数理解析研究所講究録
第 789 巻 1992 年 164-178

ペッティス集合について

静岡大学　理　松田　稔（Minoru　Matsuda）

§1．序．この報告は主に，ペッティス集合に関する従来までの諸結果と，最近[3]，[4]で得られた結果の紹介を目的として構成されたもので，その主題は，バナッハ空間論に源をもつものである。Xを実バナッハ空間，その共役をX^*とし，B_XはXの閉単位球を表すことにする。(Ω, Σ, μ)は完備確率測度空間，$([0,1], \Lambda, \lambda)$は$[0,1]$上のルベーグ測度空間とし，以後$[0,1]$上には，$\Lambda$と$\lambda$が備わっているとする。各$(\Omega, \Sigma, \mu)$に対して，$f: \Omega \to X$ (resp. X^*) が弱 (resp. 弱*) 可測であるとは，$(x^*, f(\omega))$ (resp. $(x, f(\omega))$) が各$x \in X$ (resp. $x^* \in X^*$) についてμに関し可測であることをいい，弱可測関数$f: \Omega \to X$がペッティス可積分であるとは，$(x^*, f(\omega)) \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ (各$x^* \in X^*$) で，各$E \in \Sigma$について$x_E \in X$が存在して$(x^*, x_E) = \int_E (x^*, f(\omega))\, d\mu(\omega)$，$\forall x^* \in X^*$，がみたされる時をいう。もし，$f: \Omega \to X^*$が有界値域をもつ弱*可測関数であるならば，$T_f(x) = x \circ f$ $(x \in X)$ により，$T_f: X \to L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ の有界線形写像が得られる。この共役作

用素を，$T_f^*(:L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)\to X^*)$ と表す。T_f の作用素ノルム $=\sup\{\int_\Omega |x\circ f|\,d\mu : x\in B_X\}=\|f\|_P$ と表し，f の Pettis norm という。さて，$\{J_{n,i}\}$ $(n\geqq 0,\ 0\leqq i\leqq 2^n-1)$ を $J_{n,i}=[i/2^n,(i+1)/2^n)$ $(n\geqq 1,\ 0\leqq i\leqq 2^n-2)$，$J_{n,2^n-1}=[(2^n-1)/2^n,1]$ $(n\geqq 0)$ で定義される $[0,1]$ の区間列とし，Λ_n $(n\geqq 1)$ は，$\pi_n=\{J_{n-1,i} : 0\leqq i\leqq 2^{n-1}-1\}$ で生成される σ-algebra とする時，$f:[0,1]\to X^*$ が有界値域をもつ弱*可測関数であるならば，$f_n(s)=\sum_{A\in\pi_n}(T_f^*(\chi_A)/\lambda(A))\chi_A(s)$ で定義される $f_n:[0,1]\to X^*$ について，$(f_n,\Lambda_n)_{n\geqq 1}$ はマーチンゲールとなり，以後これを，f に対応するマーチンゲールと呼ぶ。又，X の点列 $\{x_n\}_{n\geqq 1}$ が tree であるとは $x_n=(x_{2n}+x_{2n+1})/2$ $(n\geqq 1)$ がみたされることをいい，正数 δ に対して，tree $\{x_n\}_{n\geqq 1}$ が δ-Rademacher tree とは，$\left\|\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}(-1)^n x_n\right\|\left(=\left\|\sum_{i=0}^{2^m-1}(-1)^i x_{2^m+i}\right\|\right)\geqq 2^m\cdot\delta$ $(\forall m\geqq 0)$ がみたされることをいう。

Rosenthal [10] が l_1 を含むバナッハ空間 X（即ち B_X が l_1-basis に同値な点列 $\{x_n\}_{n\geqq 1}$ を含む）の特徴付けを与えて以来，X^* のラドン－ニコディム性の研究にも触発され，それと並行した型での Musial [5] により定義された弱ラドン－ニコディム性の研究，あるいは，それを一般化，局所化した弱ラドン－ニコディム集合（WRN set）の研究がなされ，一連の結果が得られている。

<u>定義</u>．X の部分集合 C が WRN set であるとは，各 (Ω,Σ,μ)

と各$\alpha: \Sigma \to X$ s.t. $\alpha(E) \in \mu(E) \cdot C$, $^\forall E \in \Sigma$ について、ペッティス可積分関数$f: \Omega \to C$が存在して、$^\forall E \in \Sigma$に対して

$$(x^*, \alpha(E)) = \int_E (x^*, f(\omega)) d\mu(\omega) \quad ({}^\forall x^* \in X^*)$$

がみたされる時をいう。特にB_Xが WRN set である時、Xは弱ラドン－ニコディム性を持つという。

<u>定義</u>. B_Xが$D(\subset X^*)$に関して weakly precompact であるとは、$^\forall \{x_n\}_{n \geq 1} \subset B_X$に対して適当に部分列$\{x_{n(k)}\}_{k \geq 1}$をとれば、$^\forall x^* \in D$について、$\lim_{k \to \infty} (x^*, x_{n(k)})$が存在することをいう。

<u>定義</u>. K: compact Hausdorff space, $f: K \to R$について、fが Baire-1-function であるとは、$^\forall F$: compact $\subset K$に対して、fのFへの制限$f|_F$が連続点をもつことをいう。fが universally measurable であるとは、$^\forall \mu$: Radon probability measure on Kについて、fがμに関して可測であることをいう。

以上の概念を用いて、$C = K$: 弱*コンパクト凸集合の時の WRN set に関する従来の諸結果([9], [6], [11], [8], [12], [1], [2] を参照)を概括したのが、次である。なお、以後、弱*コンパクト集合上には、弱*位相が備わっていると考える。

<u>定理A</u>. X^*の弱*コンパクト凸集合Kに関する次の各陳述は、同値である。

(1) $B_X \subset C(K)$とみた時、B_Xはl_1-basis に同値な点列を含まない。

(2) B_X は K に関して weakly precompact.

(3) $^\forall x^{**} \in X^{**}$ は K 上で universally measurable.

(4) $^\forall x^{**} \in X^{**}$ は K 上で Baire-1-function.

(5) $^\forall$有界線形写像 $T : L_1([0,1]) \to X^*$ s.t. $T(\chi_A) \in \lambda(A) \cdot K$, $^\forall A \in \Lambda$ について、$\{T(\chi_A) : A \in \Lambda\}$ は相対ノルムーコンパクト。

(6) K は WRN set.

(7) $^\forall f : [0,1] \to K$, 弱*可測について、f に対応するマーチンゲールは Cauchy in the Pettis norm.

(8) K が δ-Rademacher tree を含まない。

その後、Talagrand [13] の研究に示唆されて、凸性のない弱*コンパクト集合について、定理Aの一般化といえるものが研究された。

定義. X^* の弱*コンパクト集合Kが、ペッティス集合(Pettis set)であるとは、$^\forall x^{**} \in X^{**}$ が K 上で universally measurable である時をいう。

その時、この集合に関する特徴付けが、Talagrand [13], Riddle and Saab [7] 等で得られている。

定理B. X^* の弱*コンパクト集合Kに関する次の各陳述は、同値である。

(1) 定理A (1)に同じ。

(2) 〃 (2) 〃 。

(3) 定理A(3)に同じ。即ちKはPettis set.

(4) 〃 (4) 〃 。

(5) $^\forall f:[0,1]\to K$, 弱*可測について $\{T_f^*(\chi_A): A\in\Lambda\}$ は相対ノルム－コンパクト。

(6) $\overline{co}^{w^*}(K)$(Kの弱*閉凸包)はWRN set.

(7) 定理A(7)に同じ。

以上の経過から判断すれば、定理Aの(8)に対応する定理Bの場合の特徴付け、即ち、Pettis setの δ-Rademacher treeによる特徴付けが、どんな形で可能であるかを考察することは、自然の問題であろう。この事柄に関して我々は、性質(5)に示唆され、次の形で特徴付けられることを立証した([3])。

定理1. X^*の弱*コンパクト集合Kについて、KがPettis setであるための必要十分条件は、$^\forall f:[0,1]\to K$, 弱*可測について $\{T_f^*(\chi_A)/\lambda(A): \lambda(A)>0, A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher treeを含まないことである。

更に、この結果に示唆され、定理Bの(7)によるPettis setの特徴付けの精密化として、次が得られることを注意する([4])。

定理2. X^*の弱*コンパクト集合Kについて、KがPettis setであるための必要十分条件は、$^\forall f:[0,1]\to K$, 弱*可測についてfに対応するマーチンゲール $(f_n,\Lambda_n)_{n\geq 1}$ が $\inf\{\|f_n-f_{n+1}\|_p: n\geqq 1\}=0$ をみたすことである。

これら二定理に関し、我々が強調すべき、重要で本質的な部分は、Kが non-Pettis set である時に、[0,1] で定義されたK-値弱可測関数 h で $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A)>0, A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher treeを含むもの、あるいは、h に対応するマーチンゲール $(h_n, \Lambda_n)_{n\geq 1}$ について $\inf\{\|h_n - h_{n+1}\|_p : n\geq 1\} > 0$ であるものを構成することであり、以下、その構成の概略を与える。

§2. 準備. ここでは、定理1、2の証明の過程で必要とされる概念や事実を準備しよう。

Kを compact Hausdorff space とする時、Kの互いに素な集合の対の列 $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ が independent であるとは、$\forall k\geq 1$ と $\forall\{\varepsilon_j\}_{1\leq j\leq k}$ ($\varepsilon_j = 1$ or -1, $1\leq j\leq k$) について $\bigcap_{j=1}^{k}\varepsilon_j A_j \neq \phi$ (但. $\varepsilon_j A_j = A_j$ if $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_j A_j = B_j$ if $\varepsilon_j = -1$) であることをいう。もし、Kの互いに素な閉集合の対の列で independent なもの $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ が存在すれば、$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ とおくことにより、我々はKの空でない compact subset Γ を得る。その時、$\phi : \Gamma \to \Delta\ (=\{0,1\}^N$, Cantor space) を $\phi(z) = \{t_n\}_{n\geq 1}$ (但. $t_n = 1$ if $z\in A_n$, $t_n = 0$ if $z \in B_n$) で定義すれば、ϕ は連続全射であり、$\Gamma\cap A_m = \phi^{-1}(U_m)$ かつ $\Gamma \cap B_m = \phi^{-1}(U_m^c)$ (但. $U_m = \{t = \{t_n\}_{n\geq 1} \in \Delta ; t_m = 1\}$) をみたす。$\phi$ が連続全射であることから、Talagrand の結果 (1-2-5 in [13]) を用いれば、Γ 上の Radon probability measure γ

で $\phi(\gamma)$（γ の ϕ による像測度）$=\nu$（Δ 上の正規化されたハール測度）で $\{f\circ\phi : f\in L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)\} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$（但．$\Sigma_\nu$，$\Sigma_\gamma$ は各々 ν，γ に関して可測な集合全体を表す）をみたすものが存在する。

更に，$\rho : \Delta \to [0, 1]$ を $\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n/2^n$（但．$t = \{t_n\}_{n\geq 1} \in \Delta$）で定義すれば，$\rho$ は $\rho(\nu) = \lambda$ かつ $\{u\circ\rho : u\in L_1([0, 1])\} = L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)$ をみたす連続全射である。

この時，次の補題を得るのは容易で（[3] を参照），本質的には，Talagrand [(3] の Theorem (7-3-7) の証中でも示唆されている。

<u>補題</u>．S を $S(u) = u\circ\rho\circ\phi$（$u\in L_1([0, 1])$）で定義される線形写像とすれば，次の事柄が成り立つ。

(a) S は $L_1([0, 1])$ から $L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ への全射距離同型写像である。

(b) 任意の $g\in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ について，$S^*(g)(\rho(\phi(z))) = g(z)$，$\gamma$-a.e.（但．$S^*$ は S の共役）。

(c) 任意の g_1，$g_2\in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$ について，$S^*(g_1\cdot g_2) = S^*(g_1)\cdot S^*(g_2)$ in $L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$．

§3．定理1，2の証明の概略．§1で注意したように，次の2つの事柄 (A)，(B) が，定理1，2における証明の中核をなすので，これらの証明の概略を与えることにしよう。

(A) Kが non-Pettis setの時、弱*可測関数$h:[0,1]\to K$で、$\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A):\lambda(A)>0, A\in\Lambda\}$が$\delta$-Rademacher treeを含むものを構成すること。

(B) Kが non-Pettis setの時、弱*可測関数$h:[0,1]\to K$で、hに対応するマーチンゲール$(h_n, \Lambda_n)_{n\geq 1}$について$\inf\{\|h_n-h_{n+1}\|_P : n\geqq 1\}>0$であるものを構成すること。

結論からいえば、(A)で得られた関数hが、実は(B)もみたす訳であるが、以下、関数hの構成と、それが(A), (B)で述べられた性質を有することを注意しよう。

(α) 関数hの構成について。Kを non-Pettis setとすれば、§1で述べた定理Bの同値関係を利用することにより、B_XはKに関して weakly precompact でないから、$\exists\{x_n\}_{n\geq 1}\subset B_X$ s.t. $\{x_n\}_{n\geq 1}$のどんな部分列も、K上で各点収束列ではないことを得る。このことにRosenthalの議論を利用すれば、$\exists\{x_{n(k)}\}_{k\geq 1}\subset\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\exists r\in R$, $\exists\eta>0$ s.t. $A_k=\{x^*\in K:(x^*, x_{n(k)})\leqq r\}$, $B_k=\{x^*\in K:(x^*, x_{n(k)})\geqq r+2\eta\}$について、$(A_k, B_k)_{k\geq 1}$はKの閉集合からなる independent sequence。従って§2で注意したように、$\Gamma=\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k\cup B_k)$とおけば、$\Gamma$はKに含まれるコンパクトであり、補題から、完備確率測度空間$(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$と全射距離同型線形写像$S:L_1([0,1])\to L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$が存在し、$S^*(g)(\rho(\phi(x^*)))=g(x^*)$, γ-a.e. ($\forall g\in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$)が成り立つことがわか

る。

さて、各 $x\in B_X$ について $f_x(x^*)=(x^*,x)$ $(x^*\in\Gamma)$ で定義される Γ 上の連続関数を考える。又、ℓ を $L_\infty([0,1])$ の lifting とする。そして、各 $s\in[0,1]$ について $C(\Gamma)$（: Γ 上で定義された実数値連続関数の作る Banach space）上で定義される有界線形汎関数 $L_s(f)=\ell(S^*(f))(s)$ を考えよ。その時、補題から L_s は multiplicative であるから $L_s(f)=f(x^*)$, $\forall f\in C(\Gamma)$, をみたす Γ の点 x^* が唯一つ存在する。従って $h:[0,1]\to\Gamma$ を $h(s)=x^*$ $(s\in[0,1])$ で定義すれば、h は K-値であり、$f(h(s))=\ell(S^*(f))(s)$, $\forall f\in C(\Gamma)$, が成り立つ。よって、特に、$f_x(h(s))=\ell(S^*(f_x))(s)$, $\forall x\in B_X$, であるから、$(x,h(s))=\ell(S^*(f_x))(s)$, $\forall s\in[0,1]$, が成り立ち、h は弱*可測である。このようにして K-値弱*可測関数 h が構成された。

(B) $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A):\lambda(A)>0,\ A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher tree を含むこと。そのために、まず各 $A\in\Lambda$ について

$$\int_A (x,h(s))\,d\lambda(s)=\int_A \ell(S^*(f_x))(s)\,d\lambda(s)=\int_A S^*(f_x)(s)\,d\lambda(s)$$

$$=\int_A S^*(f_x)(s)\,d(\rho(\phi(\gamma)))(s)=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))} S^*(f_x)(\rho(\phi(x^*)))\,d\gamma(x^*)$$

$$=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))} f_x(x^*)\,d\gamma(x^*)\ \text{（補題の (b) を用いた）}=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))}(x^*,x)\,d\gamma(x^*)$$

であることを注意する。

次に、$\alpha(A)=T_h^*(\chi_A)$ $(A\in\Lambda)$ とすれば、$\alpha:\Lambda\to X^*$ はベクトル値測度である。よって、$I_{m,i}=[i/2^m,(i+1)/2^m]$ $(m\geqq 0,\ 0\leqq i\leqq 2^m-1)$ について、$x^*_{2^m+i}=2^m\alpha(I_{m,i})$ $(m\geqq 0,\ 0\leqq i\leqq 2^m-1)$ とおけば、α の測度性より、$\{x_n^*\}_{n\geq 1}$ が tree であること、しかも $\{x_n^*\}_{n\geqq 1}\subset\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A):\lambda(A)>0,\ A\in\Lambda\}$ であることは明らかであるから、$\{x_n^*\}_{n\geq 1}$ が適当な正数 δ に対して、δ-Rademacher tree を含むことを示せばよい。

そのために、$\{I_{m,i}\}$ $(m\geqq 0,\ 0\leqq i\leqq 2^m-1)$ の番号付けを次のように改めることにする。$I_{0,0}=I\ (=[0,1])$, $I_{1,0}=I(0)$, $I_{1,1}=I(1)$, $I_{2,0}=I(0,0)$, $I_{2,1}=I(0,1)$, $I_{2,2}=I(1,0)$, $I_{2,3}=I(1,1)$ 等々。即ち、$I_{0,0}=I$ であり、もし $I_{m,i}=I(a_1^{(i)},\cdots,a_m^{(i)})$ $(m\geqq 1,\ 0\leqq i\leqq 2^m-1)$ ならば $I_{m+1,2i}=I(a_1^{(i)},\cdots,a_m^{(i)},0)$ かつ $I_{m+1,2i+1}=I(a_1^{(i)},\cdots,a_m^{(i)},1)$。但し $\{a_j^{(i)}\}_{1\leqq j\leqq m}$ は 0 と 1 からなる数列で $\{(a_1^{(i)},\cdots,a_m^{(i)}):0\leqq i\leqq 2^m-1\}=\{(a_1,\cdots,a_m):a_j=0 \text{ or } 1\}$ をみたす。その時、0 と 1 の数列 $\{a_j\}_{1\leqq j\leqq m}$ について、$U_1^{\varepsilon_1}\cap\cdots\cap U_m^{\varepsilon_m}=\rho^{-1}(I(a_1,\cdots,a_m))$（但 $a_j=1$ の時 $\varepsilon_j=1$ かつ $a_j=0$ の時 $\varepsilon_j=c$（補集合）とする）が成り立つ。従って、α の定義と、最初に示した等式から、0 と 1 からなる数列 $\{a_j\}_{1\leqq j\leqq m}$ と $x\in X$ について、

$$(\alpha(I(a_1,\cdots,a_m)),x)=\int_{I(a_1,\cdots,a_m)}(x,h(s))\,d\lambda(s)=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(I(a_1,\cdots,a_m)))}(x^*,x)\,d\gamma(x^*)$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_1^{\varepsilon_1}\cap\cdots\cap U_m^{\varepsilon_m})} (x^*, x)\, d\gamma(x^*)$$

が成り立つ。このことから、

$$\sum_{i=0}^{2^m-1} (\alpha(I(a_1^{(i)}, \cdots, a_m^{(i)}, 0)), x_{n(m+1)})$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_{m+1}^c)} (x^*, x_{n(m+1)})\, d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma\cap B_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)})\, d\gamma(x^*)$$

及び、

$$\sum_{i=0}^{2^m-1} (\alpha(I(a_1^{(i)}, \cdots, a_m^{(i)}, 1)), x_{n(m+1)})$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_{m+1})} (x^*, x_{n(m+1)})\, d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma\cap A_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)})\, d\gamma(x^*)$$

が得られる。従って、各 $m \geqq 0$ について

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i x^*_{2^{m+1}+i} \right\|$$

$$\geqq \left(\sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i x^*_{2^{m+1}+i},\ x_{n(m+1)} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^m-1} (x^*_{2^{m+1}+2i}, x_{n(m+1)}) - \sum_{i=0}^{2^m-1} (x^*_{2^{m+1}+2i+1}, x_{n(m+1)})$$

$$= 2^{m+1}\left(\int_{\Gamma\cap B_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)})\, d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)})\, d\gamma(x^*) \right)$$

$$\geqq 2^{m+1}\{(r+2\eta)/2 - r/2\} = 2^{m+1}\cdot\eta$$

が成り立つ。よって $x_1^* \neq 0$ ならば，$\delta = \min\{\|x_1^*\|, \eta\}$ とおけば，$\{x_n^*\}_{n\geq 1}$ 自身が δ-Rademacher tree である。次に $x_1^* = 0$ ならば，今示した不等式の $m=0$ の場合から $\|x_2^* - x_3^*\| \geqq 2\eta$ であるから，一般性を失うことなく，$x_2^* (= \alpha([0, 1/2]) \neq 0$ としてよい。そして $\{L_{m,i}\}$ $(m \geqq 0,\ 0 \leqq i \leqq 2^m - 1)$ を $L_{m,i} = [i/2^{m+1}, (i+1)/2^{m+1}]$ で与えられる $[0, 1/2]$ の閉区間の列としよう。その時，$y^*_{2^m+i} = 2^{m+1}\cdot\alpha(L_{m,i})$ $(m \geqq 0,\ 0 \leqq i \leqq 2^m - 1)$ とおけば，$\{y_n^*\}_{n\geq 1}$ は $\{x_n^*\}_{n\geq 1}$ の部分列の作る tree であり，しかも $\delta = \min\{\|x_2^*\|, \eta\}$ とおけば，先と同様の議論により，$m \geqq 0$ について

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i y^*_{2^{m+1}+i} \right\| \geqq 2^{m+1}\eta \geqq 2^{m+1}\cdot\delta$$

かつ，$\|y_1^*\| \geqq \delta$ が示されるから，$\{y_n^*\}_{n\geq 1}$ は δ-Rademacher tree である。

以上から，$\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A) > 0,\ A \in \Lambda\}$ は適当な正数 δ に対して，δ-Rademacher tree を含むことが立証された。最後に，この h に対応するマーチンゲール $(h_m, \Lambda_m)_{m\geq 1}$ について

(γ) $\inf\{\|h_m - h_{m+1}\|_p : m \geqq 1\} > 0$ であること。そのために各 $m\ (\geqq 1)$ について，

$$a_{m,i} = \int_{J_{m,2i}} |\langle x_{n(m)}, h_m(t)\rangle - \langle x_{n(m)}, h_{m+1}(t)\rangle|\, d\lambda(t)$$

かつ

$$b_{m,i}=\int_{J_{m,2i+1}}|(x_{n(m)},h_m(t))-(x_{n(m)},h_{m+1}(t))|\,d\lambda(t)$$

（但．$0\leqq i\leqq 2^{m-1}-1$）とおこう。そして $s\in J_{m,2i}$ $(0\leqq i\leqq 2^{m-1}-1)$ をとれ。その時．

$$(x_{n(m)},h_m(s))-(x_{n(m)},h_{m+1}(s))$$

$$=2^{m-1}\int_{J_{m-1,i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)-2^m\int_{J_{m,2i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)$$

$$=2^{m-1}\left\{\int_{J_{m-1,i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)-2\int_{J_{m,2i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)\right\}$$

$$=2^{m-1}\left\{\int_{J_{m,2i+1}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)-\int_{J_{m,2i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)\right\}$$

が成り立つから，各 i（但．$0\leqq i\leqq 2^{m-1}-1$）について

$$a_{m,i}\geqq(1/2)\left\{\int_{J_{m,2i+1}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)-\int_{J_{m,2i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)\right\}$$

である。従って(β)と同様の議論から．

$$\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}a_{m,i}$$

$$\geqq(1/2)\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}\left\{\int_{J_{m,2i+1}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)-\int_{J_{m,2i}}(x_{n(m)},h_m(t))\,d\lambda(t)\right\}$$

$$= (1/2)\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}\left\{\int_{I_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t))\,d\lambda(t) - \int_{I_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t))\,d\lambda(t)\right\}$$

$$= (1/2)\left\{\int_{\Gamma\cap B_m} (x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_m} (x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*)\right\}$$

が成り立つ。又，$b_{m,i}$ に関しても同様の議論から，

$$\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} b_{m,i} \geqq (1/2)\left\{\int_{\Gamma\cap B_m} (x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_m} (x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*)\right\}$$

が成り立つから，これらを用いて，

$$\|h_m - h_{m+1}\|_p$$

$$\geqq \int_{[0,1]} |(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))|\,d\lambda(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}\int_{J_{m-1,i}} |(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))|\,d\lambda(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} a_{m,i} + \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} b_{m,i}$$

$$\geqq \int_{\Gamma\cap B_m} (x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_m} (x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*)$$

$$\geqq (r + 2\eta)/2 - r/2 = \eta$$

が得られる。即ち，$\inf\{\|h_m - h_{m+1}\|_p : m \geqq 1\} \geqq \eta > 0$ であり，要求された結果である。

References

[1] M. Matsuda, On Saab's characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21(1985), 921-941.

[2] M. Matsuda, A characterization of weak Radon-Nikodym sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 22(1986), 551-559.

[3] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 26(1991), 827-836.

[4] M. Matsuda, A characterization of non-Pettis sets in terms of martingales, Preprint.

[5] K. Musial, The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces, Studia Math., 64(1978), 151-174.

[6] L. H. Riddle, The geometry of weak Radon-Nikodym sets in dual Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 86(1982), 433-438.

[7] L. H. Riddle and E. Saab, On functions that are universally Pettis integrable, Illinois J. Math., 29(1985), 509-531.

[8] L. H. Riddle, E. Saab and J. J. Uhl, Jr, Sets with the weak Radon-Nikodym property in dual Banach spaces, Indiana Univ. Math. J., 32(1983), 527-541.

[9] L. H. Riddle and J. J. Uhl, Jr, Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of l_1, Lecture Notes in Math., Springer, 939(1981), 145-156.

[10] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l_1, Proc. Nat. Acad. Sci., 71(1974), 2411-2413.

[11] E. Saab, Some characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Proc. Amer. Math. Soc., 86(1982), 307-311.

[12] E. Saab and P. Saab, A dual geometric characterization of Banach spaces not containing l_1, Pacif. J. Math., 105(1983), 415-425.

[13] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Memoirs of the A.M.S., 307(1984).