数理解析研究所講究録
第789巻 1992年 155-163

最適経済成長モデルとカオス

京大経済研究所　西村和雄　(Kazuo Nishimura)

1.一部門モデル

最適な貯蓄率の決定を内生的に決めるようなモデルとして、キャスとクープマンズは

$$
\text{(1)} \qquad \begin{aligned} & max \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t), 0<\rho<1 \\ & s.t. \ \ c_t = f(k_t) - (1+n) k_{t+1} + (1-\delta) k_t \geq 0, \quad k_t \geq 0, \quad t \geq 0 \\ & k_0 \ \text{ given} \end{aligned}
$$

を分析した。ρ は将来の一人あたりの消費 c_t から得られる効用を割り引くためにかけられる定数である。無限の将来に渡る効用を考えるのは、十分遠くの将来までを考慮することの近似であり、期間を特定の有限の値に限りことによって生じる不都合を避けるためのものである。このモデルの最適解としての成長経路は、斉一成長経路に単調に収束してゆく。記号を簡略化するため、$n=0$, $\delta=1$ とした上でこのことを説明しよう。

（1）の目的関数の最大値は、k_0 の値によって決まる。これを $V(k_0)$ とおこう。いま、来期の資本ストック k_0 を所与として、来期以降は最適な資本ストックが選ばれると仮定する。（1）の目的関数を

$$
u(c_0) + \rho V(k_1)
$$

とあらわすことができる。$c_0 = f(k_0) - (k_1)$ の条件の下でこれが最大化されるとき

（2）　$V(k_0) = u(\hat{c}_0) + \rho V(\hat{k}_1)$

が成り立っている。したがって、無限期間に渡る動学的最適化問題（1）は、次の2期間に渡る最適化問題に帰着する。

（3）
$$\max_{(c_0, k_1)} [u(c_0) + \rho V(k_1)]$$
$$\text{s.t. } c_0 + k_1 = f(k_0)$$
$$c_0 \geq 0, \quad k_1 \geq 0,$$
k_0 は所与

問題（3）における第1の制約式は図1の (k, c) 平面における直線 l_0 であらわされている。さらに効用を一定とする無差別曲線群を描き、直線 l_0 と無差別曲線の接点が最適解 (c_0, k_0) となる。

次に来期の資本ストック k_1 を所与として

（4）
$$\max [u(c_1) + \rho V(k_2)]$$
$$s.t. \quad c_1 + k_2 = f(\hat{k}_1)$$

を考えてみよう。$\hat{k}_1 > k_0$ と仮定すると、（4）の制約式は、図1の直線 l_0 で描かれる。$\hat{k}_1 > k_0$ の仮定から。l_1 は l_0 の右上方位置する。このとき（4）の最適解 $(\hat{c}_1, \hat{k}_2)$ が $\hat{k}_1 > \hat{k}_2$ みたすように決まることは明かであろう。

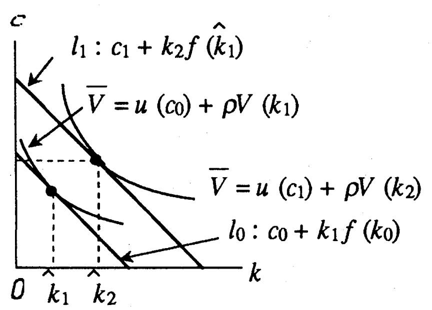

図1

同様にして

$$k_0 < \hat{k}_1 < \hat{k}_2 < \cdots\cdots \hat{k}_t < \cdots\cdots$$

が証明される。もし、はじめに $k_0 > \hat{k}_1$ と仮定しておくなら逆に

$$k_0 > \hat{k}_1 > \hat{k}_2 > \cdots\cdots \hat{k}_t > \cdots\cdots$$

が証明される。結局、$\hat{k}_1 \neq k_0$ である限り、資本ストックは最適経路に沿って単調の増加、あるいは減少し続けることになる。もし $\hat{k}_1 = k_0$ なら、時期における生産面からの制約式は今期のそれと同一のものとなり $\hat{k}_2 = \hat{k}_1$、したがって任意の $t \geq 1$ について $\hat{k}_t = k_0$ となる。このような解、すなわち定常解となる最適資本ストックの水準を k^* で表わそう。

最適定常解 k^* でみたされる条件を求めよう。いま、$k_0 = k^*, k_2 = k^*$ を固定して

（5）　$$g(k_1) = u(f(k^*) - k^*) + \rho u(f(k^*) - k^*) + \rho^2 V(k^*)$$

を考える。これは $k_0 = k^*$ で最大化されるので

（6）　$$g'(k) = u(f(k^*) - k_1) + \rho u'(f(k^*) - k^*)F'(k^*) = 0$$

よって最適定常解にでみたされる必要条件の一つは

（7）　$$f'(k^*) = \rho^{-1}$$

である。通常は生産関数が上に凸（凹関数）と仮定するので、最適定常解は（7）の解として一意的に決まり、任意の初期値 k_0 から出発した最適解は斉一成長経路と対応する定常解に k^* に単調に収束してゆく。

2.内生的景気循環

やはり、簡単化のために、$\delta=1, n=0, L_0=1$ と仮定した上で、ベンハビブと西村による1985年の論文にしたがって循環を解説しよう。

いま、生産側の条件をソロー、キャス、クープマンズの用いたものと異なり、消費財文と資本財部門に分けられると仮定する。それぞれの生産関数を

（8）　$$c_0 = F^1(K_1, L_1),\ k_0 = F^2(K_2, L_2)$$

とする。投入物は総資本ストック k_0 を K_1、K_2 に、総労働量1 を L_1、L_2 に分配して

使用する。効率的な生産によって、$(k_0, 1)$ を用いて生産可能な生産物 (k_1, c_0) の関係は次の問題を解いてえられる。

(9) $$\max. F^1(K_1, L_1)$$
$$s.t.\ k_1 = F^2(K_2, L_2)$$
$$K_1 + K_2 = k_0, \quad L_1 + L_2 = 1$$

この問題の解を目的関数に代入すると、社会的生産関数

(10) $$c_0 = F^1(K_1(k_0, k_1), L_1(k_0, k_1))$$

が得られる。これを $c_0 = T(k_0, k_1)$ と書く。すると、k_0 を所与としたときの c_0 と k_0 の関係図を図 2 の生産可能曲線 PPC_0 として描くことができる。

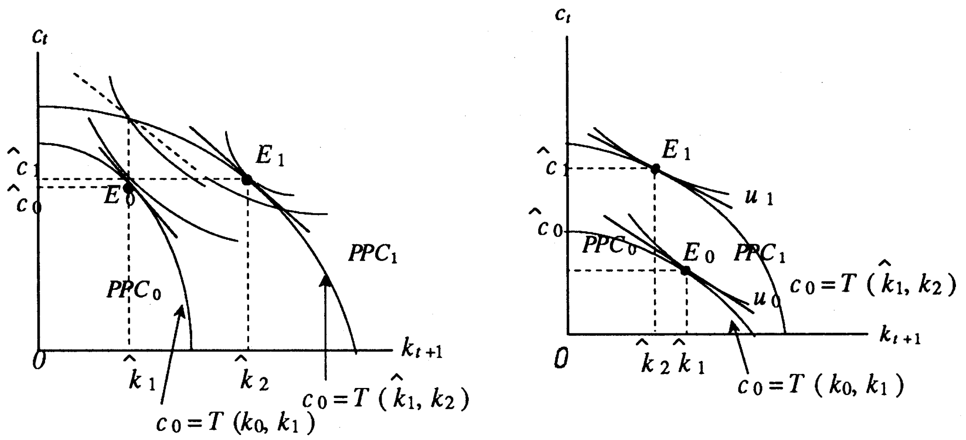

図 2 (i)　　図 2 (ii)

資本ストックが k_0 から $\hat{k}_1$ へ増加すると、$\hat{k}_1$ から生産される (k_2, c_1) の組は、PPC_1 となる。いま、消費財部門がより労働集約的、資本財部門がより資本集約的と仮定すると、生産可能曲線の PPC_0 から PPC_1 へのシフトは図 2 (i) のように、より資本財生産に有利なものとなる。資本財部門がより労働集約的、消費財部門がより資本集約的と仮定すると、生産可能曲線の PPC_0 から PPC_1 へのシフトは図 2 (ii) のように、より消費財生産に有利なものとなる。以上は、ストルパー・サミュエルソンモデルにおける、リプチンスキーの定理の結果である。

一方、効用関数を消費財の線型関数、特に $u(c) = c$ と仮定することによって、生

産関数の非線型性の及ぼす効果を抽出してみよう。このとき、効用の和の割引現在価値は、$c_0 + \rho V(k_1)$ である。この値を一定として描かれる無差別曲線の傾き $dc_0/dk_1 = -\rho V'(k_1)$ は、c_0 の値から独立である。よって、無差別曲線群は垂直方向に平行である。

以上から、最適化問題は

$$\text{(11)} \quad \max[c_0 + \rho V(k_1)]$$
$$s.t. \quad c_0 = T(k_0, k_1) \geq 0$$
$$k_0 \ \text{所与}$$

となる。そこでいま、所与の k_0 に対して、生産可能曲線 PPC_0 を描く。そのうえで効用を最大化する点が$E_0 = (\hat{k}_1, \hat{c}_0)$ である。いま、$\hat{k}_1 > k_0$と仮定すると、所与の $\hat{k}_1$ から生産される (k_2, c_1) の組み合わせ PPC_1 から PPC_0 の外側に位置する。PPC_1 の上で効用を最大化する点を$E_1 = (\hat{k}_2, \hat{c}_1)$ とする。

まず、図2(i)をみてほしい。無差別曲線は垂直方向に平行なので、無差別曲線は E_0 より右側の点 E_1 で PPC_1 と接する。したがって$\hat{k}_2 > \hat{k}_1$ となる。同様にして $k_0 < \hat{k}_1 < \hat{k}_2 < \cdots\cdots$ と資本ストックの最適経路が単調に増加することが証明される。一方、図2(ii)場合は、無差別曲線とPPC_1 の接点 E_1 はE_0 の左側に位置し $\hat{k}_2 < \hat{k}_1$ となる。よって、もし$\hat{k}_2$ を所与として得られる生産可能曲線PPC_2 を描くならば、PPC_1 の内側に位置するであろう。そして、$\hat{k}_3 > \hat{k}_2$ となる。この場合は、資本ストックの値は最適解に沿って振動する。すなわち $(\hat{k}_t - \hat{k}_{t+1})(\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_{t+2}) < 0$ がみたされるのである。

このようにして得られたた循環的な経路は、経済にとって最適なものである。上のような経済にとって、景気循環はむしろ望ましいことになる。我々のモデルの特徴は、経済が1部門ではなく、2部門からなるとするところにあるように思えるかもしれない。しかし、より重要なことは、ソロー型の生産関数が資本財と消費財が完全代替的である。あるいは、資本財をそのまま消費することができると仮定したのに対し、消費財と資本財を別な財として扱ったことにある。数学的にはソロー型が c_t と k_{t+1} の間の線型性

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t)$$

を仮定しているのに対し、我々は、それを非線型に仮定していることが違いである。

3.景気循環からカオスへ

これまでの議論を、資本ストックの初期値k_0と次期の最適な資本ストックのレベル$\widehat{k}_1$の関係を用いて、表現し直すと、次のようになる。いま、k_0と$\widehat{k}_1$の関係が$\widehat{k}_1 = h(k_0)$という関数 h で表わされるとする。$h^t(k) = h\left(h^t(k)\right)$と定義すると問題の性質から、$k_0$から出発する最適経路$\left\{\widehat{k}_t\right\}$について

$$\widehat{k}_t = h^t(k_0),\ \widehat{k}_{t+1} = h(\widehat{k}_t)$$

が成り立っている。

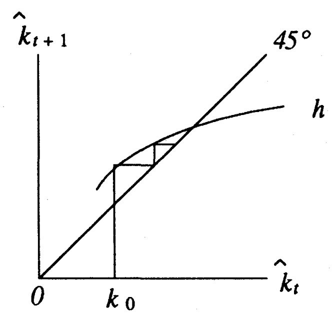

図3 (i)

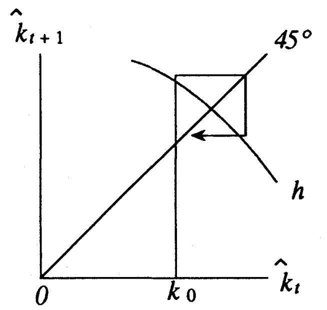

図3 (ii)

すると、hが増加関数の場合、図3(i)が、$\left\{\widehat{k}_t\right\}$が単調なケースと、$h$が減少関数の場合、図3(ii)が、$\left\{\widehat{k}_t\right\}$が循環するケースと対応する。より、複雑なケースは、図4のようにhが増加関数から、減少関数に切り替わる場合である。このようなケースが生じるのは、2部門モデルの例でいえばkが増加するにつれて消費財部門がより労働集約的から、より資本集約的な産業に切り替わる場合である。これをケース1として

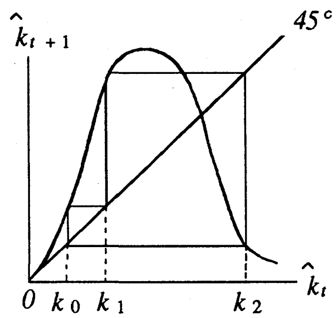

図4 (i)

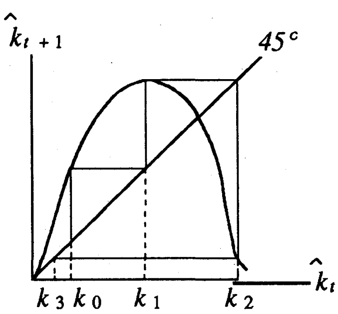

図4 (ii)

資本集約度の逆転が生じる場合とよぼう。もう一つのケースは、両財を生産する場合には、消費財部門が常により、資本集約的であるが、資本ストックk_0 の量が小さいときには消費財を０として、資本を最大限生産する場合である。これは、資本財生産への特化が起こる場合である。k_0 が小さいときに、資本財を、可能な最大限まで生産するということは、生産可能な領域の境界上で、生産が行われている。これをケース２として、**境界上で生産を行う場合**と呼ぼう。

このようなケースではカオスが生じる可能性があるカオスとは、解$\{\hat{k}_t\}$が次のような性質を持つ状況である。いま$I=[0,1]$として、

（12） $h^m(k)=k,\quad h^n(k)\neq k,\qquad for\qquad n=1,\cdots,m-1$

をみたす点$k\in I$を周期mの解とよぶ。すると

(i) $h:I\to I$が連続関数

(ii) Iの部分集合Cが存在I, Cは周期解と含まず連続の濃度を持ち、次の性質をみたす。

A: 任意の異なる$p,q\in C$に対して

$$\lim_{n\to\infty} snp\ |h^n(p)-h^n(q)|>0$$

$$\lim_{n\to\infty} inf\ |h^n(p)-h^n(q)|=0$$

B: 任意の点$p\in C$と任意の周期解$q\in I$に対して

$$\lim_{n\to\infty} sup\ |h^n(p)-h^n(q)|>0$$

(iii) 任意の自然数の$m\geq 1$に対して周期mの解が存在する。

部分集合Cが存在するためには、リーとヨークは、ある点$x\in I$ に対して

（13） $h^3(x)\leq x<h(x)<h^2(x)$

がみたされることが十分条件となることを証明した。（13）の$h^3(x)\leq x$が等号でみたされるなら、xは周期３の解である。これを、これまでの図に即していえば、

図4(i)の k_0 が周期3の解となる。また図4(ii)では k_0 が（13）の条件をすべて狭義の不等号でみたしている。

前節で紹介した最適モデルにおいて、このようなカオスが生じることはケース1についてデネカーとペリカン（1986）、ボールドリンとモントルッキョ（1986）、ケース2については西村と矢野（1991）によって証明されている。

また、以上のモデルは、すべて、貿易を無視した閉鎖経済モデルである。貿易を考慮すると、国際間の景気循環が連動性を持つ可能性が生ずる。そのような問題の分析は、最近になって、西村・矢野（1990 a,b）によって行われている。

参考文献

J. Benhabib and R. H. Day, Rational Choice and Erratic Behabiour, *Review of Economic Studies,* 459-472, (1981)

J. Benhabib and R. H. Day, A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlaping Generations Model, *Journal of Economics of Dynamical Control* 4, 37-55, (1982)

J. Benhabib and K. Nishimura, The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth, *Journal of Economic Theory* 21, 421-444, (1979)

J. Benhabib and K. Nishimura, "Competitive Equilibrium Cycles, *Journal of Economic Theory* 35, 284-306 , (1985)

M. Boldrin and L. Montrucchio, On the Indeterminancy of Capital Accululation Paths, *Journal Economic Theory* 40, 26-39, (1986)

D. Cass, Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Econonomic Studies* 32, 233-240, (1965)

R. H. Day, Irregular Gorwth Cycles, *American Economic Review* 72, 406-414 (1982)

D. Dechert and K. Nishimura, A Complete Characterization of Optimal Growth Paths in Aggregate Model with a Non-concave Production Function, *Journal of Economic Theory* 31, 332-354 (1983)

R. Deneckere and S. Pelikan , Competitive Chaos, *Journal of Economic Theory* 40, 13-25, (1986)

J. M. Grandmont, On Endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica* 53, 995-1045 (1985)

T. C. Koopmans, On the concept of Optimal Economic Growth, in *The Economietric apporach to Development Planning* , Pontificiae Academiae Scientiarvm Scriptvm

Varia, North-Holland, Amsterdam (1965)

T. Y. Li and J. A. Yorke, Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly* 82, 985-992 (1975)

K.Nishimura and M. Yano, Interlinkage in the Endogenous Real Business cycles of International Economies, Forthcoming in *Economic Thoery* , *Discussion Paper,* Kyoto University (1990a)

K.Nishimura and M. Yano, Endogenous real Business Cycles and International Specialization, *Discussion Paper,* Kyoto University (1990b)

K.Nishimura and M. Yano, Non-Linear Dynamics and Chaos in Optimal Growth, *Discussion Paper,* Kyoto University (1991)

K.Nishimura and M.Ohyama, Dynamics of External Debt and Trade, *Discussion Paper* , Kyoto University (1991)