

Nonlinear Ergodic Theorems for Non-Lipschitzian Semigroups

東工大 理 高橋 渉 (Watan Takahashi)

S をある与えられた集合とし, $m(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体のつくる Banach 空間とする. X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とし, X^* をその dual 空間とする. このとき, $\mu \in X^*$ は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ を満たすなら, X 上の mean とよばれる. $\mu \in X^*$ が mean である必要十分条件は, 任意の $f \in X$ に対し

$$\inf_{s \in S} f(s) \leq \mu(f) \leq \sup_{s \in S} f(s)$$

が成り立つことである. また, S が topological 半群であるとき, $a \in S$ に対して, $m(S)$ 上の線形連続写像 l_a と r_a は

$$(l_a f)(t) = f(at), \quad (r_a f)(t) = f(ta)$$

で定義される. X が 1 を含み, かつ $l_a(X) \subset X$ ($r_a(X) \subset X$) となる線形部分空間とするとき, X 上の mean μ は, $f \in X$ と $a \in S$ に対して

$$\mu(laf) = \mu(f) \quad (\mu(raf) = \mu(f))$$

を満たすなら, X 上の left invariant (right invariant) mean であるといわれる. また, left invariant かつ right invariant である mean を invariant mean とよぶ.

一方, C を Hilbert 空間の空でない閉凸集合とし, C 上の mappings の族を $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ とする. このとき, \mathcal{S} がつぎの条件 (1), (2), (3) を満たすなら, \mathcal{S} は nonexpansive 半群であるといわれる.

$$(1) \quad T_{st}x = T_s T_t x, \quad \forall s, t \in S, \forall x \in C;$$

(2) 任意の $x \in C$ に対し, $s \mapsto T_s x$ は連続である;

(3) 任意の $s \in S$ に対し, T_s は nonexpansive 写像である.

また, (3) の条件を

(3)' 任意の $s \in S$ に対し, T_s はリゾニッツ係数 k_s をもつリゾニッツ写像であり, $\limsup_s k_s \leq 1$ である,

という条件でおきかえたとき, \mathcal{S} は uniformly nonexpansive 半群であるといわれる. さらに (3) の条件を

$$(3)'' \quad \limsup_t \left\{ \sup_{y \in C} [\|T_t x - T_t y\| - \|x - y\|] \right\} \leq 0$$

という条件でおきかえたとき, asymptotically nonexpansive 半群であるといわれる [6].

ここでは, まず asymptotically nonexpansive 半群に対する非線形エルゴード定理を invariant mean を用いて Hilbert 空間の場合で証明する. つぎに submean の概念を用いて, 同じ半群に対する共通不動点定理を証明する. invariant mean の有効性をみていただければ幸いである.

§2. 非線形エルゴード定理

Hausdorff 位相をもった半群 S がつぎの条件を満たすなら, semitopological 半群であるといわれる.

任意の $a \in S$ に対し, S から S への写像

$$s \mapsto s \cdot a, \quad s \mapsto a \cdot s$$

が連続である.

C を Hilbert 空間 H の空でない集合とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上で定義され, つぎの条件を満たす写像の族とする:

- (1) $T_{st}x = T_s T_t x, \quad \forall s, t \in S, \forall x \in C;$
- (2) 任意の $x \in C$ に対し, $s \mapsto T_s x$ は連続である;
- (3) 任意の $x \in C$ に対し

$$\inf_s \sup_t \sup_{y \in C} [\|T_{ts}x - T_{ts}y\| - \|x - y\|] \leq 0.$$

このとき, $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ は C 上の asymptotically non-expansive 半群であるといわれる. \mathcal{S} に対し, $F(\mathcal{S}) \subseteq T_s$ ($s \in S$) の共通不動点集合を表す.

補助定理 1. S を semitopological 半群とし, C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. $\mathcal{T} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の asymptotically nonexpansive 半群とし, 任意の $s \in S$ に対し, T_s は連続であるとする. このとき, $F(\mathcal{T})$ は閉凸集合である.

証明 $F(\mathcal{T})$ が閉集合であることは, T_s ($s \in S$) の連続性より明らかである. $F(\mathcal{T})$ が凸集合であることを証明する. そのためには, 任意の $x, y \in F(\mathcal{T})$ に対し, $\frac{x+y}{2} \in F(\mathcal{T})$ であることを示せば十分である. いま任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\sup_t \sup_{f \in C} [\|T_{ts_0} z - T_{ts_0} f\| - \|z - f\|] < \varepsilon_0$$

とかが $\|x - y\| \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon^2$ となるような $s_0 \in S$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在する. よって, 任意の $t \in S$ に対し

$$\begin{aligned} \|T_{ts_0} z - z\|^2 &= \frac{1}{2} \|T_{ts_0} z - x\|^2 + \frac{1}{2} \|T_{ts_0} z - y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (\|z - x\| + \varepsilon_0)^2 + \frac{1}{2} (\|z - y\| + \varepsilon_0)^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \|x - y\| + \varepsilon_0\right)^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 \\ &= \|x - y\| \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

となる. いま $s \in S$ であり, $\varepsilon > 0$ とする. T_s が z で連続であることより

$$\|z - f\| < \delta \Rightarrow \|T_s z - T_s f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるような $\delta > 0$ が存在する. $s_0 \in S$ とし

$$\|T_{ts_0} z - z\| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\right), \forall t \in S$$

となるようなものを選び、任意の $t \in S$ に対し

$$\begin{aligned} \|T_s z - z\| &\leq \|T_s z - T_s T_{ts_0} z\| + \|T_s T_{ts_0} z - z\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる. よって、任意の $s \in S$ に対し $T_s z = z$ となる.
これは証明を完了する.

$C(S)$ を S 上の有界連続関数全体からなる Banach 空間とする.
そして、 $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ を $C(S)$ 上の means のネットとする.
このとき、任意の $f \in C(S)$ と $s \in S$ に対し

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f) \rightarrow 0, \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \rightarrow 0$$

をみたすなら、 $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ は漸近的に不変であるといわれる.
例えば

$S = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする. u また $f = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in m(S)$
に対し、 $m(S) = C(S)$ 上の means のネットを u のように
に定義する.

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

実際, μ_n は線形である. また, $f \in m(S)$ に対して

$$|\mu_n(f)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |x_k| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f\| = \|f\|$$

であり, かつ $\mu_n(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$ であるから,

$$\|\mu_n\| = \mu_n(1) = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

つぎに, $f = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in m(S)$ と $m \in S$ に対して

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu_n(\gamma_m f)| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot 2m \|f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから, $\{\mu_n\}$ は漸近的に不変な means の列である.

もう 1 つ例を挙げよう.

$S = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とする. $f \in C(\mathbb{R}_+)$ と $\lambda > 0$ に対して,

$$\mu_\lambda(f) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt$$

とする. すると $\{\mu_\lambda : 0 < \lambda < \infty\}$ は $C(\mathbb{R}_+)$ 上の漸近的に不変な means のネットになる. また μ_λ が mean であることも示す. $\mu_\lambda(1) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda 1 dt = 1$ であり, かつ任意の $f \in C(\mathbb{R}_+)$ に対して,

$$|\mu_\lambda(f)| = \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \|f\| dt = \|f\|$$

であるから, $\|\mu_\lambda\| = \mu_\lambda(1) = 1$ である. $f \neq 0$ かつ μ_λ は mean である. つぎに $h \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned} |\mu_\lambda(f) - \mu_\lambda(r_h f)| &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t+h) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_h^{\lambda+h} f(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^h f(t) dt - \frac{1}{\lambda} \int_\lambda^{\lambda+h} f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2\|f\| \cdot h}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

より, $\{\mu_\lambda : 0 < \lambda < \infty\}$ は漸近的に不変な means のネットである.

いまや非線形エルゴード定理を証明しよう.

定理1. C は Hilbert 空間の空でない集合とし, S を $C(S)$ が invariant mean をもつような semitopological 半群とする. $\mathcal{T} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の asymptotically nonexpansive 半群とし, 任意の $s \in S$ に対して, T_s は連続であるとする. このとき, もし $\{T_t x : t \in S\}$ が有界であり,

$$\bigcap_s \overline{\text{co}} \{T_{st} x : t \in S\} \subset C$$

となるような $x \in C$ が存在するならば, $F(S) \neq \emptyset$ である. さらに $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ が $C(S)$ 上の漸近的に不変な means のネットとするならば, x_{μ_α} は $F(S)$ の元 x_0 に弱収束する.

ただし, x_{μ_α} は

$$(\mu_\alpha)_t(T_t x, y) = (x_{\mu_\alpha}, y), \quad \forall y \in H$$

を満たすような唯一の元である.

証明 $\mu \in C(S)$ 上の invariant mean とする. このとき, リースの表現定理によって

$$\mu_t(T_t x, y) = (x_\mu, y), \quad \forall y \in H$$

となる $x_\mu \in H$ が存在する. μ が invariant なので, 分離定理によって

$$x_\mu \in \bigcap_S \overline{\text{co}}\{T_{st} x : t \in S\} \subset C$$

となる. 一方, 任意の $y \in H$ に対して, 実数値関数

$$t \mapsto \|T_t x - y\|^2$$

は $C(S)$ の元となるので, この関数に対する μ の値 $\mu_t \|T_t x - y\|^2$ を定義できる.

$$r = \inf_{y \in H} \mu_t \|T_t x - y\|^2$$

とし,

$$M = \{z \in H : \mu_t \|T_t x - z\|^2 = r\}$$

とする. このとき, 任意の $y \in H$ と $s \in S$ に対して

$$\|x_\mu - y\|^2 = \|T_t x - y\|^2 - \|T_t x - x_\mu\|^2 - 2(T_t x - x_\mu, x_\mu - y)$$

なので,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_\mu - y\|^2 &= \mu_t (\|T_t x - y\|^2 - \|T_t x - x_\mu\|^2 - 2(T_t x - x_\mu, x_\mu - y)) \\ &= \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - x_\mu\|^2 - 2(x_\mu - x_\mu, x_\mu - y) \\ &= \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - x_\mu\|^2 \end{aligned}$$

を得る. これは M が一点 x_μ からなることを示している.

いま $x_\mu \in F(S)$ であることを示そう. 実際, $\varepsilon > 0$ とすると, $\{T_t x : t \in S\}$ の有界性より,

$$\|T_{su} x_\mu - T_{su} T_t x\|^2 \leq \|x_\mu - T_t x\|^2 + \varepsilon, \quad \forall t, s \in S$$

となるような $u \in S$ が存在する. よって

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \|x_\mu - T_t x\|^2 - \|T_{su} x_\mu - T_{su} T_t x\|^2 \\ &= \|x_\mu - T_{su} x_\mu\|^2 + \|T_{su} x_\mu - T_t x\|^2 \\ &\quad + 2(x_\mu - T_{su} x_\mu, T_{su} x_\mu - T_t x) - \|T_{su} x_\mu - T_{su} T_t x\|^2 \end{aligned}$$

である。そこで

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \|\alpha_\mu - T_{su}\alpha_\mu\|^2 + \mu_t \|T_{su}\alpha_\mu - T_t\alpha\|^2 \\ &\quad + 2(\alpha_\mu - T_{su}\alpha_\mu, T_{su}\alpha_\mu - \alpha_\mu) - \mu_t \|T_{su}\alpha_\mu - T_t\alpha\|^2 \\ &= -\|\alpha_\mu - T_{su}\alpha_\mu\|^2 \end{aligned}$$

となり, すべての $s \in S$ に対して $\|\alpha_\mu - T_{su}\alpha_\mu\|^2 < \varepsilon$ を得る. T_t の連続性と補助定理1の方法によつて,

$$\alpha_\mu = T_s \alpha_\mu, \quad \forall s \in S$$

を得る. つぎに, この α_μ が invariant mean μ によらないことを証明する. μ を $C(S)$ 上の invariant mean とする. このとき, すべての $z \in H$ に対して

$$\mu_t \|T_t \alpha - z\|^2 \leq \inf_S \sup_t \|T_t \alpha - z\|^2$$

を得る. 一方, $z \in F(\xi)$ と $s \in S$ に対して

$$\inf_u \sup_t (\|z - T_{tu} T_s \alpha\|^2 - \|z - T_s \alpha\|^2) \leq 0$$

である. よつて

$$\inf_u \sup_t \|T_{tu} \alpha - z\|^2 \leq \inf_u \sup_t \|T_{tus} \alpha - z\|^2$$

$$= \inf_u \sup_t \|T_{tu} T_s x - z\|^2 \leq \|T_s x - z\|^2$$

である。そこで、 $z \in F(\xi)$ に対し

$$\mu_t \|T_t x - z\|^2 = \inf_{\xi} \sup_t \|T_{t\xi} x - z\|^2$$

を得る。これは x_{μ} が μ による μ のことを意味している。いま $x_0 = x_{\mu}$ とおくと、 x_{μ_α} が x_0 に弱収束することを示そう。 μ を ネット $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ の cluster point (弱*位相の意味での) とする。このとき、[15] によつて、 μ は invariant mean である。 $\{x_{\mu_{\alpha_\beta}}\}$ を $x_{\mu_{\alpha_\beta}}$ が H の元 x に弱収束するような $\{x_{\mu_\alpha}\}$ の部分ネットとすると、ネット $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$ の cluster point λ は ネット $\{\mu_\alpha\}$ の cluster point でもあるので、 λ は invariant mean である。そこで、 $z = x_\lambda = x_0$ を得る。これは、 x_{μ_α} が $F(\xi)$ の元 x_0 に弱収束することを意味する。

§3. 不動点定理

X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とする。このとき、 X 上の実数値関数 μ はつぎの条件を満たすなら、 X 上の submean であるといわれる [9]。

- (1) $\mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g)$, $\forall f, g \in X$;
- (2) $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$, $\forall f \in X, \alpha \geq 0$;
- (3) $f \leq g \Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g)$;

(4) constant c に対して, $\mu(c) = c$.

つぎの補助定理は溝口-高橋[9]によって得られた.

補助定理 2. S を semitopological 半群とし, X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とする. μ を X 上の submean とする. $\{x_t : t \in S\}$ を Hilbert 空間 H の有界部分集合とし, D を H の閉凸集合とする. 任意の $x \in D$ に対して,

$$f(t) = \|x_t - x\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される S 上の実数値関数 f は X に属するとする. このとき,

$$g(x) = \mu_t \|x_t - x\|^2, \quad \forall x \in D,$$

$$r = \inf_{x \in D} g(x)$$

とおくならば,

$$g(z) = r, \quad r + \|z - x\|^2 \leq g(x), \quad \forall x \in D$$

となるような $z \in D$ が一意に存在する.

X を constant 1 を含み, $\lambda_s, s \in S$ のもとで不変となるような $m(S)$ の線形部分空間とする. このとき, X 上の submean μ は

$$\mu(f) = \mu(\lambda_s f), \quad \forall s \in S, \forall f \in X$$

を満たすなら left invariant であるといわれる。

定理 2. $C \subseteq H$ Hilbert 空間 H の空でない集合とし, S を semitopological 半群とする. X を constant 1 を含む $m(S)$ の線形部分空間とし, $l_s, s \in S$ のもとで不変のものとする. μ を X 上の left invariant な submean とし, $\mathcal{T} = \{T_t : t \in S\}$ をすべての T_t が連続となるような C 上の asymptotically nonexpansive 半群とする. もし, $\{T_t x : t \in S\}$ が有界となり, かつ

$$\bigcap_s \overline{\text{co}} \{T_{st} x : t \in S\} \subset C$$

となるような $x \in C$ が存在し, 任意の $v \in H$ に対し

$$f(t) = \|T_t x - v\|^2, \quad \forall t \in S$$

で定義される実数値関数 f が X に属するならば, $T_s z = z$ となるような T_s の共通な不動点 z が存在する。

証明 まず, H 上の実数値関数 g を

$$g(y) = \mu_t \|T_t x - y\|^2, \quad \forall y \in H$$

で定義しよう. $r = \inf_{y \in H} g(y)$ とおくと, 補助定理 2 によつて,

$$g(z) = r, \quad r + \|z - y\|^2 \leq g(y), \quad \forall y \in H$$

となるような $z \in H$ が一意に存在する. 任意の $s \in S$ に対し
 z , Q_s を H から $\overline{\{T_{st}\alpha : t \in S\}}$ の上への metric projection
 としよう. このとき, [10] に よって, Q_s は nonexpansive で
 あり, 任意の $t \in S$ に対し

$$\|T_{st}\alpha - Q_s z\|^2 = \|Q_s T_{st}\alpha - Q_s z\|^2 \leq \|T_{st}\alpha - z\|^2$$

となる. そこで,

$$\begin{aligned} \mu_t \|T_t \alpha - Q_s z\|^2 &= \mu_t \|T_{st}\alpha - Q_s z\|^2 \\ &\leq \mu_t \|T_{st}\alpha - z\|^2 = \mu_t \|T_t \alpha - z\|^2 \end{aligned}$$

となり, $Q_s z = z$ を得る. これは $z \in \overline{\{T_{st}\alpha : t \in S\}}$ であ
 ることを意味する. これはすべての $s \in S$ についていえるので

$$z \in \bigcap_s \overline{\{T_{st}\alpha : t \in S\}} \subset C$$

となる. この z について, $T_s z = z, \forall s \in S$ となることを示
 そう. 実際, $\{T_t \alpha : t \in S\}$ は有界なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に
 対して,

$$\|T_{s s_0} z - T_{s s_0} T_t \alpha\|^2 < \|z - T_t \alpha\|^2 + \varepsilon, \forall s, t \in S$$

となるような $s_0 \in S$ を選ぶことができる. このとき,

$$\begin{aligned}
\mu_t \|T_{s_0} z - T_t x\|^2 &= \mu_t \|T_{s_0} z - T_{s_0 t} x\|^2 \\
&= \mu_t \|T_{s_0} z - T_{s_0} T_t x\|^2 \\
&\leq \mu_t \|z - T_t x\|^2 + \varepsilon
\end{aligned}$$

となる。一方,

$$\|z - y\|^2 \leq \mu_t \|T_t x - y\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2, \quad \forall y \in H$$

なので, すべて $s \in S$ に対し,

$$\begin{aligned}
\|z - T_{s_0} z\|^2 &\leq \mu_t \|T_t x - T_{s_0} z\|^2 - \mu_t \|T_t x - z\|^2 \\
&\leq \mu_t \|z - T_t x\|^2 + \varepsilon - \mu_t \|T_t x - z\|^2 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

を得る。このあとは, 補助定理 1 と同様な手法によって, z が $T_s, s \in S$ の共通の不動点であることが証明できる。

定理 2 の直接的な結果として, 定理 1 中の $F(s)$ が空でないことが証明できる。さらにつぎの不動点定理を証明するのに直接利用できる。semitopological 半群 S が left reversible であるとは, S の任意の 2 つの閉右イデアルが空でない共通部分をもつときをいう。このケースでは, (S, \leq)

が

$$a \leq b \iff \{a\} \cup \overline{aS} \supset \{b\} \cup \overline{bS}$$

により directed system になる。

系. C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合とし, S を left reversible な半群とする. $\mathcal{T} = \{T_t : t \in S\}$ をすべての T_t が連続であるような C 上の asymptotically nonexpansive 半群とし, ある $x \in C$ が存在して, $\{T_t x : t \in S\}$ が有界であり,

$$\bigcap_s \overline{\{T_{st} x : t \in S\}} \subset C$$

となるものとする. このとき, すべての T_s に対し, $T_s z = z$ となるような $z \in C$ が存在する.

証明 $m(S)$ 上の実数値関数 μ を

$$\mu(f) = \limsup_s f(s), \quad \forall f \in m(S)$$

で定義する. すなわち, μ は $m(S)$ 上の left invariant な submean である. そこで, 定理 2 を使えばその証明は完了する.

以上, 抽象的な非線形エルゴード定理と不動点定理を証明したが, これらはすべて, $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ の場合や,

$$S = [0, \infty), \quad S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \dots$$

の場合に利用できる.

References

- [1] Baillon, J. B., Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 283 (1976), 75-78.
- [2] Brézis, H. and F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Adv. in Math., 25 (1977), 165-177.
- [3] Hirano, N. and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert space, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.
- [4] Ishihara, H., Fixed point theorems for lipschitzian semigroups, Canad. Math. Bull., 32 (1989), 90-97.
- [5] Ishihara, H. and W. Takahashi, Fixed point theorems for uniformly lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 127 (1987), 206-210.
- [6] Kirk, W. A. and R. Torrejón, Asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis 3 (1979), 111-121.
- [7] Kiuchi, H. and W. Takahashi, Asymptotic behavior of almost-orbits of non-Lipschitzian semigroups in Hilbert space, to appear.
- [8] Lau, A. T., Semigroup of nonexpansive mappings on a

- Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 105 (1985), 514-522.
- [9] Mizoguchi, N. and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis*, 14 (1990), 69-80.
- [10] Phelps, R.P., Convex sets and nearest points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 790-797.
- [11] Rodé, G., An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, 85 (1982), 172-178.
- [12] Takahashi, W., A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81 (1981), 253-256.
- [13] ———, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, *J. Math. Soc. Japan*, 36 (1984), 543-553.
- [14] ———, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 96 (1986), 55-58.
- [15] ———, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Canad. J. Math.*, 35 (1992), 1-8.