数理解析研究所講究録
第 787 巻 1992 年 113-119

誤差評価付き 存在と一意性の定理について

徳島大学工学部数学教室　　篠原　能材 (Yoshitane SHINOHARA)

１９５０年代の後半．筆者が大学院生のころ．占部　実　教授の御指導の下で
van der Pol方程式

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{d\tau^2}-\lambda(1-x^2)\frac{dx}{d\tau}+x=0\qquad(\lambda>0)$$

の極限閉軌道解$x(\tau)$(limit cycle solution)およびその周期ωを求めることとなった．

制御係数λの値が充分に大きいときは．Dorodnitcyn[1] による漸近展開：

$$(2)\qquad \omega\sim\ 1.613706\ \lambda\ +7.01432\ \lambda^{-\frac{1}{3}}-\frac{22}{9}\ \frac{\log\lambda}{\lambda}+0.0087\ \lambda^{-1}+0(\lambda^{-\frac{4}{3}})$$

が知られており．これを用いて　$\lambda=10$ のとき，$\omega=18.831$ と算出されている．

他方．λの値が中位の大きさのときの周期はどの位の大きさになるのか．Lefschetz[2] が指摘しているように．その重要性にもかかわらず．その当時は算出されていなかった．

λの値が中位の大きさのときの (1)の周期解およびその周期を解析的に求めることは極めて困難なので．当時は数値計算を用いた．しかし．数値結果に対する誤差評価を与える定理を当時は完成していなかったので．算出した数値結果の有効数字が何個有るのかを知ることが出来ず．不安であった．

また．漸化式(2)は．λの値が充分に大きいときに成り立つ式であるが．充分に大きい値とはどの位の大きさなのか？　$\lambda=10$ は充分に大きい値なのか？　何の保証もない．

当時は．(1)を連立系

$$\frac{dx}{d\tau}=y$$

$$\frac{dy}{d\tau}=-x+\lambda(1-x^2)y$$

すなわち

$$\frac{d\mathcal{X}}{d\tau}=X(\mathcal{X}),\quad \mathcal{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},X(\mathcal{X})=\begin{pmatrix}y\\-x+\lambda(1-x^2)y\end{pmatrix}$$

に書き直し，これに予測子－修正子法：

$$\mathcal{X}_n=\mathcal{X}_{n-1}+\frac{h}{720}\{11X(\mathcal{X}_{n-3})-74X(\mathcal{X}_{n-2})+456X(\mathcal{X}_{n-1})+346X(\mathcal{X}_n)-19X(\mathcal{X}_{n+1})\},$$

$$\mathcal{X}_{n+1}=\mathcal{X}_n+\frac{h}{720}\{251X(\mathcal{X}_{n-4})-1274X(\mathcal{X}_{n-3})+2616X(\mathcal{X}_{n-2})-2774X(\mathcal{X}_{n-1})+1901X(\mathcal{X}_n)\},$$

を用いて，周期解 $\mathcal{X}(\tau)$ および その周期 ω を算出した．なお，予測子－修正子法の出発値は $\mathcal{X}(\tau)$の $\tau=0$ における Taylor 級数により求めた．

詳細は，参考文献［4］を参照してほしい．

ところで，論文［3］［4］を発表して，間も無く，Krogdahl［5］が同じ問題の計算結果を発表している事を知った．彼の結果[5]と我々の結果Urabe et al.'s[3][4]および Galerkin法による誤差評価付きの我々の結果 Ours［9][10]を Table 1 に示した．

この誤差評価から，Krogdahl [5] が我々の Urabe et al.'s [3] [4] よりも，良い結果を算出していた事が判った．もっとも，当時，我が国では コンピュータが使えず計算結果 [3][4] は，卓上の電動計算機を用いて，小数点以下５桁の固定小数点演算で四捨五入法により算出したものであり，他方，Krogdahl [5]は，コンピュータ IBM650 を用いて，Runge-Kutta-Gill法で算出している事を付記する．

さて，Galerkin法による，誤差評価付きの存在と一意性の定理を導こう．

方程式(1)に，変数変換 $\tau=\omega t/2\pi$ を行なうと

(3) $$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda(1-x^2)\frac{\omega}{2\pi}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 x=0$$

となる．これを連立形

(4) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)^2 x + \dfrac{\omega}{2\pi}\lambda(1-x^2)y \\ \dfrac{d\omega}{dt}=0 \end{cases}$$

に直し，これを2π周期境界条件

(5) $$x(0)-x(2\pi)=0,\quad y(0)-y(2\pi)=0$$

の下で解けばよい．しかし，自励系(3)の2π周期解$x(t)$は，任意の実数θに対して$x(t+\theta)$も自励系(3)の2π周期解となるから，境界値問題(4)(5)の解 $x(t)$のm位のガレルキン近似：

$$x_m(t)= a_0 + \sum_{n=1}^{m}(a_{2n-1}\sin nt + a_{2n}\cos nt)$$

は一意には決まらない．従って，未定係数 a_n $(n=0,1,2,...,2m)$を数値計算で求めることはできない．この問題点を解消するために，自励系(3)の2π周期解の孤立性を保つような付加条件：

$$\aleph(u)= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos t\,dt +0.625 =0,$$

$$u=\mathrm{col}[x(t),y(t),\omega]$$

を追加した([７])．以上をまとめると，境界値問題：

$$(6)\qquad \frac{du}{dt}=X(u),\qquad f(u)=0$$

ただし，

$$X(u)=\begin{pmatrix} y \\ -\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 x+\frac{\omega}{2\pi}\lambda(1-x^2)y \\ 0 \end{pmatrix},\quad f(u)=\begin{pmatrix} x(0)-x(2\pi) \\ y(0)-y(2\pi) \\ \aleph(u) \end{pmatrix}$$

のm位のガレルキン近似：

$$\bar{u}(t)=u_m(t)=b_0+\sum_{n=1}^{m}(b_{2n-1}\sin nt+b_{2n}\cos nt)$$

を計算し，この近似解の誤差を評価すればよい．

さて，$I=[0,2\pi]$，$\|u\|_c=\sup_{t\in I}\|u(t)\|$ と定義する．行列 $X(u)$の u に関するヤコビ行列 を $X_u(u)$ とし，$f(u)$ の $u=\bar{u}$ における フレシエ微分を $f'(\bar{u})$ で表す．

$$A(t)=X_u(\bar{u}(t)),\quad L=f'(\bar{u}(t))$$

を用いて，次の定理１ および 定理２ が成り立つ．

定理１（［６］）． 方程式（６）の第一変分方程式

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z$$

の基本行列を $\Phi(t)$ とし，$\Phi(0)=E$(単位行列) とする． 行列G＝f′$(\bar{u})[\Phi(t)]$ が正則ならば，写像 T:

$$Th=\left[\frac{dh}{dt}-A(t)h,\ Lh\right]\in C[I]\times R^3$$

は，逆作用素 T^{-1} をもち，かつ， $\|T^{-1}\|\leq \max(\|H_1\|_c,\|H_2\|_c)$ が成り立つ．

ただし， $\phi(t)\in C[I]$, $v\in R^3$ に対し

$$H_1\phi=\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)\phi(s)ds-\Phi(t)G^{-1}L\left[\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)\phi(s)ds\right],$$

$$H_2v=\Phi(t)G^{-1}v.$$

定理2（[8]）． 行列G＝f′$(\bar{u})[\Phi(t)]$ が正則であると仮定し，近似解 $\bar{u}(t)$ のδ近傍：

$$U_\delta=\{u;\|u-\bar{u}\|_c\leq\delta,\ u(t)\in C[I]\}$$

を考える．いま，次の２条件を満たす正数δと非負数κ＜１が存在するものとする．

(i) $\|X_u(u)-X_u(\bar{u})\|_c+\|f'(u)-f'(\bar{u})\|\leq\dfrac{r}{M}$ on U_δ

(ii) $\dfrac{Mr}{1-\kappa}\leq\delta$.

ただし， $M=\max(\|H_1\|_c,\|H_2\|_c)$, $r=\left\|\dfrac{d\bar{u}}{dt}-X(\bar{u})\right\|_c+\|f(\bar{u})\|$.

このとき，境界値問題(5)は，領域：

$$D_\delta=\{u;\ \|u-\bar{u}\|_c\leq\delta,\ u(t)\in C^1[I]\}$$

において，ただ一つの解 $\hat{u}(t)$ を持ち，かつ，ガレルキン近似 $\bar{u}(t)$ について誤差評価

$$(7)\qquad \|\hat{u}-\bar{u}\|_c\leq\frac{Mr}{1-\kappa}$$

が成り立つ．

この定理２ が 誤差評価付きの存在と一意性の定理 であり，不等式(7)の右辺の値を Table 1 に error boundとして示した．

尚，この定理は，実数演算を前提に成り立つているが，コンピュータの浮動小数点数演算で実行するときは，当然，丸め誤差が混入する．この種の誤差解析が今後の課題である．

また，この定理を一般化することにより，通信理論の変調や検波の解析に現われる準周期現象の解明に有効であると思われる．([9][10])．

λ	Urabe et al.'	Krogdahl	Ours	error bound
1	6.687	6.66328	6.66328 68593 23137	0.15×10^{-11}
2	7.6310	7.62986	7.62987 44796 74841	0.16×10^{-9}
3	8.8613	8.85946	8.85909 54997 19845	0.37×10^{-7}

Table 1

参考文献

[1] Dorodnitcyn, A., Asymptotic solution of the van der Pol equation, Prikl. Mat. Mekh., Inst. Mech. Acad. Sci. USSR. 11(1947), 313-328.

[2] Lefschetz, S., Numerical calculations in nonlinear mechanics, in Problems for the Numerical Analysis of the Future, 15(1951), Applied Mathematics Series (National Bureau of Standards), p. 10.

[3] Urabe, M., Periodic solution of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda=0(0.2)1.0$, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 21(1958), 193-207.

[4] Urabe, M., Yanagiwara, H. and Shinohara, Y., Periodic solutions of van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda=2\sim10$, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 23(1960), 325-366.

[5] Krogdahl, W.S., Numerical solutions of van der Pol equation, Z. Angew. Math. Phys., 11(1960), 59-63.

[6] Urabe, M., The Newton method and its application to boundary value problems with nonlinear boundary conditions, Proc. US-Japan Seminar on Differential and Functional equations, Benjamin, New York, (1967), 383-410.

[7] Shinohara, Y., Numerical analysis of periodic solutions and their periods to autonomous differential systems, J. Math. Tokushima Univ., 11(1977), 11-32.

[8] Shinohara, Y. and Yamamoto, N., Galerkin approximations of periodic solution and its period to van der Pol equation, J. Math. Tokushima Univ., 12(1978), 19-42.

[9] 篠原 能材, 非線形振動の準周期 解の数値解析, Computrol No. 12, コロナ社 71-75.

[10] Shinohara, Y., Kurihara, M. and Kohda, A., Numerical analysis of quasiperiodic solutions to nonlinear differential equations, Japan J. Appl. Math., 3(1986), 315-330.