数理解析研究所講究録
第789巻1992年95-101

確率微分方程式とその周辺

京大数理研　楠岡成雄（Shigeo Kusuoka）

0）確率微分方程式の入門

確率モデルを数学的に取り扱うには理想的なノイズを考えることが有用である。理想的なノイズ N_t、$t\geq 0$，は単純に考えると、「確率過程であって

$$N_{t_1}, \cdots, N_{t_n}, \quad n\geq 2, \; 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_n$$

が独立になるもの」と定義するのがよいように見えるが、実はこれではうまくいかない。このため、数学では普通、その積分にあたるものを考える。もし、$X_t = \int_0^t N_s\,ds$ とおくと、これは次の性質を満たすはずである。

- $X_0 = 0$
- X_t は t について「ある意味で」連続
- $n\geq 2$，$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ に対し、$X_{t_k}-X_{t_{k-1}}$，$k=1,\cdots,n$，は独立

上の3つの条件を満たすものは加法過程と呼ばれ、P. Levy

が詳しく調べた。その構造は「Levy－伊藤の定理」により完全に決定づけられている。その定理を詳しく述べることはできないが、次の事が本質である。

◎加法過程はGauss的（正規分布）なものとPoisson的（Poisson分布）の二つのものに分解される。Gauss的なものの根元は中心極限定理にあり、Poisson的なものの根元はPoissonの小数の法則にある。

「Levy－伊藤の定理」より次のことが従う。

。もし加法過程 X_t が確率1で t について連続であれば、X_t の分布は正規分布となる。さらに、X_t の分布が平均0，分散 t，$t>0$，であるならば、そのような加法過程は本質的に一意に定まる。そのような加法過程はブラウン運動と呼ばれる。

さて、確率微分方程式（SDE）は「理想的ノイズが刻々と加わる常微分方程式」のことである。上で見たように、理想的ノイズにはGauss的なものとPoisson的なものがあり、共に重要であるが、Poisson的ノイズは取り扱いが難しいため、理想的ノイズとしてGauss的なもののみを考えることが多い。

Gauss的ノイズは本質的にブラウン運動で表わされるため

SDE＝「ブラウン運動の微分がノイズとして刻々と加わる常微分方程式」

と理解されることも多い。

SDEを数学的に厳密に定式化することに最初に成功したのは伊藤清である．彼はコルモゴロフの拡散過程の存在を直観に基づいて示　　として SDE に到達した。

コルモゴロフの拡散過程とは「時間変数 t について連続であり、x の位置にいる時 $[t, t+dt]$ 間に平均 $b(x)dt$，分散 $\sigma(x)^2 dt$ の過去とは独立なノイズが加わる」ような確率過程である。もちろんこれは数学的に厳密な表現ではない。コルモゴロフはこれを解析的な言葉にやき直して表現したが、伊藤は以下のような直接的表現で述べようとした。

先ず $X(t)$ を拡散過程とすると上で述べたことは「$dX(t) = X(t+dt) - X(t)$ は平均が $b(X(t))dt$，分散が $\sigma(X(t))^2 dt$ で過去と独立」ということになる。これはまだ数学的な表現とはいえない。しかし、これを書き直すと、「$\sigma(X(t))^{-1}(dX(t) - b(X(t))dt)$ は平均が 0，分散が dt で過去と独立」となる。よって　その積分 $Z(t)$ を考えれば

$$Z(t) = \int_0^t \sigma(X(s))^{-1}(dX(s) - b(X(s))ds)$$

は　t について連続な加法過程で、平均 0，分散 t となる。このようなものは唯一つ、ブラウン運動しかない。

$$dZ(t) = \sigma(X(t))^{-1}(dX(t) - b(X(t))dt$$

を書きかえれば、

$$(\ast) \qquad dX(t) = \sigma(X(t))\,dZ(t) + b(X(t))dt\ ,$$

Z(t)はブラウン運動（よって既知）となる。これがSDEである。もちろん ここまでは形式的変形で実質はない。伊藤は、しかし、これを確率積分方程式

$$(\ast\ast)\qquad X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s))\,dZ(s) + \int_0^t b(X(s))\,ds$$

と考え、さらに確率積分に厳密な定義を与えた。さらに、伊藤の公式と呼ばれる変換則を導いた。（確率積分、伊藤の公式等については[ ]を参照されたい。）

このようにして、伊藤清は直観を直接表現する新しい解析学を導入した。その結果、観念としては考えられてはいたが数学的に厳密にできなかったフィルタリングや確率制御といったものへの数学基礎を与えることになった。

◇ 確率微分方程式の応用の一例

文献[ ]を参考として、確率制御と数理経済学との関わりを見ていく。今、BondとStockの2つの金融財のポートフォリオの問題を考える。設定は以下の通りである。

P_t : Stockの価格

r : risk free rate = Bondの利率

μ : expected return on stocks in excess of the risk free rate （$r+\mu$ がstockの「利率の期待値」）

σ : volatility of stock returns

この時 P_t は次の確率微分方程式に従うことになる

$$dP_t = (r+\mu) P_t \, dt + \sigma P_t \, dZ_t$$

ただし、ここで Z_t はブラウン運動。さらに

S_t : value of the stock portfolio at time t

B_t : value of the bond portfolio at time t

$W_t = (1-s) S_t + B_t$

: liquidation value of the fund at time t

b : comission on stock purchases

(1ドルの stock が (1+b) ドルで買える)

s : comission on stock sales

(1ドルの stock が (1-s) ドルで売れる)

この時もし何もしなければ S_t, B_t の満たす方程式は

$$\begin{cases} dS_t = (r+\mu) S_t \, dt + \sigma S_t \, dZ_t \\ dB_t = r B_t \, dt \end{cases}$$

である。時刻 t までに得る情報は $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_s, 0 \le s \le t\}$ で与えられるが、それを基にして時刻 t に dL_t ドルの stock を買い、dM_t ドルの stock を売るという行動をとれば、S_t, B_t の満たす方程式は

$$(1) \quad \begin{cases} dS_t = (r+\mu) S_t \, dt + \sigma S_t \, dZ_t + dL_t - dM_t \\ dB_t = r B_t \, dt - (1+b) dL_t + (1-s) dM_t \end{cases}$$

となる。ここで L_t, M_t は単調非減で $\mathcal{F}_t$-可測でなくてはならない。さらに、破産をしてはいけないという制約条件

(2) $$W_t = B_t + (1-\delta)S_t \geq 0 \quad a.e.$$

を加える。今、開始時刻をT_0、終了時刻T_1とし、初期条件$B_{T_0}=B$, $S_{T_0}=S$の下で、(1), (2)が$t\in[T_0,T_1]$で成立するような可能な行動(L,M)の全体を$\mathcal{A}(T_0,T_1,B,S)$とする。

効用関数$u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$を

(3) $$u(W) = \frac{1}{1-A}\cdot W^{1-A}$$

(ただし$A>0$, $A\neq 1$)で与えることにする。この時、問題は期待効用

$$J(B,S,T_0,T_1,L,M) = E[u(B_{T_1}+(1-\delta)S_{T_1})]$$

を最大にする(L,M)を求めることにある。

今、$V(B,S,T_0,T_1)$

$$= \sup\{J(B,S,T_0,T_1,L,M);(L,M)\in\mathcal{A}(T_0,T_1,B,S)\}$$

とおく。与えられた問題は確率制御の問題の一つであり、動的計画法における Bellman の原理が適用可能であることが知られている。よって問題はすべての$B,S\in\mathbb{R}$ $T_0<T_1$に対して$V(B,S,T_0,T_1)$を求めることに帰着する。

残念ながら[ ]では問題は完全に解けてはいない。しかし次のような興味深い事実が示されている。

まず方程式(1)は本質的に線型であることに注意する。よって効用関数uの$(1-A)$次同次性より

$$V(cB,cS,T_0+T,T_1+T) = c^{1-A}V(B,S,T_0,T_1)$$

（$C>0$, $T\in\mathbb{R}$）がわかる。よって

$$V(t,x) = V(1, x, 0, t)$$ とおくと、

$$V(B, S, T_0, T_1) = |B|^{1-A}\, V(T_1 - T_0, S/|B|)$$

となるので、変数を二変数までに減らせる。実は $V(t,x)$ は時間発展の非線型方程式を満たすが、その形は複雑なので省略する。[ ]ではその非線型方程式の固有関数解を求め、それにより、一般解を評価することがなされている。

ここで与えられた確率制御の問題は数学的にもおもしろい問題である。今後、我国の確率論研究者が経済学に興味をもって経済学と数学との交流が確率解析の分野においても盛んになることを願っている。

参考文献

[1] Fleming, W.H., Grossman, S.G., Vila, J-L, and Zariphopoulous, T., Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs, submitted to Econometrica

[2] 楠岡成雄, 確率解析 その思想的発展, 数理科学 No. 340 11月号 (1991), p.5-9.