数理解析研究所講究録
第 788 巻 1992 年 95-118

複素 WKB 法の厳密な取り扱いと原子衝突過程への応用

京都大学教養部数学教室　高崎金久 (TAKASAKI, Kanehisa)

1. 序説：複素 WKB 法の厳密な取り扱いについて

過去数年の間に J. Ecalle, A. Voros, F. Pham 達による漸近解析への新しい試みが多くの人々の関心を集めるようになった．特に Voros [V] と Pham 達 [DDP] は複素 WKB 法を Ecalle の alien calculus と呼ばれる超現代的な枠組 [E] の中でとらえ直す注目すべき試みを行った．

しかしながら，少なくとも複素 WKB 法を近似無しの厳密解法として理解し直すという点に関しては，これらの試みも６０年代から７０年代にかけての　Olver [O], Fröman-Fröman [FF], Fedoryuk-Evgrafov [FE] 達の仕事と全く断絶している訳ではない．むしろ筆者はそのような伝統的な方法から Ecalle-Voros-Pham の理論の本質に迫ることも十分に可能であると考える．このことは既に別の場所で指摘しておいた [T].

ここでは筆者のこの視点から原子衝突過程に由来する WKB 接続問題を議論する．内容的には１９９１年４月の日本数学会の分科会で報告したこととほとんど変わらず，研究自体その後決定的な進展を見ていないが，新たに手元に集めた資料を前にして考え始めたことも（まだ不完全ではあるが）書き添えたいと思う．なお，この問題を研究集会で紹介された中村宏樹氏，ならびにこの問題の重要性を繰り返し指摘され，関連する Child の仕事の資料

[C] や中村氏の計算の資料 [Na] を提供して下さった西本敏彦氏にこの場を借りて深く感謝いたします.

次節以降で実際の議論に入る前に，この節では筆者の眼から見た複素 WKB 法の位置付けについてまとめておく.

ここで問題にしている複素 WKB 法は 1 自由度（相空間が 2 次元）の量子力学系を扱うもので，微分方程式としては 2 階単独常微分方程式

$$\psi_{zz} = \bigl(\lambda^2 f(z) + g(z, \lambda^{-1})\bigr)\psi \tag{1.1}$$

や 2×2 係数をもつ 1 階常微分方程式系

$$\Psi_z = \bigl(\lambda M(z) + N(z, \lambda^{-1})\bigr)\Psi \tag{1.2}$$

を対象にする. $\lambda > 0$ は大きいパラメータであるが，我々の取り扱いでは 1 とおいても構わない. 準古典近似との関連ではこれは Planck 定数の逆数にあたり， $\lambda \to \infty$ における漸近展開が問題になる. これらの方程式は前世紀から知られている Liouville 変換と呼ばれる便利な変換のお蔭で初等的な道具だけでもかなりの解析ができる.

上の 2 階の方程式の場合に用いられる典型的な Liouville 変換は

$$\begin{aligned} s(z) &= \int_{z_0}^{z} f(z')^{1/2} dz', \\ \phi(s, \lambda) &= (ds/dz)^{1/2} \psi(z, \lambda) \end{aligned} \tag{1.3}$$

というもので，新しい独立変数 s と従属変数 ϕ に対して方程式は

$$\begin{aligned} \phi_{ss} &= \bigl(\lambda^2 + u(s, \lambda^{-1})\bigr)\phi, \\ u(s, \lambda^{-1}) &\underset{\mathrm{def}}{=} g/f - f^{-3/4}(f^{-1/4})_{zz} \end{aligned} \tag{1.4}$$

という Schrödinger 方程式になる. 同様に 1 階連立系の方も，

$$\begin{aligned} s(z) &= \int_{z_0}^{z} \det M(z')^{1/2} dz', \\ \Phi(s, \lambda) &= P(z)\Psi(z, \lambda) \end{aligned} \tag{1.5}$$

という形の変換（これも Liouville 変換と呼んでよいだろう）によって Dirac 方程式

$$\Phi_s = (\lambda\sigma_3 + U(s,\lambda))\Phi,$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U(s,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & q(s,\lambda) \\ r(s,\lambda) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

になる．いずれの場合にも，s- 平面上の方程式は定数係数の方程式にポテンシャルによる摂動を加えたもの，とみなすことができる．従って無摂動系の解（つまり平面波）から出発して解の近似をつくることが自然であろう．事実，平面波を無摂動系の基本解にとり，通常の処法によって初期条件や境界条件を考慮した積分方程式に書き直せば，逐次代入法によってそのような解の近似列（実際にはこれは正確な解に収束する）を得ることが出来る．これがいわゆる Liouville-Green 近似の基礎にある考え方であり，Olver や Fröman-Fröman の本 [O][FF] ではこの方法のいろいろな応用例が出てくる．

Liouville 変換の応用はこれだけにとどまらない．Olver の本では Liouville 変数 $s(z)$ のとりかたを変えて無摂動系が Airy 方程式や Bessel 方程式になるような場合を考えている．これはもとの方程式の転回点（turning point）や係数の極の近くでの解の解析に利用されている．この方法は最近さらに拡張されて，転回点や極が合流する場合の研究に利用されている（Dunster [D]).

筆者 [T] が試みたのは最初に述べた本来の Liouville 変換によって無限遠点に境界条件をおいた解をいくつか構成し，それらの間の接続関係を無限遠点の近くでの解の比較によって見いだすことである．このアイディアは Olver の本 [O] の第１３章に負う．またいろいろな点で Gérard, Grigis の仕事 [GG] も随分参考にしている．この方法の背景には Liouville 変換の後 s- 平面に現れるポテンシャルは適当によい条件のもとでは遠方で減衰する，つまり散乱型になる，という事実がある．例えば $f(z)$ が多項式で $g(z,\lambda)=0$ ならば $u(s,\lambda)$ は遠方で $|s|^{-2}$ のオーダーで減少する．また $q(s,\lambda), r(s,\lambda)$ も $M(z)$ が多項式行列で $N(z,\lambda) = 0$ ならば，$|s|^{-1}$ のオーダーで減少する．従って散乱理論に従って Jost 解の対応物をつくることができる．構成は前述の積分方程式を逐次代入法で解くことによる．このようにして得られる解はある程度大域的な（あるいは半大域的な）様子が把握できるので，もとの方程式の係数が極などの特異点をもたず転回点が全て単純転回点（$f(z)$ や $\det M(z)$ の１位の零点）である場合には，無限遠での解の振舞いの比較から接続係数を完全に決めることができるのである．これが Olver の本に書いてあることである．

詳しく言えば，接続係数は Ecalle, Pham が Voros 係数と呼ぶ量（これは s- 平面上の Jost 函数，言い替えれば透過係数の逆数，に他ならない），λ の簡単な指数函数，ならびに虚数単位の巾，の三種類の量の有理式として書ける．（Olver はもちろん Voros 係数という言葉を使っていないが，使っているのはまさに同じものである．）さらに，これから先は Olver の本には書いてなくてむしろ散乱理論や Dyson 流の摂動論からヒントを得たことだが，Voros 係数に対してある種の反復積分の級数としての表示が導かれる．この反復積分表示はただちに λ に関する Laplace 積分に書き直せて，そこから Ecalle 理論との接点を探ることができる．λ に関する漸近展開はこの Laplace 積分表示からの帰結に過ぎない．ちなみに，Voros 係数の間には代数的な関係式が存在することがすぐにわかるが，これは Voros の指摘した代数的な関係式や discontinuity formula と関連しているらしい．

実際にこの方法を適用する場合にはいくつか解析的に注意しなければならないことがある．まず，s- 平面上のポテンシャルは転回点の s- 平面上の像で特異点をもつ多価解析函数となる．積分方程式を考えるための積分路は第一にこれらの特異点を避けなければならない．第二に，境界条件を無限遠点に設定するため積分路は必然的に無限遠から出発して有限の点まで延びるものになる．そのような無限積分路にそって積分方程式が意味をなし，かつ逐次代入列を量的にコントロールするためには積分路を前進的 (progressive) [O]，つまりそれに沿って Re $s(z)$ が単調増加，に選ばなければならない．（実は第三の問題として，上で注意したような s- 平面上のポテンシャルの遠方での減少度は普通の散乱理論や逆散乱理論で仮定するものよりは少し弱い，ということがある．これはかなり技術的な問題で，工夫次第で解決可能なことではあるが，複素 WKB 法らしからぬ実解析的な技巧をある程度要求される．）以上のことに注意すると，z- 平面の指定された無限遠点の近くで指数的に小さく（劣勢，recessive，に）なるような解を具体的に，積分方程式を逐次代入法で解いて構成することができる．得られる解の反復積分級数表示は無限遠から前進路で到達できる範囲で収束するが，これは Fedoryuk-Evgrafov のいう canonical domain よりも一般にはずっと広い領域をカバーする．そして，単純転回点しかないときにはこの領域をたどることでこのような解の間の接続関係を完全に決定できるのである．多重転回点があるときには残念ながらこのやり方では接続関係を完全に決定できない．

接続問題をこのように理解するとき，Voros 係数というのは結局，このようにしてつくられた2つの解の間の Wronskian のことである．（正確には簡単なおつりの因子が掛か

る．）そして我々の扱っている方程式では，周知のように，Wronskian は z（あるいは s）によらない．これは解の構成法などとは無関係の事実である．ところで，もしも 2 つの解の構成に使った積分路の始点同志（ともに無限遠にある）が前述の意味の前進路で結ばれるならば，この Wronskian は積分方程式の解をこの前進路に沿ってたどって行くときの境界値で書ける．これは Olver の本にも書いてあることで，この種の議論ではごく常識的なことである．ところで積分方程式の解を逐次代入法でつくれば自動的に反復積分の級数になっているから，この境界値もやはり反復積分（今度は無限遠点同志を結ぶ積分路に沿う）の級数になる．こうして Voros 係数の反復積分表示が得られる．

また，Wronskian は 2 行 2 列の行列式であるが，線型代数で知られている Plücker の関係式というものによれば，4 つの解の間の Wronskian にはかならずひとつ 2 次の関係式があることがわかる．これも解の構成法などとはまったく無関係に成り立つ事実である．これを上に述べたようなやり方で実際に構成される解の組に適用すると，一連の非自明な関係式が得られる．実際に後で扱う原子衝突過程の問題では接続行列のユニタリー性が問題になるが，これは Plücker 関係式の一つに他ならない．

接続係数を求めることは Wronskian を求めることに他ならない，という視点に立てば，多重転回点のある場合を扱ったり転回点の合流を追跡するという問題（これは原子衝突過程を初めとして応用上しばしば遭遇する状況だが）でも新たな展望が開けるように思われる．いま 2 個の単純転回点が合流する状況を考えてみることにする．このとき前述のごとく平面波系を無摂動系にとる Liouville 変換を行えば s- 平面上のポテンシャルの対応する 2 つの特異点がやはり合流する．すると，Wronskian を反復積分表示するための積分路が合流する特異点の間に挟まれる（pinch される）という事態が起き得る．（実際にそうなるかどうかは転回点と積分路の配置による．）こうなってしまうと合流の瞬間まで有効な接続係数の表示は得られない．しかしながらこれは Liouville 変換の選び方が悪かったためと考えられる．そこで我々は中村 [Na] 西本 [Ni] に習って，合流する 2 つの転回点の近くの様子を Weber 方程式の 2 つの転回点の近くにうつすような Liouville 変換を新たにとる．変換された方程式は Weber 方程式に摂動を加えたものになり，2 つの転回点に関する限りポテンシャルに特異点はなく，積分路の pinch の問題は起こらない．（他の転回点は別である．）ただ，この場合の前進路の意味が筆者にはいまひとつはっきりせず，Weber 函数を含む反復積分の級数の収束性がまだ完全には証明しきれていない．従って数学的にあまり厳密なこ

とは言えないけれども，なんとかもっともらしいことを引き出してみせることはできそうに思う.

なお，Pham 達 [DDP] はこのような転回点の合流をも含む形で一定の結果を得ているようである．また同様の問題については Grigis の周辺で最近かなりの成果が上がっているらしい [Mä]．また，厳密な接続公式などにこだわるよりもまずよい近似式を手っとり早く導きたい，という向きには，Bender-Wu [BW] の計算を数学的に裏付けた Harrell-Simon の論文 [HaSi] が大いに参考になるはずである．さらに付け加えておくと，転回点の合流を追跡することで Painlevé 超越函数の漸近挙動を解析できる，という指摘がある [Ka] [IN]．これは応用上は弦模型や量子重力などの高エネルギー物理の話題とかかわっているし [Mo]，数学的に見ても Ecalle 理論と Painlevé 方程式（より一般にモノドロミー保存変形）との接点となり得る，極めて注目すべき視点であると思う.

2．状況設定：線型問題と Liouville-Green 型の解の組

原子衝突過程の解析 [Ch] [Na] で扱うのは次の方程式である.

$$y(t)_{tt} + k(t)y(t) = 0, \quad k(t) = \frac{1}{4}(a^2t^2 - b^2) + \frac{1}{4} - ia^2t, \tag{2.1}$$

ここでパラメータ a, b はいろいろな値をとりうるが，実際に扱いたい場合には 4 つの転回点が t- 平面の 4 つの象限にそれぞれひとつずつあり，さらに極限的な状況としてはこれらが 1 対ずつ虚軸に近づく場合と，反対に実軸に近づく場合とに特に興味があるらしい．そして問題にするのは実軸上の振動解の間の接続行列を求めることである．この方程式そのものは散乱問題ではないが，散乱理論の設定で言えば，振動解は Jost 解にあたり，問題はその間の接続係数を求めることである．（前述のような Liouville 変換を行えば，s- 平面上では本当の散乱問題になり，文字どおりの Jost 解を扱うと思ってもよい．）Child [C] や中村 [Na] の方法は，互いに近づいた 1 対の転回点のまわりの状況を Weber 方程式で近似して，Weber 函数の接続公式を利用して接続問題を解こう，というものである．これは昔からある基本的な考え方で，Bender-Wu [BW] でもある部分での解のつなぎあわせ (matching) はまったく同じ考え方で処理されている．西本 [Ni] はこれに対して定量的な裏付けを与えることを目指している（と筆者には思える）．ところが実際に近似的な接続行列を求めてみる

と，正確な接続行列ならば満たされるべきユニタリー性がかなり破れており，さらに計算の手順（接続を考える経路が絡んでいる）を変えると答えが違ってくる，などの問題が生じるのだそうである．これは近似法にまだまだ改善の余地があることを示している．

この問題を筆者流の複素 WKB 法の理解 [T] に基づいて考えるために，次のように問題設定をやり直してみる．まず方程式としては第 1 節で最初に与えた 2 階単独方程式をとり，

$$f(z) = c(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)(z - r_4), \quad g(z, \lambda^{-1}) = 0, \tag{2.2}$$

とおく．Liouville-Green 解に関する転回点は $r_1, \ldots, r_4$ で，これらと $f(z)$ の主係数 c を適当にとればもちろん上の原子衝突過程の状況は再現できるが，以下ではこれらのパラメータは独立に動かすことにする．ただ，定性的にそこでの状況にあわせるため，4 つの転回点がそれぞれ 4 つの象限を動き，極限的状況として 1 対ずつが虚軸上または実軸上の 2 点に合流する，という設定をもっぱら考えることにする．（図 1 参照）

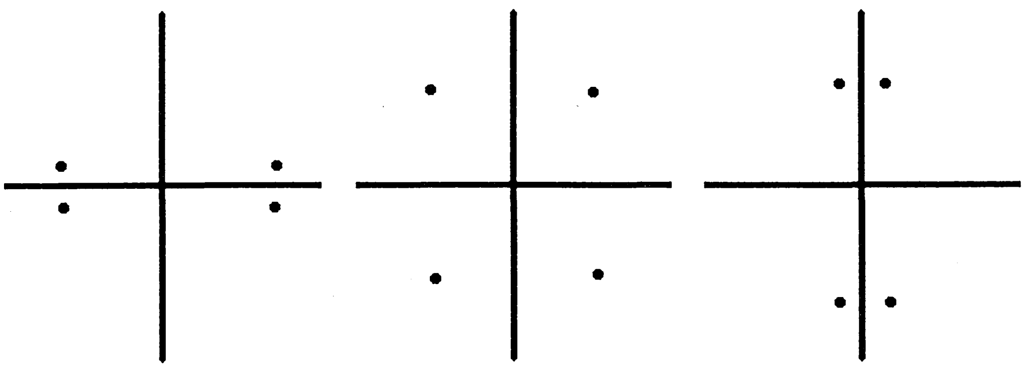

図 1 原子衝突過程の解析で現れる転回点の状況

これから考えるのは，転回点が合流しない状況において，まず前節で説明したように基本的な解の組をつくり，次にそれらの間の接続関係を Wronskian で記述して行くことである．その際 z- 平面上の前進路の走り方を把握しておくことが必要になる．そのための目印として普通は Stokes 曲線や双対（あるいは反）Stokes 曲線を描いたり，もっと詳しい状況を知るために Re $s(z)$ の gradient flow や等高線を描いたりするわけだが，いまは無限遠点

と転回点，あるいは転回点どうしをつなぐ前進路とそれに双対な中立路（Im $s(z)$ がたかだか有界な範囲を動くような曲線）を図のように描いておけば大体事足りる．（図２参照）

この図について説明しておく．左側の図で矢印がついた実線は上のような意味で‘‘疑似的な” Stokes, 双対 Stokes 曲線と言うべきものである．（４つの転回点が原点および実・虚軸に対して完全に対称な場合はこれらは本当の Stokes, 双対 Stokes 曲線になる．）$s(z)$ と $(ds/dz)^{-1/2}$ の分枝を指定するため図のように cut を入れておく．$s(z)$ を定義する積分の始点は便宜上 $z_0 = 0$ にとる．前進路上の矢印は Re $s(z)$ の増加する方向を示す．これらの前進路が出てくる（あるいは入って行く）６個の無限遠点には図のように番号をつけておく．各転回点から無限遠点に至る２本の疑似的 Stokes 曲線は扇型の領域（その中を cut が通っている）を挟んでいるが，z-平面からこれら４つの扇型領域を除いた部分は一つの canonical domain （に近い領域）をなす．対応する s-平面上の領域（ポテンシャル $u(s)$ の cut sheet の一つを与える）の様子を右側の図に示してある．

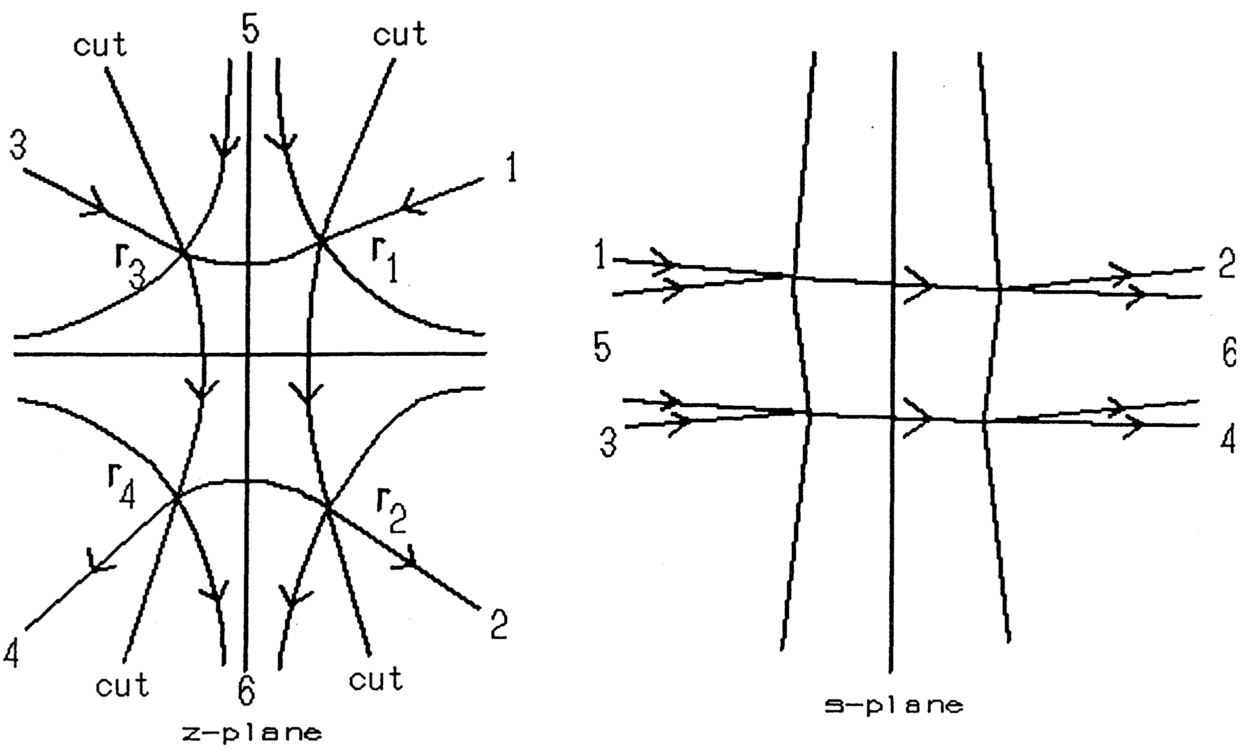

図２ z-平面と s-平面の状況

さて6個の無限遠点 $\infty_1, \ldots, \infty_6$ に対してその近傍で recessive な解を次の Liouville-Green の形でつくる．

$$\psi_j = a_j(ds/dz)^{-1/2}\exp(\epsilon_j s\lambda),$$
$$a_j|_{z=\infty_j} = 1, \tag{2.3}$$

2番目の式は無限遠点における境界条件で，解はこれにより一意的に定まる． ϵ_j は要請に合う指数函数部分を選び出すための符号因子で，

$$\epsilon_j = +1\ (j = 1, 3, 5) \quad = -1\ (j = 2, 4, 6) \tag{2.4}$$

となっている．振幅部分は s- 平面上の函数として，前節で触れたような積分方程式を解いて構成する．積分方程式は $\epsilon_j = +1$ のときには

$$a_j(s,\lambda) = 1 + (2\lambda)^{-1}\int_{s(\infty_j)}^{s} a_j(s_1,\lambda)u(s_1)(1 - e^{2(s_1 - s)\lambda})ds_1, \tag{2.5}$$

$\epsilon_j = -1$ のときには

$$a_j(s,\lambda) = 1 + (2\lambda)^{-1}\int_{s}^{s(\infty_j)} (1 - e^{2(s - s_1)\lambda})u(s_1)a_j(s_1,\lambda)ds_1, \tag{2.6}$$

となる．積分路が u の特異点（つまり転回点の s- 平面上の像）にぶつからず，かつ前進的である限り，逐次代入列（それは Dyson 型の反復積分の形をしている）は収束することがわかる．同時に a_j に対する絶対値の評価（結果として有界になる）も得られる．このような積分路がとれる範囲を z- 平面で眺めてやると， ∞_j の近傍から出発して指数函数部分が recessive から dominant に転じて，やがて再び recessive になる寸前（そこで Stokes 現象が起こると考えてよい）までの領域をカバーすることがわかる．

3． Voros 係数と ψ_j 達の Wronskian

上で最後に注意したように，積分方程式あるいはその逐次代入解法によって a_j を記述できる範囲はかなり広く，そこを通って他の無限遠点 ∞_k に到達できることがある．これは転回点と前進路の純粋に幾何学的な配置状況できまっている．このような j, k に対しては a_j の境界値

$$a_{jk}(\lambda) \underset{\mathrm{def}}{=} \lim_{z\to\infty_k} a_j(s(z),\lambda) \tag{3.1}$$

が存在し，さらに対称性をもつ：

$$a_{jk}(\lambda) = a_{kj}(\lambda). \tag{3.2}$$

これが Pham [DDP] の言うところの Voros 係数の解析的な定義（であると筆者が考えるもの）であるが，この境界値の存在とそれが接続公式を構成する基本的な要素になる，ということは実は既に Olver の本 [O] に書いてある．実際には単に極限値が存在するというだけではなく，この極限値は（$\epsilon_j = +1, \epsilon_k = -1$ というように番号を並べておくと）

$$\begin{aligned} a_{jk}(\lambda) &= 1 + (2\lambda)^{-1} \int_{s(\infty_j)}^{s(\infty_k)} u(s_1) a_j(s_1, \lambda) ds_1 \\ &= 1 + (2\lambda)^{-1} \int_{s(\infty_j)}^{s(\infty_k)} u(s_1) a_k(s_1, \lambda) ds_1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

というように積分で書ける．（積分路は境界値を考えるものと同じで，転回点を通らないで ∞_j と ∞_k を結ぶ前進路．）このような積分表示は（逆）散乱理論ではよく知られたものである．ここに a_j や a_k の反復積分級数を入れると（結果は同じで）$a_{jk}(\lambda)$ 自身の反復積分級数表示

$$\begin{aligned} a_{jk}(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\infty_j}^{\infty_k} ds_1 \int_{\infty_j}^{s_1} ds_2 \cdots \int_{\infty_j}^{s_{n-1}} ds_n \\ (2\lambda)^{-n} u(s_n) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - e^{2(s_{j+1} - s_j)\lambda}) u(s_j) \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る．さらに積分路が s- 平面上で直線に選べるときにはこれをさらに Laplace 積分

$$a_{jk}(\lambda) = 1 + (2\lambda)^{-1} \int_0^{\exp(i\theta_{jk})\infty} e^{-2s\lambda} A_{jk}(s) ds \tag{3.5}$$

の形に書き直せる．（θ_{jk} は適当な偏角．）$\lambda \to \infty$ における漸近展開

$$a_{jk}(\lambda) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{jk,n}/(2\lambda)^n \tag{3.6}$$

の存在はここからすぐに出て来る [T]．

いま考えている設定では $(j,k) = (1,3), (2,4)$ 以外についてこのような境界値を考えることができる．（転回点の配置が変わればこの状況も変わってくる．）必要な積分路を図に

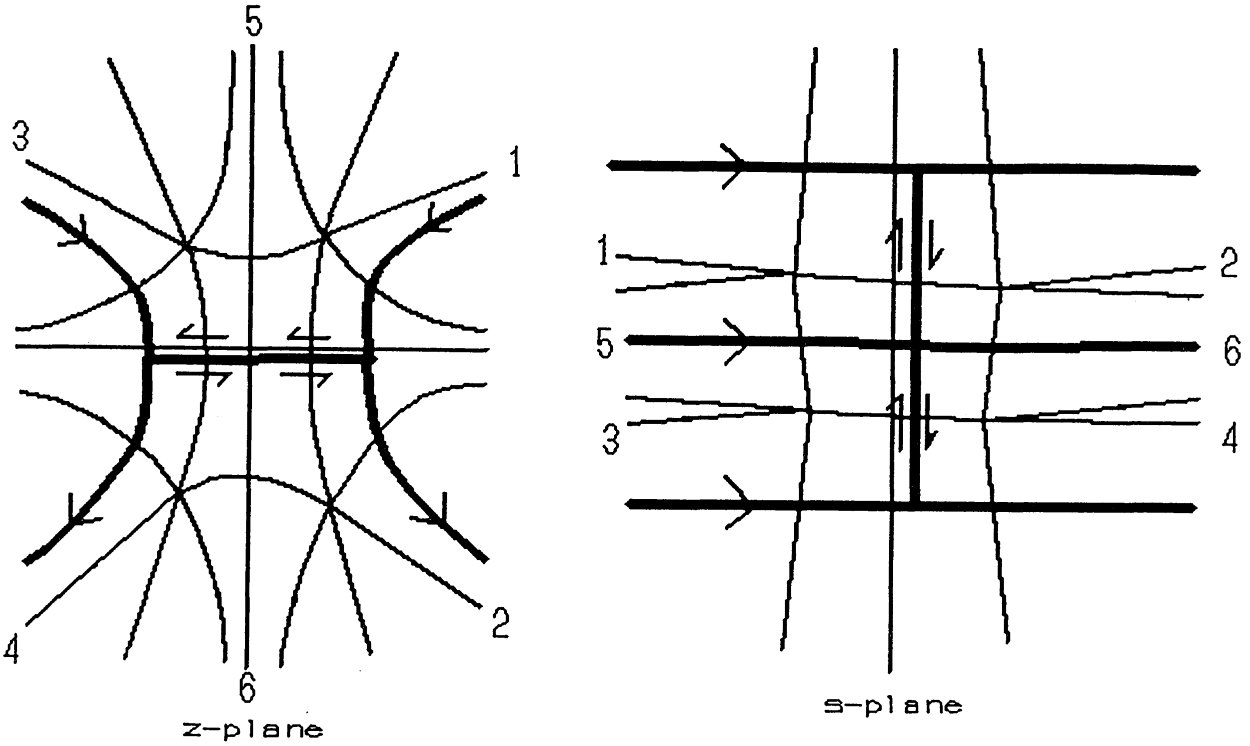

図3 Voros 係数を定義するための積分路

示しておく．図の中で矢印が一方向のみ描いてあるところは Re $s(z)$ の増加の方向を示し，双方向に走っているところは Re $s(z)$ が一定の線をたどっていることを意味する．（図3，4参照）この図から，図1に示したような二通りの転回点の合流に際していくつかの積分路が pinch されることがはっきり見てとれる．

Wronskian との関連であるが，Wronskian

$$W[\psi_j, \psi_k] \underset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \psi_j & \psi_k \\ \psi_{j,z} & \psi_{k,z} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

は z によらないはずだから，$z \to \infty_j, \infty_k$ という極限値を計算すればよく，特に ∞_j と ∞_k が上のように前進路で結べる場合には，実際にやってみると a_{jk}, a_{kj} で書けることがすぐわかる．（極限値の採り方は二通りあって，それぞれが一致しなければならない，ということから前述の Voros 係数の対称性が出て来る．）ただし，ここで一つだけ注意を要することが起こる：我々はいま $s(z)$ や $(ds/dz)^{-1/2}$ の分枝をひとつの cut sheet 上で固定してい

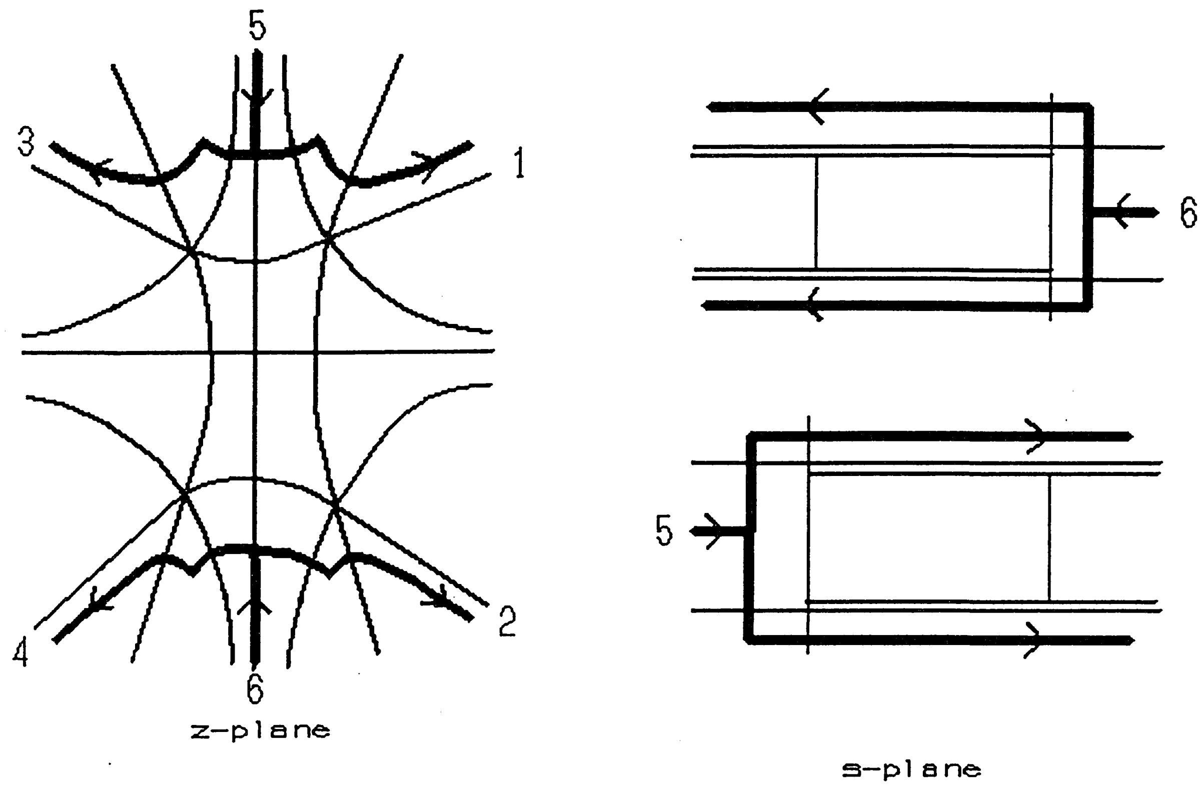

図4 Voros 係数を定義するための積分路（続き）

るわけだが，∞_j と ∞_k の間に cut が入っていて必要な積分路がそこを越えているときには，解が連続につながるように振幅部分以外の因子を調節しなければならない．これは

$$(ds/dz)^{-1/2}\exp(\epsilon_j s\lambda) \to \pm i\exp(2\epsilon_j s(r_j)\lambda)\cdot(ds/dz)^{-1/2}\exp(-\epsilon_j s\lambda) \tag{3.8}$$

という見かけ上の変化を引き起こす．ここで符号 ± は cut を原点から見て時計まわりに越えるときに正，反時計まわりに越えるときに負になる．このように補正しておいてから Wronskian を計算しなければならない．この規則を考慮に入れて Wronskian を計算すると，

$$\begin{aligned} W[\psi_1,\psi_2] &= -2\lambda a_{12}, \\ W[\psi_1,\psi_4] &= -2\lambda a_{14}, \\ W[\psi_1,\psi_5] &= -2\lambda i e^{2s(r_1)\lambda} a_{15},\ldots, \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる．こうして $W[\psi_1,\psi_3],W[\psi_2,\psi_4]$ 以外の Wronskian は Voros 係数を使って書けることがわかる．

それでは残る $W[\psi_1,\psi_3],W[\psi_2,\psi_4]$ はどのように取り扱ったらよいか？これは Plücker 関係式でわかる． Wronskian が 2 行 2 列の行列式であるということから一般的に

$$W[\psi_j,\psi_k]W[\psi_\ell,\psi_m]-W[\psi_j,\psi_\ell]W[\psi_k,\psi_m]+W[\psi_j,\psi_m]W[\psi_k,\psi_\ell]=0 \qquad (3.10)$$

という関係式が出て来る．これが Wronskian に対する Plücker 関係式である．これは ψ_j 達がどのように構成されているか，ということとは全く無関係に成立する代数的事実である．従って $W[\psi_1,\psi_3]$ や $W[\psi_2,\psi_4]$ を含む場合にも適用できる．そこで ψ_1,ψ_3 とあと 2 つ適当な解をもってきて，上の Plücker 関係式を $W[\psi_j,\psi_k]$ について解いた式

$$W[\psi_j,\psi_k]=\frac{W[\psi_j,\psi_\ell]W[\psi_k,\psi_m]-W[\psi_j,\psi_m]W[\psi_k,\psi_\ell]}{W[\psi_\ell,\psi_m]} \qquad (3.11)$$

に当てはめ，右辺で Voros 係数で書けるものは全部書き直してやれば， $W[\psi_1,\psi_3]$ を Voros 係数（および虚数単位と λ の指数函数）の有理式として決めてやることができる．同様のことは $W[\psi_2,\psi_4]$ についても言える．

これ以外にも Plčuker 関係式は Voros 係数の間のさまざまな代数的関係式を与えるが，後で見るように，それは解の接続係数の間の代数的関係式を導く．もとの方程式のポテンシャルが適当な実数性を持てば，これらの代数的関係式が接続行列のユニタリー性になるであろうことは想像にかたくない．

最後にもう一度強調しておく：転回点の位置や可能な前進路の配置などの位相的な変化が生じれば， Voros 係数を直接定義できる無限遠点対の組合せも変わり，さらに cut の通し方を変えれば（これはもともと便宜的なものではあるが） Wronskian を Voros 係数で書く表示式も変化する．これは Voros 理論の鍵である．しかしながら， Wronskian の方は，無限遠での ψ_j の指定の仕方を変えない限り，有限のところでの諸々の不連続的変化とは無関係で，方程式中のパラメータに連続的に依存する．また Plücker 関係式はまったく形を変えない．

4．接続公式の導出と解釈

接続公式は 3 個の解の間の 1 次関係を与えるものと理解してよい．ところで Wronskian を用いれば一般的な関係式として

$$\psi_j = \frac{W[\psi_j, \psi_\ell]}{W[\psi_k, \psi_\ell]}\psi_k - \frac{W[\psi_j, \psi_k]}{W[\psi_k, \psi_\ell]}\psi_\ell \tag{4.1}$$

が得られる．これは $\psi_j, \psi_k, \psi_\ell$ がともに同じ 2 階の方程式の解であるということだけから従う一種の“恒等式”で，解の構成とか詳しい性質とは一切関係なく出て来るものであることに注意されたい．（実際，ψ_j を ψ_k と ψ_ℓ の定数係数 1 次結合の形に書いておいて，両辺と ψ_k，ψ_ℓ の Wronskian をとってみれば，係数が上のような Wronskian の比になり，この関係式が出て来る．右辺分母の Wronskian が消えるときにはこの関係式は意味を失うが，そのときには ψ_k と ψ_ℓ が 1 次従属であるわけで，それはそれで別の問題，例えば固有値問題にかかわる重要性をもつ．）接続問題を解くということは，要するに，ここで現れる Wronskian になんらかの具体的な表示を与えたり詳しい解析を行ったりする，ということである．

s- 平面上の解析は Wronskian に対して既に述べたような表示を与える．それは 3 つの基本的な量，すなわち

- 反復積分級数表示をもつ Voros 係数，
- $(ds/dz)^{-1/2}$ の sheet の変更に由来する虚数単位の巾，
- $\exp(\epsilon_j s\lambda)$ の sheet の変更に由来する λ の指数函数，

の組み合せとして与えられていて，その意味で解析可能なものである．これを上の普遍的な 1 次関係式に入れてやれば，例えば $(\psi_1, \psi_2), (\psi_3, \psi_4), (\psi_5, \psi_6)$ という解の対の間の接続公式を次のように求めることができる．

$$\begin{aligned}
&(\psi_3, \psi_4) = (\psi_5, \psi_6)C^{56|34}, \quad (\psi_5, \psi_6) = (\psi_1, \psi_2)C^{12|56}, \\
&C^{56|34} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{36}}{a_{56}} & -i\dfrac{a_{46}}{a_{56}}e^{-2s(r_4)\lambda} \\ i\dfrac{a_{35}}{a_{56}}e^{2s(r_3)\lambda} & \dfrac{a_{45}}{a_{56}} \end{pmatrix}, \\
&C^{12|56} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{25}}{a_{12}} & -i\dfrac{a_{26}}{a_{12}}e^{-2s(r_2)\lambda} \\ i\dfrac{a_{15}}{a_{12}}e^{2s(r_1)\lambda} & \dfrac{a_{16}}{a_{12}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ところで，ここでは ψ_3, ψ_4 を ψ_5, ψ_6 の 1 次結合と見ることにより第一の関係式を導き，さらに ψ_5, ψ_6 を ψ_1, ψ_2 の 1 次結合と見て第二の関係式を導いたのだが，同様の計算

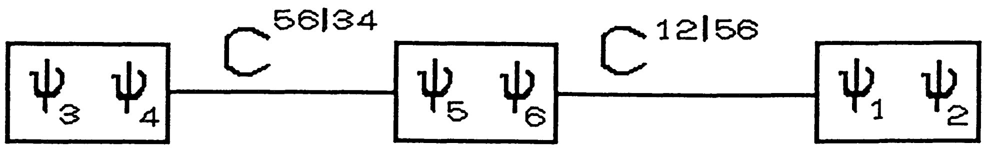

図 5　解の基底と接続行列

を逆向きに行えば今度は見かけ上異なる接続公式を得るはずである．係数行列として今度は $C_{34|56}$，$C_{56|12}$ というようなものが現れる．ここから重要な帰結が導かれる：これら二通りの接続公式は当然両立しなければならないから，係数行列の間に

$$C^{56|34}C^{34|56} = C^{56|12}C^{12|56} = 1 \tag{4.3}$$

という関係式が満たされなければならない．実際に書き下してみると，これらは

$$\begin{aligned} \det C^{56|34} &= \frac{a_{34}}{a_{56}} \quad (\Leftrightarrow \det C^{34|56} = \frac{a_{56}}{a_{34}}), \\ \det C^{12|56} &= \frac{a_{56}}{a_{12}} \quad (\Leftrightarrow (\det C^{56|12} = \frac{a_{12}}{a_{56}}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

という 2 つの関係式に帰着する．実は，分母を払ってみればわかるように，これらは本質的には Plücker 関係式に他ならない．（この関係式を導くときにも解の詳細には一切立ち入っていないことに注意されたい．）

さて，2 つの接続公式を組み合せれば，(ψ_1, ψ_2) と (ψ_5, ψ_6) の間の接続関係

$$(\psi_3, \psi_4) = (\psi_1, \psi_2)C^{12|34} \tag{4.5}$$

が $C^{12|34} = C^{12|56}C^{56|34}$ により決まる．これら 4 つの解は実軸上で原子衝突過程の解析が問題にする振動解になる．（正確に言えば，今は $r_1, \ldots, r_4$ を独立に動かしているので実軸から少しずれた中立線上で純振動的になっていると言うべきであるし，さらに z によらない位相因子だけ求めるものと食い違っているであろう．）上に注意した行列式の公式から，これらの接続行列は

$$\det C^{12|34} = 1 \tag{4.6}$$

という関係式を満たす．これがユニタリー性に相当する関係式であると思われる．

$C^{12|35}$ は $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ に対する Wronskian の比としても書ける．そのように見ると，行列式が 1 になるという上の関係式自身がやはり Wronskian の間の Plc̆ker 関係式のいいかえである．（それを確かめるには，一部の Voros 係数が

$$a_{12} = a_{15} = a_{26} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = 1 \tag{4.7}$$

というように自明化していること – 反復積分の積分路を無限遠の方へ追いやれることからわかる – を利用する．）

接続行列 $C^{12|34}$ の構造についてもう少し立ち入って考えてみよう．まず 4 つの解の間の Wronskian 比としては行列要素は

$$C^{12|34} = \begin{pmatrix} \dfrac{W[\psi_3, \psi_2]}{W[\psi_1, \psi_2]} & \dfrac{W[\psi_4, \psi_2]}{W[\psi_1, \psi_2]} \\ -\dfrac{W[\psi_3, \psi_1]}{W[\psi_1, \psi_2]} & -\dfrac{W[\psi_4, \psi_1]}{W[\psi_1, \psi_2]} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

となる．対角要素は分子分母が

$$W[\psi_3, \psi_2] = -2\lambda a_{23}, \quad W[\psi_4, \psi_1] = 2\lambda a_{14}, \quad W[\psi_1, \psi_2] = -2\lambda \tag{4.9}$$

だから

$$C^{12|34}_{13} = a_{23}, \quad C^{12|34}_{24} = a_{14} \tag{4.10}$$

というように Voros 係数で書けて，転回点が合流しない限り反復積分級数表示で解析できる．他方，非対角要素の方は，既に注意しているように直接に前進路で結べない無限遠点どうしに関わるものだから，Plücker 関係式を使って他の Wronskian （そして Voros 係数）であらわす．前述のように $C^{12|56}$, $C^{56|34}$ の積としてあらわすことでちょうどそういう表示が得られている:

$$\begin{aligned} C^{12|34}_{23} &= i\frac{a_{36}a_{15}e^{2s(r_1)\lambda} + a_{35}a_{16}e^{2s(r_3)\lambda}}{a_{12}a_{56}}, \\ C^{12|34}_{14} &= -i\frac{a_{46}a_{25}e^{-2s(r_4)\lambda} + a_{45}a_{26}e^{-2s(r_2)\lambda}}{a_{12}a_{56}}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

ただし，すでに注意したように，ここでいくつかの Voros 係数は 1 になるが，そのようなものも 1 に書き直さないで残しておいた．右辺に現れる指数関数がどれも $\lambda \to \infty$ で指数的に小さい（漸近的に 0 になる）ことに注意されたい．従って準古典近似では

$$C^{12|34} \sim 1 + O(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \to \infty) \tag{4.12}$$

となるが，これは $C^{12|34}$ の行列式が厳密に1であることと矛盾していない．対角要素の方も $C^{12|56}C^{56|34}$ から次のような別表示をもつことがわかる．（これも結局は Plücker 関係式といってよい）．

$$
\begin{aligned}
C_{13}^{12|34} &= \frac{a_{36}a_{25}}{a_{12}a_{56}} + \frac{a_{35}a_{26}}{a_{12}a_{56}} e^{-2(s(r_2)-s(r_3))\lambda}, \\
C_{24}^{12|34} &= \frac{a_{45}a_{16}}{a_{12}a_{56}} + \frac{a_{46}a_{15}}{a_{12}a_{56}} e^{-2(s(r_4)-s(r_1))\lambda}.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

5．転回点の合流に伴う問題

このように，転回点が一定の距離を隔てている限り s- 平面上の反復積分による解析は有効である．しかしながら転回点が合流して来ると Voros 係数の中に積分路の pinch を受けるものが出てきて，反復積分級数はやがて意味を失う．級数の各項の大きさを大ざっぱに見積ると，合流しつつある２つの展開点の距離をあらわすパラメータを α として

$$
n\text{-th term} \sim \mathrm{const}/(\alpha\lambda)^{\mathrm{n}} \tag{5.1}
$$

となる．当然，反復積分表示から Laplace 積分表示を介して得られる漸近展開は $\alpha \to 0$ で一様に有効ではなくなる．この困難は s- 平面上の解析，つまり平面波を無摂動系にとって解を記述する方法では避けられない．

すべての Voros 係数が pinch の問題を抱えているわけでもない．pinch が起きるかどうかは合流の状況によって異なる．例えば図１で r_1 と r_3，r_2 と r_4 がそれぞれ虚軸上の２点に合流する場合には a_{14} と a_{23} （つまり $C^{12|34}$ の対角要素）は pinch されない．従ってこれらに対しては今までの解析の方法を適用する方がよいだろう．他方，r_1 と r_2，r_3 と r_4 がそれぞれ実軸上の２点に合流するときには a_{14} と a_{23} が pinch されるが，今度は前の場合に pinch されたものの中に pinch されないものが出て来る．いずれにせよ、Plücker 関係式を使って書き直すことで pinch を避けられる場合には問題はないが，そうでなければ何か別の手段を用いて Wronskian を表示したり解析したりしなければならない

直観的には，$\alpha \to 0$ に伴って上のような展開（収束表現にせよ漸近表現にせよ）の項の間に一種の組替えが起り，なんらかの意味で一様な有効性をもつ展開に変わる，ということを期待したい．なにしろ ψ_j という解自体は境界条件で完全に決まり，線形方程式の係数

の正則なところ（つまり今の場合には z- 平面全体）に解析接続されることが一般論によって保証されているし，それらの Wronskian も方程式の係数に入っている正則パラメータには正則に依存する．本来どこにも転回点の合流に伴う特異性などはない．これに対して諸々の解法は Wronskian に具体的な表示や解析の手段を与えようとするものであるが，たいていの場合限られた有効域しか持たず，有効域の限界（今の場合は単純転回点が合流するところ）では一見特異性があるように見えるわけである．

無摂動系として平面波の代わりに Weber 函数を使えば合流の過程で有効性を失わない記述が得られると期待される．具体的には中村 [Na] 西本 [Ni] にならって

$$(d\zeta/dz)^2 = f/(\zeta^2 - \alpha^2) \tag{5.2}$$

という方程式で定義される新たな独立変数 ζ を導入し，それに伴う Liouville 変換

$$\varphi = (d\zeta/dz)^{1/2}\psi \tag{5.3}$$

でもとの方程式を

$$\varphi_{\zeta\zeta} = (\lambda^2(\zeta^2 - \alpha^2) + v(\zeta))\varphi \tag{5.4}$$

という形の方程式にうつす．z- 平面上の合流する 2 つの転回点は ζ- 平面上の 2 点 $\zeta = \pm\alpha$ にうつっている．こうして得られた方程式は，s- 平面上と違って，Weber 方程式を無摂動系とし，そこにポテンシャル $v(\zeta)$ が加わった形をしている．中村氏や西本氏は合流する 2 組の転回点対のそれぞれに対してこの変換を施して Weber 函数の接続公式から問題の ψ_j 達の接続関係を見いだそうとしている．このアイディアを我々の視点から見直せないだろうか？

話をはっきりさせるために，4 つの転回点が 2 つずつ虚軸上の点に合流する状況をあつかう．（図 1 参照）これは中村 [Na] で特に念入りに計算が試みられ，近似における様々な問題が指摘されている場合である．特に上半平面で合流する 2 つの転回点に関して ζ を導入し，状況を分析してみよう．（図 6 参照）

この場合，我々がまず第一に目指したいのは $W[\psi_1, \psi_3]$（ならびに下半平面で同様なことを考えるときの $W[\psi_2, \psi_4]$）に対して合流の前後・瞬間を通じて有効な（一様な）記述を与えることである．（ついでに $W[\psi_1, \psi_4]$, $W[\psi_2, \psi_3]$ に対しても平行した取り扱いができ

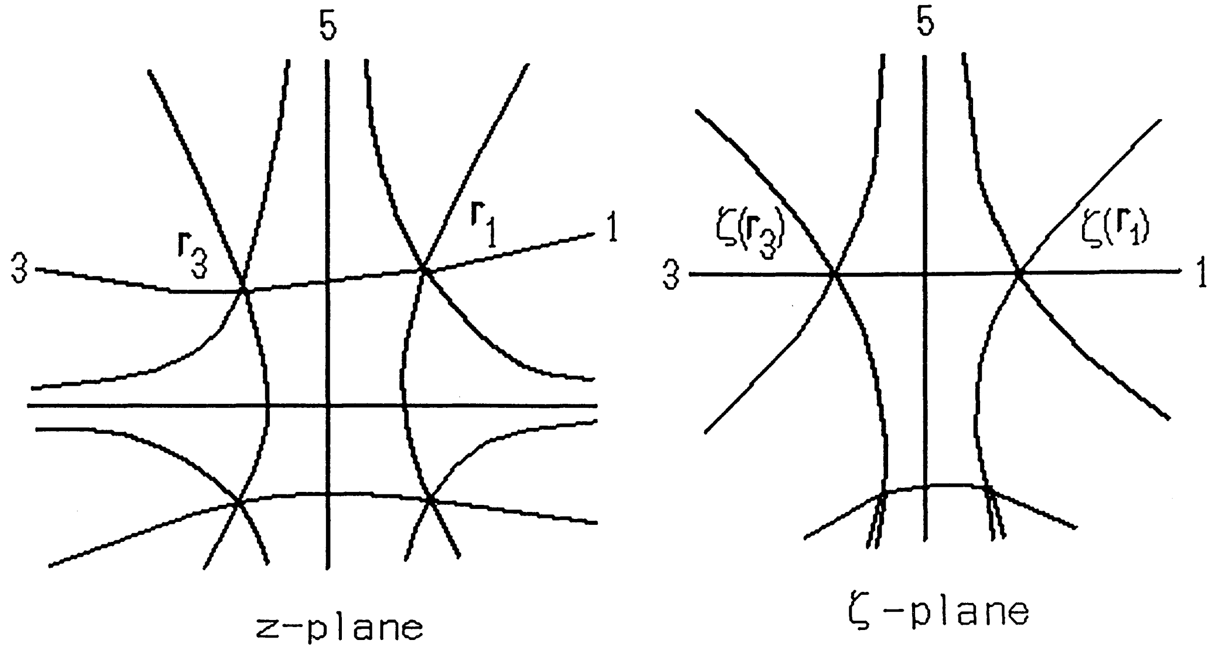

図6　ζ- 平面上の様子

るのならばなお有難いが，こちらの方は s- 平面上の解析でも処理できている．）そのために，思い切って次のような近似を行ってみたらどうか？まず，ψ_j $(j=1,3,5)$ が

$$\psi_j \approx (d\zeta/dz)^{-1/2} h_j(\lambda,\alpha) w_j(\zeta,\lambda,\alpha), \tag{5.5}$$

というように近似されると考える．ここで w_j は ζ- 平面の対応する無限遠で recessive に選んだ Weber 函数達であり（図6参照），また $h_j(\lambda,\alpha)$ はそれらと WKB 解とのずれをあらわす定数因子である．具体的な選び方は中村 [Na] 西本 [Ni] に書いてある．ただし我々の ψ_j はそこでの WKB 解の選び方とさらに位相因子だけ食い違っているので，h_j 達もそれに応じて違っている． Weber 函数の接続公式は次のようになる．

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{\sqrt{2\pi}\exp[-\pi i(1+\alpha^2)/4]}{\Gamma((1-\alpha^2)/2)} w_5 - \exp[-\pi i(1+\alpha^2)/2] w_1, \\ w_1 &= \frac{\sqrt{2\pi}\exp[\pi i(1+\alpha^2)/4]}{\Gamma((1-\alpha^2)/2)} w_5 - \exp[\pi i(1+\alpha^2)/2] w_3. \end{aligned} \tag{5.6}$$

これと ψ_j と w_j の間の近似的対応関係を組み合わせれば，厳密な接続公式

$$\psi_3 = \frac{W[\psi_3,\psi_5]}{W[\psi_1,\psi_5]}\psi_1 - \frac{W[\psi_3,\psi_1]}{W[\psi_1,\psi_5]}\psi_5, \tag{5.7}$$

$$\psi_1 = \frac{W[\psi_1,\psi_5]}{W[\psi_3,\psi_5]}\psi_3 - \frac{W[\psi_1,\psi_3]}{W[\psi_3,\psi_5]}\psi_5, \tag{5.8}$$

の Wronskian 比に対する近似式を得ることができる．（ちなみに，分母の $W[\psi_1, \psi_5]$ と $W[\psi_3, \psi_5]$ は対応する Voros 係数の自明性 $a_{13} = a_{15} = 1$ により虚数単位と λ の指数函数と組み合せで書けるから，余り問題ではない．）こうして $W[\psi_1, \psi_3]$ に対する近似的表示を得て，Child [C] の計算結果などをも比較したらどうか？ – これは直観的な議論であるが，それなりにもっともらしくはあるし，処法に曖昧さはない．この処法できちんと計算を最後までやり遂げる価値はある．（ただし，我々の cut sheet や WKB 解の選び方がかなり違うため計算間違いの恐れがあり，ここでは具体的な計算結果は書かない．）

この直観的な議論を数学的に裏付けるにはいろいろなやり方があろうと思うが，筆者の力不足のためまだ完成していない．基本的には ζ-平面上にうつした Liouville-Green 解

$$\varphi_j = (d\zeta/dz)^{1/2}\psi_j \tag{5.9}$$

を改めて Weber 函数からの摂動として正確に（積分方程式の逐次代入解法で）構成し直して，それを解析し直すことになる．具体的には Olver [O] にならって

$$\varphi_j = Aw_j + Bw_{j,\zeta} \tag{5.10}$$

と書いて A, B に対する微分方程式を立てて解くやり方と，（$W[\psi_j, \psi_k]$ を求める場合）Harrel-Simon [HS] の定数変化法にならって

$$\varphi_j = Cw_j + Dw_k \tag{5.11}$$

と書いて C, D に対する微分方程式を立てて解くやり方とがある．（実はこの 2 つは実質的に同じことである．）ただし，Olver, Harrell, Simon と違って，無限遠点に直接に境界条件をおいて，a_{jk} をこれらの係数函数の境界値として実現することを考える．このようなやり方で，例えば C, D に対する反復積分表示を少なくとも形式的には書き下すことができる．難点は，反復積分が指数函数の代わりに Weber 函数を含むので s-平面上の場合のように簡単には評価できないということで，ここがまだ乗り越えられない．さらに，それを Laplace 積分に書き直すということも容易ではない．そのうちなんとかなる，と楽観してはいるのだが．もっとも，Gérard, Grigis [GG] にならって，積分方程式の積分始点を無限遠点におくかわりに，有限だが十分遠い点におく，という策をとることも決して悪い考え方ではないし，完璧を期す余り何も出来ないよりはましであろう．

6. まとめと展望

複素 WKB 法の厳密な取扱い，という視点から原子衝突過程の解析に現れる接続問題を議論した．主要な論点をまとめておこう．

- Wronskian を使えば，解の具体的な構成や記述に関わる部分とは独立に，接続係数の定義とそれらの満たす代数的な関係式を定式化できる．
- s- 平面上の解析は古典的な Liouville-Green 近似の厳密な定式化を与える．それにより，無限遠点で正規化した Liouville-Green 型の解系を構成することができる．それらの振幅部分の境界値として Voros 係数が定義され，それに対して反復積分の級数として解析的表示を与えることができる．Laplace 積分表示，$\lambda \to \infty$ における漸近展開，などがそこから導かれる．
- Liouville-Green 型の解の間の Wronskian を求めることが接続問題を解くことである．無限遠点どうしを結ぶ前進路の配置から，一部の Wronskian は Voros 係数に簡単な因子を掛けたものになることがわかる．
- 単純転回点のみある場合には Plücker 関係式を解くことで他の Wronskian を全て決めることがことができる．また，Plücker 関係式は Voros 係数の間のいろいろな代数的関係式も与えるが，その中にはユニタリー性にあたる条件が含まれている．
- 単純転回点が合流する場合には Voros 係数を与える反復積分の積分路が特異点により pinch されることが起こり得る．その場合には反復積分表示は有効性を失う．
- 2つの転回点が合流する場合には，Weber 方程式からの摂動系へ線形問題をうつすような Liouville 変換の利用が有効と考えられる．それに基づいて Weber 函数の接続公式から近似的に Wronskian を求める処方を示したが，数学的な裏付けはまだ完全にはできていない．

ここでは2階単独方程式を扱ったが，2×2 係数をもつ1階方程式系でも同様な取扱が可能である．Painlevé 方程式の解析への応用 [IN] [K] にはそのような場合が重要になる．原子衝突過程の問題で多準位間遷移を考えれば高階方程式が現れるから，2階に限るのは視野が狭すぎるとも言えなくはない．Liouville 変換の手法は高階方程式では（流体力学の Orr-Sommerfeld 方程式のような特別なものを別にすれば）一般には使えない．その場合でも，適当な積分方程式に直して逐次代入解の構造をまじめに調べる，という素朴なやり方

で詳しい解析ができることは多いと思う．Ecalle の理論は即物的に言えばまさしくそういうことを組織的に実行する枠組みなのである．（もちろん，alien calculus 自体はもっと深い内容をもっている．）

古典的な WKB 法が 1 自由度の量子力学系を扱うのに対して，多自由度の量子力学系は – たとえ Hartree-Fock 近似などで 1 体問題に持ち込むとしても – 偏微分方程式を扱わねばならず，準古典理論を扱うにも超局所解析などの大がかりな道具立てが必要になる．この方面の本家本元，Sjöstrand, Helffer [HeSj] をはじめとするフランスの数学者達の仕事はもっぱらそういう方向を目指している．こういうところから学ぶべきことは多い．複素 WKB 法は本質的に 1 次元的で，こういう場合を直接扱うことができないからである．

しかしながら，多次元の問題が何らかの集団座標 (collective coordinate) によって 1 次元に帰着できる（もちろん多くの場合それは近似だが）ことはしばしば起こる．そのときには複素 WKB 法が使える可能性が出て来る．実際，原子衝突過程に関連してここで扱った接続問題も，もともとは量子論的多体問題から出発しているので，同様の性質のものである [Ch] [Na]．考えてみれば，s という変数自体（WKB 法では作用積分であるが）一種の集団座標である．これは Laplace 積分表示の中の積分変数，つまり Ecalle 理論の要をなす Borel 変換の変数，としてあらわれる．経路積分（Feynman-Kac の公式）の視点から見れば 1 自由度の量子力学といえども無限次元の汎函数積分に他ならず，それを 1 次元の積分である Laplace 積分で書くということはまさしく集団座標の思想ではないだろうか？

面白いことに，無限自由度系である場の理論にも同様の取扱いができる場合があるらしい．最近の弦の理論や 2 次元量子重力理論にはそういう意味の計算がいろいろ見受けられる（[Mo] およびその引用文献参照）．また，ゲージ場のインスタントンの取り扱いに関連する最近の青山，菊地の仕事 [AK]（およびそこに引用されている他の人達の仕事）も，複素 WKB 法や Ecalle 理論の立場から見ても，1 次元の集団座標を取り出す議論として見ても，大変興味深い．（そもそも，筆者はこの集団座標という視点を青山，菊地の仕事から学んだ．仕事の内容を解説して下さった菊地尚志氏に感謝いたします．）さらに，すこし趣は変わるが，Gawędzki-Kupiainen [GK] はある場面では Kadanoff-Wilson のくりこみ群の考え方をスケールパラメータ s（またしても s だ！）に関する有効ポテンシャルの微分と積分で説明している．これは理想化した説明ではあるが，やはり一種の隠れた集団座標と見られなくはない．しかも Gawędzki 達はこのパラメータを利用してくりこみ群と Ecalle 理

論との関係を議論している！

このように，複素 WKB 法や Ecalle 理論を適用できそうな材料は“適用範囲が狭い”という世評とは裏腹に，実際には随分豊富にあるように思われる．この論説で紹介した筆者の方法は残念ながら適用に際してまだまだ制約が多く，与えられた問題を自由自在に扱えるというわけでもないし，多少荒削りでも十分に実用に耐える近似解ならばいつでも用意できる，というわけでもない．改善は今後の課題である．他方では，多数の自由度を次第に消去して集団座標にまとめて行くという考え方そのものが何か数学的に面白い内容を秘めているように思える．これは複素 WKB 法とは別系統の問題ではあるが，重なる面も多く，平行して追及することで新たな展望が開けて来るのではないかと期待される．

［1991年6月］

引用文献

[AK] Aoyama, H., and Kikuchi, H., Interacting instantons for TeV physics, Kyoto preprint, KUCP-25 (September, 1990); A new valley method for instanton deformation, Kyoto preprint, KUCP-31 (April, 1991).

[BW] Bender, C., and Wu, T.T., Phys. Rev. 184 (1969), 1231-1260; Phys. Rev. Lett. 16 (1971), 461-465; Phys. Rev. D7 (1973), 1620-1636.

[C] Child, M.S., Molecular collision theory, Academic Press 1974, Appendix D.

[D] Dunster, T.M., Uniform asymptotic solutions of second-order linear differential equations having a double pole with complex exponent and a coalescing turning point, SIAM J. Math. Anal. 21 (6) (1990), 1594-1618.

[E] Ecalle, J., Cinq applications des fonctions résurgentes, Pré-pub. Math. Univ. de Paris-Sud 84T62 (1984).

[EF] Evgrafov, M.A., and Fedoryuk, M.V., Asymptotic behavior as $\lambda \to \infty$ of the solution of the equation $w''(z) - p(z, \lambda)w(z) = 0$ in the complex z-plane, Russian Math. Surveys 21(1) (1966),1-48.

[FF] Fröman, N., and Fröman, P., JWKB approximation: Contribution to theory (North-Holland, 1965).

[GG] Gérard, C., and Grigis, A., Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, J. Diff. Eqs. 72 (1988), 149-177; Grigis, A., Sur l'équation de Hill analytique, Sém. Bony-Sjöstrand-Meyer 16 (1984/85).

[GK] Gawędzki, K., and Kupiainen, A., Asymptotic freedom beyond perturbation theory, in *Critical phenomena, random systems, gauge theories*, Les Houches 1984, ed. K. Osterwalder and R. Stora (North Holland, 1986).

[HaSi] Harrell, E., and Simon, B., The mathematical theory of resonances whose widths are exponentially small, Duke Math. J. 47 (1980), 845-942.

[HeSj] B. Helffer, and J. Sjöstrand, Multiple wells in the semiclassical limit I, Communications in P.D.E. 9 (4) (1984), 337-408; subsequent papers published in Bull. Soc. Math. France. etc.

[IN] Its, A.R., and Novokshenov, V.Yu., The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations, Lecture Notes in Mathematics vol. 1191 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York).

[K] Kapaev, A.A., , Asymptotics of solutions of the Painlevé equation of the first kind, Differential Equations 24 (1988), 1107-1115.

[Mä] März, C., Thèse, preprint 1989.

[Mo] Moore, G., Geometry of the string equations, Commun. Math. Phys. 133 (1990), 261-304.

[Na] Nakamura, H., ノート（１９８３年１月２６日，１９８４年９月１４日); Phys. Rev. A26 (1982), 3125.

[Ni] Nishimoto, T., Confluent W-K-B approximation, I, Kodai Math. J. 10 (1987), 362-374.

[O] Olver, F.W.J., Asymptotics and special functions (Academic Press, 1974).

[DDP] Delabaere, E., Dillinger, H., and Pham, F., Développements semi-classiques exacts des niveau d'énergie d'un oscillateur à une dimension, C. R. Acad. Sci. Série I, 310 (1990), 141-146.

[T] Takasaki, K., Analytic expression of Voros coefficients and its application to WKB connection problem, in *Special functions*, ICM90 Satellite conference, Okayama, August 1990, World Scientific, Singapore (to appear); 複素 WKB 法の解析的裏付けと接続問題, 数理解析研究所研究集会 “超局所解析とその応用” (July, 1990) 講究録原稿.

[V] Voros, A., The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A, 39 (1983), 211-338.