

## 不均一プラズマ中の波動解析への WKB 法の応用

核融合科学研究所 佐貫 平二 (Heiji Saruki)

プラズマの集団運動の代表的なものの一つにプラズマ中の各種の波動現象がある。特に、密度や温度勾配などの不均一性がプラズマ中に存在すると、その原因や性質による特徴的な波動現象が現れる。波動現象とれ自身プラズマ物理学の興味ある研究対象ではあるが、加えて核融合プラズマの閉じ込めや加熱過程とも密接に関連している。ここでは線形化近似の枠内に限定し、波動伝搬や安定性を調べるための固有モード解析法について、その現状と問題点にふれながら概説する。

### 目次

1. プラズマ中の各種波動とその性質
2. 固有モード解析法の紹介
3. WKB法による解析例
4. まとめ

### 1-1. 波動を特徴づける各種の要素と分類

プラズマ中の波動は、様々な要素によって特徴づけられる。これらのいくつかを整理すると、

#) Electrostatic or Electromagnetic

#) Collisional or Collisionless

#) Electron Wave or Ion Wave

#) 速度分布: Maxwellian or Non-Maxwellian

#) B-Field: Sheared or Shearless

#) Inhomogeneities: involved or not

density, temperature, density-temperature,

E-field

#) 粒子の捕捉性: Trapped or Untrapped particles

#) Boundary: bounded or unbounded

#) Nonlinearity: Linear or Nonlinear

#) Locality: Local or Nonlocal

#) Characteristics: Temporal or Spatial

のような要素があげられる。静電的な波、電磁的な波、イオン及び電子の関与する代表的なものを以下にまとめる。

*Electron waves (electrostatic)*

$$B_0 = 0 \text{ or } \mathbf{k} \parallel B_0: \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2}k^2v_{th}^2 \quad (\text{Plasma oscillations})$$

$$\mathbf{k} \perp B_0: \quad \omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2 \quad (\text{Upper hybrid oscillations})$$

*Ion waves (electrostatic)*

$$B_0 = 0 \text{ or } \mathbf{k} \parallel B_0: \quad \omega^2 = k^2v_s^2 \\ = k^2 \frac{\gamma_c KT_c + \gamma_i KT_i}{M} \quad (\text{Acoustic waves})$$

$$\mathbf{k} \perp B_0: \quad \omega^2 = \Omega_c^2 + k^2v_s^2 \quad (\text{Electrostatic ion cyclotron waves})$$

or

$$\omega^2 = \omega_i^2 = \Omega_c \omega_c \quad (\text{Lower hybrid oscillations})$$

*Electron waves (electromagnetic)*

$$B_0 = 0: \quad \omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2 \quad (\text{Light waves})$$

$$\mathbf{k} \perp B_0, \mathbf{E}_1 \parallel B_0: \quad \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{O wave})$$

$$\mathbf{k} \perp B_0, \mathbf{E}_1 \perp B_0: \quad \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \quad (\text{X wave})$$

$$\mathbf{k} \parallel B_0: \quad \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - (\omega_c/\omega)} \quad (\text{R wave}) \\ (\text{whistler mode})$$

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + (\omega_c/\omega)} \quad (\text{L wave})$$

*Ion waves (electromagnetic)*

$$B_0 = 0: \quad \text{none}$$

$$\mathbf{k} \parallel B_0: \quad \omega^2 = k^2v_A^2 \quad (\text{Alfvén wave})$$

$$\mathbf{k} \perp B_0: \quad \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad (\text{Magneto-sonic wave})$$

## 1-2. プラズマ分散式

簡単の爲に slab 座標を考へ  $(x, y, z)$ , 磁場は  $z$ -方向, 密度及び温度勾配は  $x$ -方向だけに存在するものと仮定し, 擾動電磁場を,  $\tilde{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\hat{e}_z$ ,  $\tilde{B} = \nabla \times (A_z\hat{e}_z)$  とし,  $\{\Phi(\vec{r}, t), A(\vec{r}, t)\} = \{\bar{\Phi}(x), \bar{A}(x)\}\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$  のように Fourier 展開すると, collisionless な場合には Vlasov - Maxwell 方程式から, 関係式

$$\begin{bmatrix} k^2 + Q - P & \frac{\omega}{k_z c} P \\ -\frac{\omega}{k_z c} P & k^2 + \left(\frac{\omega}{k_z c}\right)^2 P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

が得られる。(1)式で,  $P$  及び  $Q$  は  $\omega$ ,  $\vec{k}$ , ドリフト運動に関連する項などの関数で, イオン及び電子からの寄与を含んでいる。具体的な表式については文献1を参照されたい。通常,  $\det |M| = 0$  から求まる関係式は, プラズマ分散式と呼ばれ, プラズマ中の波動伝搬を記述する基本的な関係式である。静電波の場合には,  $\bar{A} \rightarrow 0$ ,  $\omega/k_z c \rightarrow 0$  で,

$$(k^2 + Q - P)\Phi(k) = 0 \quad (2)$$

が分散式となり, 磁気音波を含む場合には, 更に  $A_{\perp}$ -成分の項が加わり, (1)式の代りに  $3 \times 3$  のマトリックスで表される。

## 2. プラズマ中の波動解析法

波動解析法としては、①局所分散式による解析法、②二階微分方程式に基づく解析法、③積分方程式（ここでは、特に波数空間）に基づく固有モード解析法、などが検討されており、②及び③に関しては、数値解法による方法と WKB 法による方法が論いられている。以下の議論では、プラズマ中の静電ポテンシャルをフーリエ展開表示として、

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 \exp\left[i\left(\int^x k_x(x') dx' + k_y y + k_z z - \omega t\right)\right] \quad (3)$$

で表わし、座標系としては slab 座標を採用する。但し  $x$  は不均一方向の座標である。

### ① 局所分散式による解析法

前節で述べたように、局所分散関係式は、簡単な場合には、

$$\epsilon[k_x(x), k_y, k_z; \omega] \phi = 0, \quad (4)$$

で与えられる。この場合、波動伝搬について定性的な議論はできるが、 $k_x(x)$  の空間構造は決定できないので、 $\omega$  は  $\vec{r}$  の関数として定量的には決定されない。従って、不均一性に伴うモードの構造を考慮した解析が必要となる。

## ② 二階微分方程式に基づく解析法

(4)式で,  $k_x(x)$  を微分演算子  $-i\partial/\partial x$  で置換し, 更に  $k_x \rho_i \ll 1$  ( $\rho_i$  はイオンのラーマー半径) の条件の下で展開し,  $k_x \rho_i$  に関して二次の項まで残すと, 二階微分方程式の型で,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - P(x, k_y, k_z; \omega)\phi(x) = 0, \quad (5)$$

のような固有モード方程式が得られる。(5)式の導出及び解析例については, 文献[2]で詳しく検討されている。ここでは簡単な場合について紹介する。 $P(x)$  が real で,  $x$  のゆるやかに変化する関数の場合には, WKB法の適用により, (5)式で記述されるプラズマ中の波動の漸近的な形状及び, 分散関係式が“量子化条件”の型で得られる。 $P(x)$  は一般には complex で与えられるが, この場合にも同様に議論できる。すなわち,  $P(x)$  の二つの複素 turning point を  $z_1, z_2$  ( $P(z_1) = P(z_2) = 0$ ) とし,  $C$  の path によって  $P(z_c)$  が real になるように, path  $C$  を選ぶと, (ここで,  $z_c = x_c + iy_c$  と定義する)  $C$  によって (5)式は

$$\frac{d^2\phi(z_c)}{dz_c^2} - P(z_c)\phi(z_c) = 0, \quad (6)$$

で表わされる。従って, (6)式の WKB解 及び量子化条

件は、各々次のように求められる。

$$\phi(z_c) = \sum_{\pm} A_{\pm} P^{-1/4}(z_c) \exp\left[\pm \int_{z_1, z_2}^{z_c} P^{1/2}(z) dz\right], \quad (6)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} [-P(z_c)]^{1/2} dz_c = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

$z$ -plane 上の  $\Gamma$  の, path  $C$ , turning point  $z_1, z_2$ , Anti-Stokes line, Branch-cut の様子を図1aに, WKB 解の振舞いを図1bに示す。

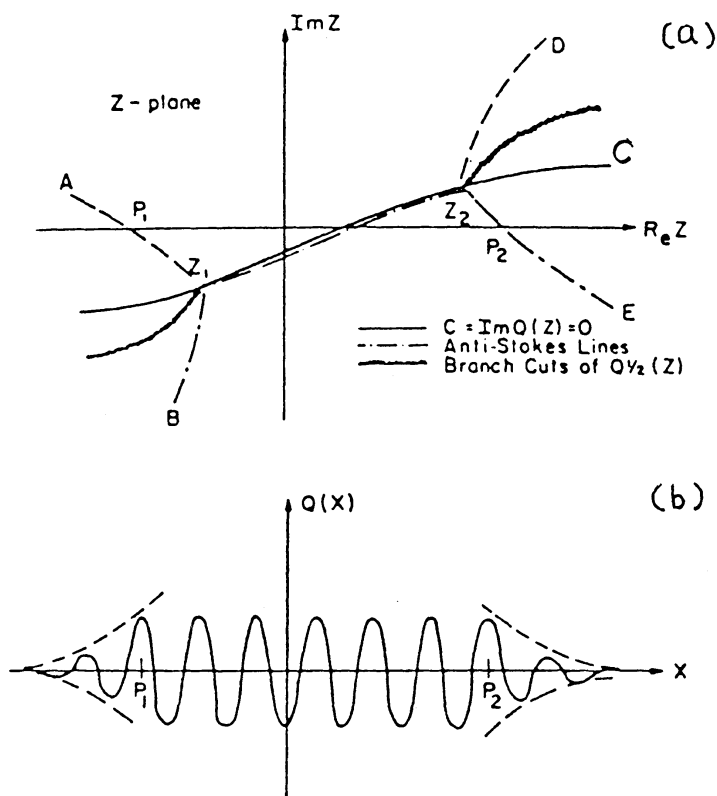


図1 turning point, Anti-Stokes line と WKB 解

### ③ 波数空間での積分方程式に基づく固有モード解析法

シート状のプラズマや強い不均一性によって、波の局在性が著しい場合には、 $k_x \rho_L \geq 1$  の条件も満たされることもある。このような場合には高階の微分方程式によって記述されることになり、解法は困難となる。従って、微分方程式の代わりに波数空間での積分方程式

$$F(k)\phi(k) = \int K(k, k')\phi(k')dk', \quad (8)$$

に基づき、 $k_x \rho_L \geq 1$  の場合にも適用可能な固有モード解析法についても検討されている〔文献3~4〕。ここで、 $F(k) = k^2 + k_y^2 + k_z^2$  で、 $k_x$  は  $k$  とした。(8)式で  $k' \rightarrow k$  の極限では、均一プラズマ中の静電波に対する分散式も得られる。(8)式の解法として、WKB法を適用する方法と直接数値的に解く方法の二通りの解析法ある。ここでは、WKB法を適用して、(7)式に対応する“量子化条件”の導出について述べてみる。量子化条件の導出及び固有周波数を決める上での有効性に関して、二階微分方程式の場合にはよく検討されている。しかしながら、積分方程式や電磁的な波動の場合には必ずしも自明ではない。以下の議論においては、簡単のために静電モードに限定して話をする。



### ③-1. 量子化条件の導出

積分方程式(8)のWKB法に基づく解析法の基本となる量子化条件について考察する。実空間においては、アイコナル(eikonal)関数を導入して、量子化条件もどのように導出するかよく検討されている<sup>5),6)</sup>。同様に、ここでは波数空間でのeikonal関数 $g(k)$ を

$$\phi(k) = \exp\left(-i \int^k g(k') dk'\right), \quad (9)$$

のように導入する。更に特徴的な空間的スケールを $L$ 、波数を $k$ とした時、 $kL \gg 1$ の場合について考えるものとして、eikonal関数を漸近展開

$$g(k) = g_0(k) + g_1(k) + \dots$$

$$g(k') = g(k) + (k' - k)g'(k) + O[L \cdot (kL)^{-2}] + \dots$$

する。 $g_0(k)$ は $O(L)$ 、 $g_1(k) \sim O[L \cdot \frac{1}{kR}]$ 、 $k' - k \approx 1/L$ を仮定した。これらの $\sigma$ -ダニングを念頭において、(9)式を(8)式に代入すると、 $O(L)$ 、 $O(L \cdot \frac{1}{kR})$ の各オーダーから、関係式

$$0 = H(k, g_0) \equiv \int K(k, k') e^{-i(k' - k)g_0(k)} dk' - F(k), \quad (10)$$

$$g_1(k) = -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial g_0^2} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial g_0} \right)^{-1} \frac{dg_0}{dk}, \quad (11)$$

が得られる。局在した波動を考える場合には、 $g = g(k)$ の

曲線は  $(k, g)$  面で, 図2 に示すような閉じたループを描く。

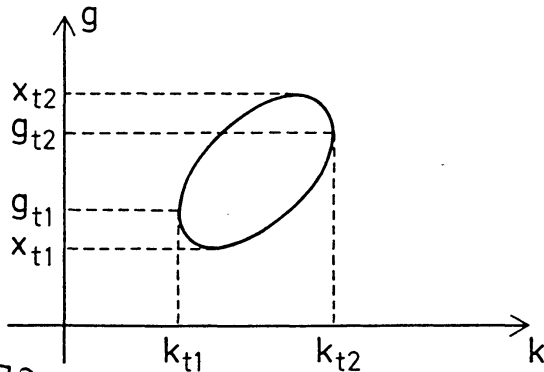


図2 Schematic plot of  $g=g(k)$  for a spatially localized mode.

図2において,  $x_{t2}, x_{t1}$  は実空間での turning point,  $k_{t1}, k_{t2}$  は波数空間での turning point を表わしている。次に,  $k$ -空間での turning point 近傍の波の漸近的な振

舞について考える。  $(k_t, g_t)$  の近傍で  $H(k, g_0)$  を展開すると,  $g_0(k), g_1(k)$  に対する表式

$$g_0(k) = g_t \pm (-a/b)^{1/2} (k - k_t)^{1/2}, \quad (12)$$

$$g_1(k) = -\frac{i}{4} \frac{L}{k - k_t}, \quad (13)$$

が得られ,  $g(k)$  は branch point と pole を持つことが分る。従って,  $g(k)$  を single-valued にする為に, branch cut と upper Riemann シート及び lower Riemann シートからなる二枚の Riemann 面を導入し, 同時に, 二枚のシート上の積分路を図3のように定義する。

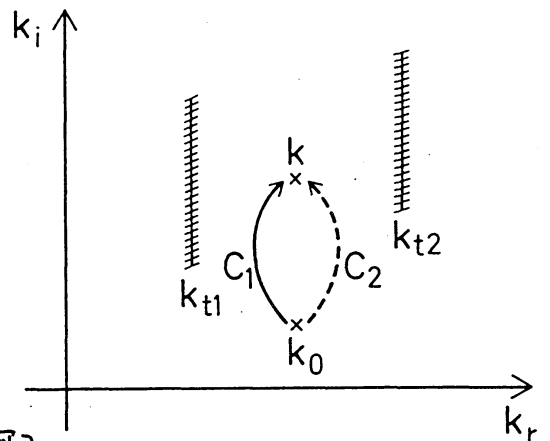


図3 Branch cuts in the  $k$ -space and two integration paths  $c_1$  and  $c_2$  giving two independent solutions of  $\psi(k)$ . —: branch cuts of the eikonal function  $g(k)$ . —: path in the upper Riemann surface. —: path in the lower Riemann surface.

それぞれの積分路  $C_1, C_2$  によって特徴づけられる独立の二つの解は

$$\phi_{1,2}(k) \propto (k-k_t)^{-1/4} \exp\left\{-i\left[g_t(k-k_t) + \frac{2}{3}\left(-\frac{a}{b}\right)^{1/2}(k-k_t)^{3/2}\right]\right\}, \quad (14)$$

で与えられる。  $a = (\partial H / \partial k)_{k_t, g_t}$ ,  $b = \frac{1}{2}(\partial^2 H / \partial g_t^2)_{k_t, g_t}$  で、積分定数は省略した。  $(k-k_t)^{3/2}$  の係数の符号は  $k$  の位置によって適当に選ぶものとする。 (14) 式の指数部分からそれぞれの turning point 近傍での Stokes, Anti-Stokes line の構造も解析できる。 その様子を 図4 に示す。

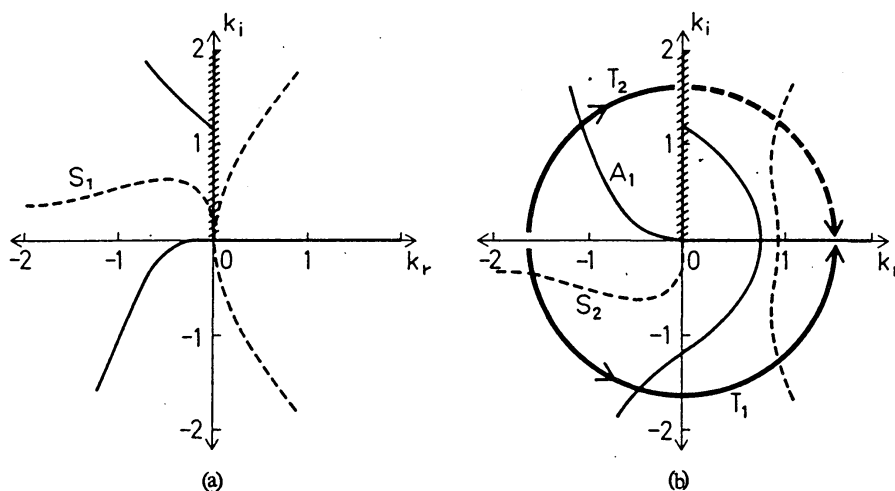


図4

Structure of Riemann surfaces around the left turning point  $k_{t1}$  in Fig. (3). —: the anti-Stokes lines defined by eq. (15). —: the Stokes lines defined by eq. (16). —: branch cut of the eikonal function  $g(k)$ . —: paths of analytical continuation. The upper and the lower Riemann surfaces are shown in (a) and (b), respectively.

Stokes line, Anti-Stokes line は次の関係式から決まる。

$$\operatorname{Re}\left[g_t(k-k_t) + \frac{2}{3}\left(-\frac{a}{b}\right)^{1/2}(k-k_t)^{3/2}\right] = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{Im}\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right] = 0. \quad (16)$$

図4には turning pointの外側から内側への解析接続の径路も  $T_1$  及び  $T_2$  で表わした。このようにして、二つの turning pointの近傍での解析接続によって得られる解から、最終的に、 $R$ -空間での量子化条件、

最終的に、 $R$ -空間での量子化条件、

$$\int_{\Gamma} g_0(k) dk = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

(17)

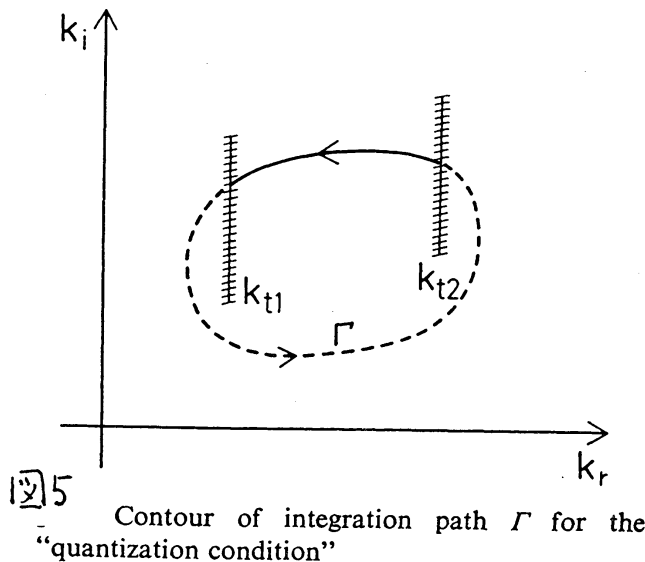


図5 Contour of integration path  $\Gamma$  for the "quantization condition"

が導出される。(17)式の積分路は  $k_{t1}$ ,  $k_{t2}$  の二つの

turning point を囲む閉じた path  $\Gamma$  である。(図5)

### ③-2 WKB法による解析例

プラズマの特徴の一つに波と粒子の相互作用がある。その効果に伴う波動の生長あるいは減衰過程の検討も重要なテーマの一つである。ここでは、弱い散逸のある場合の波動の安定性解析に前節で論じた WKB 法を適用してみる。一般に、波数  $k$ , 周波数  $\omega$  及び  $g_0(k)$  は、このような系では complex であるが、 $H(k, g_0; \omega)$  の imaginary 項  $H_i$  は real 項  $H_r$  に比べて小さく、 $\omega$  の虚数部  $\omega_i$  も小

さいので,  $g_0 = g_{0r} + g_{0i}$ ,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  とおいて,  
 $H(k, g_0; \omega)$  を展開すると, 実部及び虚部それぞれ,

$$H_0(k, g_{0r}; \omega_r) = 0, \quad (18)$$

$$g_{0i} = -i \left( \frac{\partial H_0}{\partial g_{0r}} \right) \left[ \omega_i \frac{\partial H_0}{\partial \omega_r} + H_1 \right], \quad (19)$$

のような関係式が得られる。(18)式は"軌道積分"の方法  
 で解くことができて,  $k$  及び  $g_{0r}$  の初期値が

$$H_0[k(t=0), g_{0r}(t=0); \omega_r] = 0, \quad (20)$$

の関係を満たしていれば, (18)式を満足する  $k$  と  $g_{0r}$  の関係

は,

$$\frac{dk}{dt} = \left( \frac{\partial H_0}{\partial g_{0r}} \right) / \left( \frac{\partial H_0}{\partial \omega_r} \right), \quad (21)$$

$$\frac{dg_{0r}}{dt} = - \left( \frac{\partial H_0}{\partial k} \right) / \left( \frac{\partial H_0}{\partial \omega_r} \right), \quad (22)$$

から決定できる。更に, 量子化条件(17)の first-order,  
 及び second-order から

$$\oint g_{0r} \frac{dk}{dt} dt = 2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (23)$$

$$\omega_i = - \oint \left[ H_1 / \left( \frac{\partial H_0}{\partial g_{0r}} \right) \right] dk \left[ \oint \left( \frac{\partial H_0}{\partial \omega_r} \right) / \left( \frac{\partial H_0}{\partial g_{0r}} \right) dk \right]^{-1}, \quad (24)$$

が求められるが, (23)式から  $\omega_r$ , (24)式から成長率  $\omega_i$  を  
 評価できる。応用例として, プラズマ中の不均一性によっ  
 て生ずる代表的な波であるドリフト波に対する解析結果を示

したのが図6, 図7である。これらの計算では, 密度分布

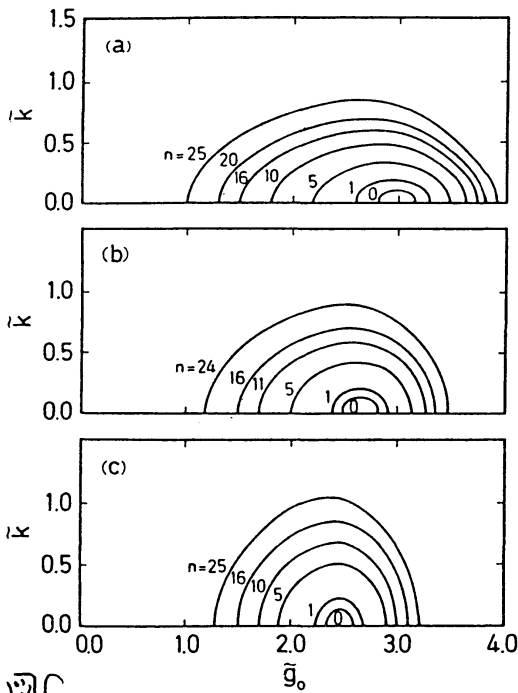


図6

Results for  $\tilde{g}_0(\vec{k})$  for given values of  $\omega_r/\omega_{*i}$  are shown. The parameters are  $\omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2 = 100$ ,  $T_i/T_e = 1.0$ ,  $\lambda/\rho_i = 100$ , and  $k_{||}\rho_i = 10^{-3}$ . (a)  $\rho_i k_{\perp} = 0.4$ , (b)  $\rho_i k_{\perp} = 0.8$ , and (c)  $\rho_i k_{\perp} = 1.2$ .

として, Gaussian 分布を仮定した。図6は  $k_{\perp}\rho_i$  の値を変えた時の代表的な固有モードの  $g(k)$  曲線をプロットしたもので, 各局在モードの空間的な振舞いが読みとれる。

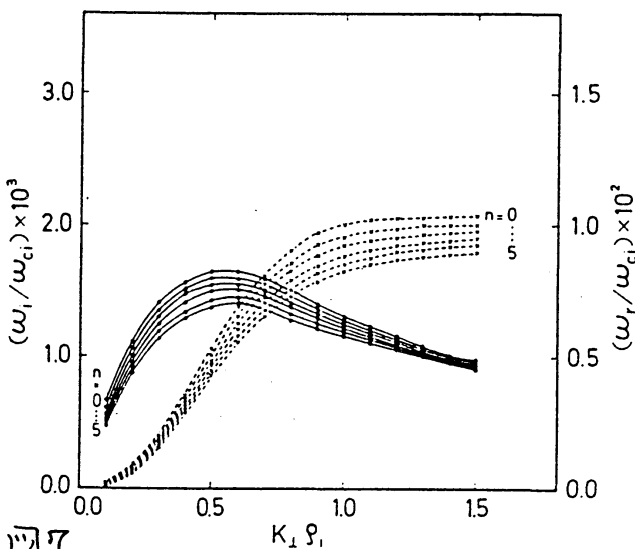


図7

The results of  $\omega_r/\omega_{ci}$  (the solid line) and  $\omega_i/\omega_{ci}$  (the dashed line) vs  $k_{\perp}\rho_i$  for  $n = 0-5$  are illustrated for a hydrogen plasma. The same parameters are used.

図7は  $n=1\sim 5$  の固有モードに対する固有周波数及び成長率を  $k_{\perp}\rho_i$  の関数として図示したものである。WKB法による解析法の有効性を示す一例である。[詳しい結果は文献]

を参照のこと。]

#### 4. まとめ

最後に、今回紹介したプラズマ中の波動解析法について簡単にまとめながら、今後の検討課題について少しふれてみたい。解析法として、(A)局所分散式、(B)二階微分方程式、(C)積分方程式、に基づく方法について紹介した。どの解法の道具立てとしては、(a) WKB法を適用する場合と、(b)直接数値的に解く場合があり、この後者に関しても微分方程式に対する shooting 法 と base 関数展開による方法<sup>8,9</sup> などが知られている。どのような解析法が有効かは、波動の性質、たとえば、モード数の高い波、低い波、静電波か電磁波か、また不安定性の強弱にも依存している。不安定性の弱い静電波の場合には、微分方程式及び積分方程式に対しても WKB法に基づく波動解析法は有効である。

次に、ベクトル系における WKB解析に関連する話題についてふれてみたい。与るで静電波を記述する積分方程式(8)について論じたが、電磁的な波動は(8)式の代りに、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{K}(k, k') \cdot \vec{E}(k') dk' = 0, \quad (25)$$

のような積分方程式によって記述される。 $\vec{K}$  は一般に

$3 \times 3$  の metric tensor で  $\vec{E}$  は vector である。(25)式への WKB 法の適用, 量子化条件の導出についても検討されている<sup>10,11</sup>。文献[10]で, 電磁的なモードに対する量子化条件として

$$\oint [k(x) + \delta k(x)] dx = (2n+1)\pi, \quad (26)$$

のような表式が導出されている。(26)式の  $\delta k(x)$  は電磁的な効果による補正項であり, 静電波近似では  $\delta k(x) \rightarrow 0$  となり, よく知られた量子化条件を与えている。 $\delta k(x)$  の項を具体的にどのように評価するかについては, 文献[10]では論じられていない。文献[11]で我々は, 波数空間での電磁モードに対する量子化条件として, (17)式の代りに

$$\oint (g_0 + g_1 + \dots) dk = 2n\pi \quad (26)$$

( $n=0, 1, 2, \dots$ )

を導出した。静電的なモードの場合には,  $\oint g_1 dk = -\pi$  となるので, (26)式は(17)式になる。しかし, 電磁的なモードに対しては,  $g_1(k)$  の構造が必ずしも簡単ではなく, 解析的な取り扱いが難しくなる。文献[11]では,  $\oint g_1 dk$  を数値的に評価する際の計算法と応用例が議論されている。

WKB法に関する理論についての歴史は長い。しかし, 現在なお興味ある研究テーマであることは言うまでもない。



今回の研究集会での議論を通じて、さまざまな研究分野における共通テーマとして、WKB法のより発展が期待できよう。最後に、核融合科学研の渡辺ニ太氏をはじめ研究協力者の方々に深く感謝致します。

REFERENCES

- (1) M. Sato and Y. Terashima (1968), Jaeri-memo 3125
- (2) J. N. Davidson and T. Kammash, Nuclear Fusion 8 (1968) 203.
- (3) T. Watanabe, H. Sanuki, and M. Watanabe, J. Phys. Soc. Japan 47 (1979) 286.
- (4) H. Sanuki, Phys. Fluids 27 (1984) 2500.
- (5) N. Froman, Ann. Phys. (France) 61 (1970) 451.
- (6) N. Froman, Ann. Phys. (France) 74 (1972) 314.
- (7) H. Sanuki, T. Watanabe, M. Watanabe, Phys. Fluids 23 (1980) 153.
- (8) R. D. Ferraro et al., Phys. Fluids 23 (1985) 2181.
- (9) R. D. Ferraro et al., Phys. Fluids 30 (1987) 1115.
- (10) H. L. Berk and D. Pfirsh, J. Math. Phys. 21 (1980) 2054.
- (11) T. Watanabe et al., J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 1745.