leq a^{LF} \equiv \frac{1}{\lambda}.$$

の関係がある。Harten の差分近似の $Q(\alpha)$ は条件の範囲内で小さめのもの、即ち、 $|\alpha|$ を $\alpha = 0$ の付近で条件に合わせて僅かに修正したものが選ばれるのが普通である。その場合、係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ は $a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n)$ と等しいか僅かに大きいということになる。1~5 は L^∞ -安定性と TV (全変動)-安定性を持ち、差分近似解の収束部分列の存在とそれらの弱解への収束が保証される。しかし今までに *admissible* な解への収束が証明されているのは 1~3 のみである。また、数値計算の経験から、一般に、解像度が向上する為には係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が小さいことが好ましいが小さすぎると *admissible* な解に収束しない場合があることが知られている。そこで、本稿に於ては、差分近似解の *admissible* な解への収束と係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ の関係について考察することにする。

なお、Crandall と Majda による論文 [2] は単調な差分近似の構成する近似解が *entropy* 条件を満たす弱解に収束することを示している。粘性型差分近似のうち単調なものにはこの結果を適用できる訳であるが、本稿はより広い範囲の粘性型差分近似について *entropy* 条件を満たす弱解への収束を示している。

2. 結果

まず、粘性型差分近似の構成する差分近似解の弱解への収束について LeRoux[11]の結果から次の事実が既に分かっている。

差分近似解の族 $\{u_\Delta\}$ について

$$(10) \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} u_\Delta(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \text{ 但し、空間は } L^1_{loc}(\mathbf{R})$$

を仮定する。差分近似 (4) の各係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が

$$(11) \quad a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda}$$

を満たせば、差分近似解の族 $\{u_\Delta\}$ は空間 $L^1_{loc}(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ で収束部分列を有し、その極限は全て $BV(\mathbf{R} \times [0, T])$, $T > 0$, に属する弱解となる。

これは粘性型差分近似解の弱解への収束に関する結果としてほぼ最終的なものである。そこで、admissible な解への収束の考察は条件 (11) の範囲内で行うことにする。

admissible な解への収束は、上の結果の収束部分列の極限たる弱解が entropy 条件を満たすこと (これを差分近似の entropy 条件適合性と言う) を示すことで保証される。そこで弱解への収束とその弱解の entropy 条件適合性を考慮し、初期値問題 (1) の admissible な解への収束を保証する概念として、strongly admissible な差分近似を次の様に定める。

定義 3. 差分近似 (4) が次の条件 (A1) 及び (A2) を満たすとき、差分近似 (4) は **strongly admissible** であるという。

(A1) 各係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が不等式 (11) を満たす。

(A2) (entropy 条件適合性) 任意の entropy 対 (U, F) に対し、その上界と下界が U にのみ依存する $(\Delta x, \Delta t)$ には依存しない一様有界な実数の組 $\left\{ A_{i+\frac{1}{2}}^n \right\}_{n,i \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$ が存在し、数値 entropy 不等式

$$(12) \quad \begin{aligned} & U(u_i^{n+1}) - U(u_i^n) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n)\} \\ & - \frac{\lambda}{2} \left\{ A_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

が各 n, i について成立する。

strongly admissible な差分近似は admissible な解に収束する差分近似解を構成する。即ち、

差分近似解 u_Δ の初期値への適合性 (10) を仮定したとき、差分近似 (4) が strongly admissible であれば、差分近似解 u_Δ は空間 $L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ に於て初期値問題 (1) の admissible な解に収束する。

1 番目の主定理は差分近似 (4) が strongly admissible である為の条件を係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ で以て記述するものである。

主定理 1. 差分近似 (4) の各係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が

$$(13) \quad a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda}$$

を満たせば、差分近似 (4) は strongly admissible である。

この定理の仮定 (13) は例にあげた Lax-Friedrichs, Engquist-Osher 及び Godunov の差分近似も含み、これら 3 つの差分近似について証明されている結果を包括統合し

ている。また、CFL 条件 (3) の右辺を $\frac{1}{2}$ に制限して同様の事実を示した Tadmor[15] の結果を自然な CFL 条件にまで拡張している。そして、(13) を満たさない場合にはある種の反例を構成できることから、一般的には差分近似が strongly admissible になる為の係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ の下限は Godunov の差分近似に対応する係数 $a^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ であることも分かる。

次に流束関数 f を狭義凸なものに制限した場合を考察する。

流束関数 f が狭義凸である場合、初期値問題 (1) の admissible な弱解に関し、次の結果が成立する。[3]

$BV(\mathbf{R} \times [0, T]), T > 0$, に属する初期値問題 (1) の弱解 u が、 U が狭義凸であるような 1 つの entropy 対 (U, F) について entropy 不等式 (12) を満たすならば、 u は admissible な解である。

言葉を換えれば、 U が狭義凸であるような 1 つの entropy 対 (U, F) について entropy 不等式 (12) が成立すれば任意の entropy 対について entropy 不等式 (12) が成立する、ということになる。

そこで、(A2) を次の条件 (A2)' のように弱めても、差分近似解の admissible 解への収束が保証できる。

(A2)' U が狭義凸である或る entropy 対 (U, F) に対し、一様有界な (その上界と下界が $\Delta x, \Delta t$ に依存しないという意味) 係数の組 $\left\{ A_{i+\frac{1}{2}}^n \right\}_{n, i \in \mathbf{Z}, n \geq 0}$ が存在し、数値 entropy 不等式 (12) が各 n, i に対して成立する。

流束関数 f が凸な場合、差分近似 (4) が (A1) 及び (A2)' を満たすとき差分近似 (4) は admissible であるという。admissible な差分近似は admissible な弱解に収束する差分近似解を構成する。即ち、

初期値問題 (1) の流束関数 f が狭義凸であるとする。差分近似解 u_Δ の初期値への適合性 (10) を仮定したとき、差分近似 (4) が admissible であれば、差分近似解 u_Δ は空間 $L^1_{loc}(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ に於て初期値問題 (1) の admissible な解に収束する。

次で述べるように、流束関数 f を狭義凸に制限する仮定の下では、主定理 1 よりも緩い条件で admissible な弱解への収束が保証できる。即ち、 $a^n_{i+\frac{1}{2}}$ が Godunov の差分近似に対応する係数 $a^G(u^n_i, u^n_{i+1})$ より小さくても admissible な差分近似が存在するのである。

主定理 2. 流束関数 f は狭義凸であるとする。 $0 < \epsilon < 1$ なる任意の ϵ に対し、各

$$(14) \quad \max \left\{ a^{MR}(u^n_i, u^n_{i+1}), \frac{\epsilon}{\lambda} \operatorname{sgn}(u^n_{i+1} - u^n_i) \right\} \leq a^n_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\lambda}$$

を満たせば、差分近似 (4) は admissible である。

不等式 (14) の最左辺は、Murmman-Roe の係数 $a^{MR}(u^n_i, u^n_{i+1})$ を基にして、 $u^n_{i+1} > u^n_i$ の場合にそれが $\frac{\epsilon}{\lambda}$ を下回れば $\frac{\epsilon}{\lambda}$ に取替える、という意味がある。この取替の操作で、Murmman-Roe の差分近似では保存されてしまう速度 0 の逆衝撃波 (即ち entropy 条件に反する衝撃波) が除去されるようになる事実は良く知られているが、主定理 2 は更に、この操作により差分近似が admissible なものに改良されることを示している。これは、実用上有効とされる Harten の差分近似の考え方を理論的に裏付けることになる。又、Murmman-Roe の差分近似は admissible ではないので、主定理 2 は admissible な差分近似を係数 $a^n_{i+\frac{1}{2}}$ の範囲により特徴づける結果として最良のものである。

従来、係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ が小さい場合の entropy 条件適合性は、予め固定された特定の entropy 対に対してのみ考察され、それ故に CFL 条件への制限が生じた。主定理 2 の証明に於ては数値 entropy 不等式を成立させる entropy 対が $\epsilon, f, \lambda, u_0$ に応じて構成される。そうすることで、 $a_{i+\frac{1}{2}}^n < a^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ の場合の entropy 条件適合性について、CFL 条件 (3) に制限を加えずに一般性のある結果を初めて得ることができたのである。

3. 証明の概略

以下で、主定理 1 及び 2 の証明の概略を述べる。詳しくは [1] を参照されたい。

証明の中では修正流束関数 (modified flux function) が重要な役割を果たす。修正流束関数により、係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ を解析に有利な別の形で表現することが可能となり、更には条件 (A2) 及び (A2)' の数値 entropy 不等式の中の係数 $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ の具体的構成が可能になる。係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ に対応する修正流束関数は次の様に定義される。

定義 4.

・ $u_i^n \neq u_{i+1}^n$ の場合

s が u_i^n と u_{i+1}^n を両端とする開区間の外では

$$g(s) = f(s)$$

であるような関数 g が

$$(15) \quad \int_0^1 |g'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta)| d\theta = a_{i+\frac{1}{2}}^n$$

及び

$$(16) \quad \max_{(s-u_i^n)(s-u_{i+1}^n) \leq 0} \frac{g(u_i^n) + g(u_{i+1}^n) - 2g(s)}{u_{i+1}^n - u_i^n} = a_{i+\frac{1}{2}}^n$$

を満たすとき、 g は係数 $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ に対応する修正流束関数であるという。

・ $u_i^n = u_{i+1}^n$ の場合の修正流束関数は流束関数自身 f のみとする。

$a_{i+\frac{1}{2}}^n$ に対応する修正流束関数は通常は一意でないが、証明では次により定義される修正流束関数 $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ を用いる。

・ $u_i^n \leq u_{i+1}^n$ の場合

$s < u_i^n$ 又は $s > u_{i+1}^n$ に対し、 $g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) = f(s)$

$u_i^n \leq s \leq u_{i+1}^n$ に対し

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) = \max \left\{ -\frac{1}{\lambda}(s - u_i^n) + f(u_i^n), \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n, \frac{1}{\lambda}(s - u_{i+1}^n) + f(u_{i+1}^n) \right\}$$

$$\left(\text{但し、 } \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \{ f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) \} - \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i+1}^n) \right)$$

・ $u_{i+1}^n < u_i^n$ の場合

$s < u_{i+1}^n$ 又は $s > u_i^n$ に対し、 $g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) = f(s)$

$u_{i+1}^n \leq s \leq u_i^n$ に対し、 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ は上の場合と同様で

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n(s) = \max \left\{ \frac{1}{\lambda}(s - u_{i+1}^n) + f(u_{i+1}^n), \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n, -\frac{1}{\lambda}(s - u_i^n) + f(u_i^n) \right\}$$

次に、entropy 対 $(U(\cdot; k), F(\cdot; k))$, $k \in \mathbf{R}$ を 2 つの関数

$$s^+ = \frac{1}{2} \{ s + |s| \} = \begin{cases} s, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

及び

$$\chi^+(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

を用いて、

$$\begin{cases} U(s; k) = (s - k)^+ \\ F(s; k) = \chi^+(s - k) \{ f(s) - f(k) \} \end{cases}$$

により定義し、更に、

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n(k) = \int_0^1 \chi^+(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta - k) \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta) \right| d\theta$$

と定める。任意の entropy 対 (U, F) に対し

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_m^M A_{i+\frac{1}{2}}^n(k) dU'(k) + a_{i+\frac{1}{2}}^n U'(m)$$

(但し積分は Stieltjes 積分)

とおけば数値 entropy 不等式 (12) の左辺は

$$(17) \quad \begin{aligned} & U(u_i^{n+1}) - U(u_i^n) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n)\} \\ & \quad - \frac{\lambda}{2} \left\{ A_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \\ & = \int_m^M \left[U(u_i^{n+1}; k) - U(u_i^n; k) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; k) - F(u_{i-1}^n; k)\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\lambda}{2} \left\{ A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(k)(u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \right] dU'(k) \end{aligned}$$

となる。上式右辺の被積分関数

$$\begin{aligned} & U(u_i^{n+1}; k) - U(u_i^n; k) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; k) - F(u_{i-1}^n; k)\} \\ & \quad - \frac{\lambda}{2} \left\{ A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(k)(u_i^n - u_{i-1}^n) \right\} \end{aligned}$$

は entropy 対 $(U(\cdot; k), F(\cdot; k))$ に対する数値 entropy 不等式の左辺であることに注意されたい。これを評価して一般の entropy 対に対する数値 entropy 不等式の成否を考える。

さて、 $k \in \mathbf{R}$, 及び $z \in \mathbf{R}$ に対し、

$$(18) \quad \begin{aligned} & R_+(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n) \\ & = \{\chi^+(z - k) - \chi^+(u_i^n - k)\} \int_k^{u_i^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| + (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right\} ds \\ & \quad + \{\chi^+(z - k) - \chi^+(u_{i+1}^n - k)\} \int_k^{u_{i+1}^n} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\ & \quad + \{\chi^+(z - k) - \chi^+(u_i^n - k)\} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - f(k) \right\} \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
 & R_-(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n) \\
 &= \{\chi^+(z-k) - \chi^+(u_{i+1}^n - k)\} \int_k^{u_{i+1}^n} \left\{ \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| - (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right\} ds \\
 (19) \quad &+ \{\chi^+(z-k) - \chi^+(u_i^n - k)\} \int_k^{u_i^n} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \left| (g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s) \right| \right\} ds \\
 &- \{\chi^+(z-k) - \chi^+(u_{i+1}^n - k)\} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - f(k) \right\}
 \end{aligned}$$

とおけば、

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & U(u_i^{n+1}; k) - U(u_i^n; k) + \lambda \left\{ \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n(k) \right\} \\
 &= \frac{\lambda}{2} \left\{ R_+(k; u_i^{n+1}, u_{i-1}^n, u_i^n, g_{i-\frac{1}{2}}^n) + R_-(k; u_i^{n+1}, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n) \right\}
 \end{aligned}$$

となる。 $R_+(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n)$, $R_-(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n)$ 共に初めの2つの項は常に0以下となる。最後の項の

$$\{\chi^+(z-k) - \chi^+(u_i^n - k)\} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - f(k) \right\}$$

及び

$$-\{\chi^+(z-k) - \chi^+(u_{i+1}^n - k)\} \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - f(k) \right\}$$

が、各 $k, z \in \mathbf{R}$, $n, i \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$ に対し0以下になる条件を考えると、各 $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ について

$$(21) \quad \operatorname{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) \left\{ g_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - f(k) \right\} \leq 0, \quad k \in \mathbf{R}$$

であれば十分であることが分かる。不等式(21)は $a_{i+\frac{1}{2}}^n \geq a^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ と同値なので主定理1が証明される。なお、 $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ の一様有界性についても

$$\left| A_{i+\frac{1}{2}}^n \right| < \frac{2}{\lambda} \sup_{m \leq s \leq M} |f'(s)|$$

となり確かに成立している。

主定理 2 の証明は主定理 1 の証明が基になる。しかし、仮定 (14) の下では不等式 (21) の成立は保証されず、(17) 右辺の被積分関数は k の値によっては正になってしまう。ただ、流束関数 f は狭義凸に限定されているので、 U が狭義凸であるような entropy 対 (U, F) を一つ具体的に構成し、その entropy 対について数値 entropy 不等式の成立を示せば良い。

その為に、 $R_+(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n)$, $R_-(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n)$ をより詳細に評価する。不等式 (21) が成立する場合は主定理 1 の証明がそのまま利用できる所以、不等式 (21) が成立しない場合のみを考察する。不等式 (21) が成立しないのは、 s_0 で $f(s)$ が最小となる s の値を表すことにすると

$$u_i^n < s_0 < u_{i+1}^n \quad \text{かつ} \quad a_{i+\frac{1}{2}}^n < a^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$$

の場合である。この場合、数値流束関数 $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ が流束関数 f より大きくなる部分が生じる為に不等式 (21) が満たされない訳である。そこで、 \bar{v}_i^n と \hat{v}_{i+1}^n を

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{v}_i^n = u_i^n + \lambda \left\{ f(u_i^n) - \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n \right\} \\ \hat{v}_{i+1}^n = u_{i+1}^n - \lambda \left\{ f(u_{i+1}^n) - \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n \right\} \end{cases}$$

によって定め、更に \bar{w}_i^n と \hat{w}_{i+1}^n を

$$(23) \quad \begin{cases} f(\bar{w}_i^n) = f(\hat{w}_{i+1}^n) = \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n \\ u_i^n \leq \bar{w}_i^n < \hat{w}_{i+1}^n \leq u_{i+1}^n \end{cases}$$

を満たす実数として定める (一意性は保証される) と、次の補題が得られる。

補題 1. $z \in [m, M]$ とする。

$$m \leq u_i^n < s_0 < u_{i+1}^n \leq M$$

及び

$$a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n < a^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$$

が成立していれば、 $R_{\pm}(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n)$ は次のように評価される。

$$(24) \quad R_{\pm}(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n) \leq \begin{cases} 0 & , \quad k \leq \frac{\bar{v}_i^n + \bar{w}_i^n}{2} \\ \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - f(k) & , \quad \frac{\bar{v}_i^n + \bar{w}_i^n}{2} \leq k \leq \frac{\hat{v}_{i+1}^n + \hat{v}_{i+1}^n}{2} \\ 0 & , \quad k \geq \frac{\hat{v}_{i+1}^n + \hat{v}_{i+1}^n}{2} . \end{cases}$$

この評価が、我々の求める entropy 対 (U, F) を構成し評価する為に重要なものである。

さて、関数 $h(\tau)$ を $f(s) = \tau$ なる s の値の個数が 1 個以下ならば 0、2 個ならばそれら 2 つの値の差の絶対値と定め、次に関数 P を

$$P(s) = \{h(f(s))\}^{\frac{1}{\gamma}}$$

と定める。但し、 γ は $\epsilon, \lambda, f, m, M$ に依存して決る定数である。補題 1 を利用して、この P に対する不等式

$$(25) \quad \int_m^M P(k) R_{\pm}(k; z, u_i^n, u_{i+1}^n, g_{i+\frac{1}{2}}^n) dk \leq 0$$

が得られる。

そして $U'' = P$ かつ $F' = U'f$ なる関数の対 (U, F) をとれば、これが求める entropy 対である。実際、entropy 対 (U, F) に対し、 U が狭義凸であることは定義から明らかであるし、数値 entropy 不等式 (つまり (17) 式の右辺の積分が 0 以下であること) は不等式 (25) から直ちに得られる。これで主定理 2 が証明された。

参考文献

- [1] H. Aiso, Admissibility of difference approximations for scalar conservation

laws, to appear.

- [2] M. Crandall and A. Majda, Monotone difference approximations for scalar conservation laws, *Math. Comp.*, 34:1–21, 1980.
- [3] R. J. Diperna, Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws, *Indiana Univ. Math. J.*, 28:244–257, 1979.
- [4] B. Engquist and S. Osher, Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations, *Math. Comp.*, 34:45–75, 1980.
- [5] S. K. Godunov, Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian), *Mat. Sb. (N.S.)*, 47:251–306, 1959.
- [6] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 49:357–393, 1983.
- [7] A. Harten, On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(1):1–23, 1984.
- [8] P. D. Lax, Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7:159–193, 1954.
- [9] P. D. Lax, Shock waves and entropy, In *Contributions to nonlinear functional analysis*, pages 603–634, Academic Press, New York, 1971.
- [10] P. D. Lax and B. Wendroff, Systems of conservation laws, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:217–237, 1960.

- [11] A. Y. LeRoux, A numerical conception of entropy for quasi-linear equations, *Math. Comp.*, 31:848–872, 1977.
- [12] S. Osher, Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 121(2):217–235, 1984.
- [13] P. L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 43:357–372, 1981.
- [14] P. L. Roe, The use of Riemann Problem in finite difference schemes, In *Lecture Notes in Physics*, 141, pages 354–559, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [15] E. Tadmor, Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes, *Math. Comp.*, 43:369–382, 1984.