数理解析研究所講究録
第 791 巻 1992 年 150-157

代数方程式に対する Newton-Raphson 系解法の反復回数と収束次数の関係

日本大学農獣医学部　五十嵐正夫 (IGARASHI MASAO)

§1. はじめに

n 次代数方程式 $f(z)=0$ の数値解を求めるために，Newton-Raphson 法を原点とするような反復解法系をここでは Newton-Raphson 系解法と呼ことにする。その解法を便宜的に次の [A] 解法系と [B] 解法系に分ける事にする。

[A] $f(z)=0$ に Newton-Raphson 法を適用した解法系:

Halley 法, Euler 法, Kiss 法,...

[B] $f(z)/f'(z)=0$ に Newton-Raphson 法を適用した解法系:

Schöder 法, Pomentale 法, Traub 法,...

ところで n 次代数方程式に対して k次収束するプログラムを両解法系に対して実際に作り，Aberth[1] の初期値を与え数値実験をしてみると両解法系における数値解の厳密解に接近するまでの振る舞いには大きな差異があることが分かる。一言で言えば [A] 解法系の数値解の振る舞いは地味であり，[B] 解法系のその振る舞いは活発である。ここでは従来ほとんど注目される事のなかった反復解法の大域的性質に注目してその差異の原因を考察し併せて解法の効率に対して新しい知見をあたえる。

§2. 収束次数と反復回数

与えられた代数方程式を次のようにおく。

$$f(z)=c_1z^n+c_2z^{n-1}+\cdots\cdots+c_nz+c_{n+1}=0 \tag{2.1}$$

十分大きな初期値，例えば Aberth の初期値，を選ぶと上の代数法方程式は $f(z)=z^n$ と近似できる。すると，[A] と [B] の解法系の数値解の減少率は，[A] 解法系 k次収束公式に対しては $1-\dfrac{k-1}{n+k-1}$，[B] 解法系に対しては収束の次数によらずゼロとなる。

実際図 1 のプログラム A によって [A] 解法系に対して数値実験を行ってみると，数値解は厳密解に十分接近するまでは減少率 $1-\dfrac{k-1}{n+k-1}$ に従って非常に緩慢に減少しながら厳密解に接近する事が確かめられる。また数値解が孤立厳密解に十分接近した後は良く知られているように k次収束の解法に対しては一回の反復ごとに数値解の精

度桁数はほぼk倍となる事も確かめられる。$f(z)=z^n$と近似する事は大域的にはn重解の振る舞いを見る事と同じであるから，数値解が厳密解に十分接近するまでの振る舞いは厳密解の状態，例えば重解とか近接解を持つとか，によらず，単に方程式の次数のみに依存すると言える。図2に3つの方程式に対する収束の次数と収束に至るまでの反復回数の関係を示す。始めのうちは収束次数の増加と共に反復回数は激減するが方程式の次数と収束の次数が近くなると反復回数に差異がみられなくなる。その間の詳しい説明については文献 [7] に述べてある。

次に [B] 解法系において数値解の減少率がゼロと言う事は，次の数値解は反復式で桁落ちが起きて得られた数値解であると解釈できる。即ち [B] 系解法の反復式においてz_0を用いてz_1を導出する際，$z_1 \approx (1-1)z_0$の計算において桁落ちが起きるためz_1の実部や虚部の符号はz_0とは逆になったりしながら絶対値としては減少する事になる。実際図3のプログラムBによって [B] 解法系に対して数値実験を行うと，初めのうちは数値解は非常に活発な振る舞いをする。そして収束に至るまでの反復回数は大まかに言うと [A] 解法系の 1/5 とか 1/10 となる。収束次数を同じに取った場合 [B] 解法系は [A] 解法系よりも1次高い導関数を必要とするが，その計算量を考慮しても収束する場合は圧倒的に [B] 解法系の方が効率的である。

§3. パラメータを含む反復式

[A] と [B] の解法系の数値解の振る舞いの相違をもう少し詳しく調べるために，2次または3次収束するパラメータを含む反復解法系，

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k) - \alpha \dfrac{f''(z_k)f(z_k)}{f'(z_k)}} \quad \text{ただし} \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{3.1}$$

を考える。この解法系は

$$f(z)/[f'(z)]^{\alpha} = 0 \quad \text{ただし} \quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{3.2}$$

に対して Newton-Raphson 法を適用する事により得られる。$\alpha = 0.5$ の時は3次収束，それ以外は2次収束する解法系である。

この解法系に対してαを0から1まで少しずつ増加させるとそれに連れて収束に至るまでの反復回数がなだらかに減少する傾向が見られる。従来，解法の効率は1反復

あたりの演算回数と収束するまでの総反復回数によって論ぜられ，3 次収束の Halley 法が効率的とか 4 次収束の Kiss 法が効率的とか言われてきた。しかしαを 0 から 1 まで少しずつ増加させるに従い収束するまでの反復回数が減少すると言う事は，解法の効率は解法の局所的な性質だけでは論ぜられない事を示している。なおこれに関しての詳しい数値結果は文献 [8] に掲載されている。

ところでパラメータを含む反復公式にはほかに次のような解法がある。

E.Schröder の解法 [12] :

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k f(z_k) f'(z_k)}{z_k\left(f'(z_k)^2 - f(z_k)f''(z_k)\right) - \lambda f(z_k) f'(z_k)}. \tag{3.3}$$

E.Hansen と M.Patrik の解法 [6]:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{(\alpha+1) f(z_k)}{\alpha f'(z_k) \pm \sqrt{f'(z_k)^2 - (\alpha+1) f(z_k) f''(z_k)}}. \tag{3.4}$$

この反復解法系は$\alpha = 0$ のとき Ostrowski 法，$\alpha = 1/(n-1)$ のとき Laguerre 法，$\alpha = 1$ のとき Euler 法，$\alpha = -1$ のとき Halley 法，$\alpha = \infty$ のとき Newton-Raphson 法となる。

これら 2 つのパラメータを含む反復解法系に対しても解法の大域的な性質，即ち初期値の減少率がその効率に深く関わる事が (3.1) と同様にして確かめられる。特に (3.4) に関して E.Hansen と M.Patrik は Laguerre 法の効率の良さを文献 [6] で証明しようと試みている。しかしながら Laguerre 法の効率の良さは単に初期値が極端に減少することにすぎない。

§4. 解法の頑健さ

[A] と [B] の解法系の収束するまでの反復回数を調べてみると圧倒的に [B] 解法系の方が少ない。しかしながらこれをもって [B] 解法系の方が優れていると見るのは早計である。と言うのは [B] 解法系ではしばしば数値解が振動する現象が見られるからである。(3.1) の解法系においてもαを 1 に近づけると同様な現象が見られる事を考慮すると，その原因は初期値の減少率に有ると見る事が出来る。[B] 解法系では一回の反復で数値解の絶対値が極端に小さくなる事があり，そのため次の数値解は与えられた方程式の低次係数の影響を強く受け，その低次項によっては次の数値解は逆に大きくな

る事があり，その繰り返しによる振動が見られるためである。多くの解法がそうであるように，感度が上がると頑健さが失われると言う傾向がここでも見られる。

§5. おわりに

今までこの種の反復解法の効率を考察するのに，初期値の大きさが問題とされた事はなかったようである。しかしながら [A] 解法系において計算効率にもっとも大きな影響を与えるのは実は初期値である。4 倍精度計算程度の計算桁数では収束が始まった以降の，即ち厳密解に十分近い初期値を取った場合の計算効率を考察しても意味がないのではないかと言うのが実感である。一般的な初期値を取った場合，経験的には n 次代数方程式に対しては $n/2$ 次程度の解法がもっとも効率的であった。

[B] 解法系であるが，収束する場合にはきわめて効率がよい。しかし数値解の振動には十分気をつける必要がある。それを防ぐために次のようなアルゴリズムを我々は実験したが好結果をえた。

” z_0を Aberth の初期値とする。数値解 $z_1, z_2, ..., z_t$に対して $|f(z_t)|$ が単調に減少している間は [B] 解法系を用い，それが z_{t+1}でくずれたら z_tから [A] 解法系に切り替える。”

本小論では高次解法とその計算効率について，数値実験をまじえて考察した。最後に収束次数と高次解法の歴史的背景について述べておく。

Newton-Raphson 法の収束次数が 2 次であると最初に述べたのは著者の知る限りにおいては Fourier[4](1818) である。彼は Newton-Raphson 法の数値解の誤差が 2 乗巾で減少する事を示し，有名な代数方程式 $x^3 - 2x - 5 = 0$ でその事を実際に確認している。以後収束の次数について触れた研究者はたくさんいると思われるが，その事を最初に厳密に論じたのは E.Bodewig[2](1949) と思われる。特に彼はαについて制限無しの反復式 (3.1) を打ち切り誤差を評価する事により導き出している。しかしながらその解法系は大域的な性質を考慮していないため，αに対してここで与えたような制限をつけないと頑健な解法とはならない。そのことはまた，(3.2) からも知る事が出来る。

ところで収束の次数の定義が完全になされる前から高次収束する方法は色々と考案されていた。例えば 3 次収束する解法は Halley 法と呼ばれる事が多いが，この解法の源泉はフランス人の数学者 Thomas Fautet de Lagny(1692) にあるとされる。その

Halley 法も実に多くの研究者によって再発見されている。例えば次の研究者である。

L.Euler,1755 年:　E.Schröder,1869 年:　E. Kobald,1891:　A. Cauchy,1899:
H. Bateman,1938:　V. B. Bailey,1941:　J. S. Frame,1944:　H. W. Richmond,1944:
H. S. Wall,1948:　E. Bodewig,1949:　D. R. Hartree,1949:　H. J. Hamilton,1950:
J. F. Traub,1961:　S. Hitotumatu,1962:

Kiss[9] は 4 次収束の解法ばかりでなく 5 次収束する解法も同時に提案しているがその事はあまり知られていないようである。また Halley[5] も 5 次収束する解法を提案しているがそのことも案外知られていないようである。もっとも k次収束する解法を最初に与えたのは著者の知る限り Euler(1755) である。同様な解法系は Schröder(1869) によっても提案されている。また最近では k次収束する色々な解法系が Pomentale[11] や桜井・鳥居・杉浦 [10] によっても提案されている。

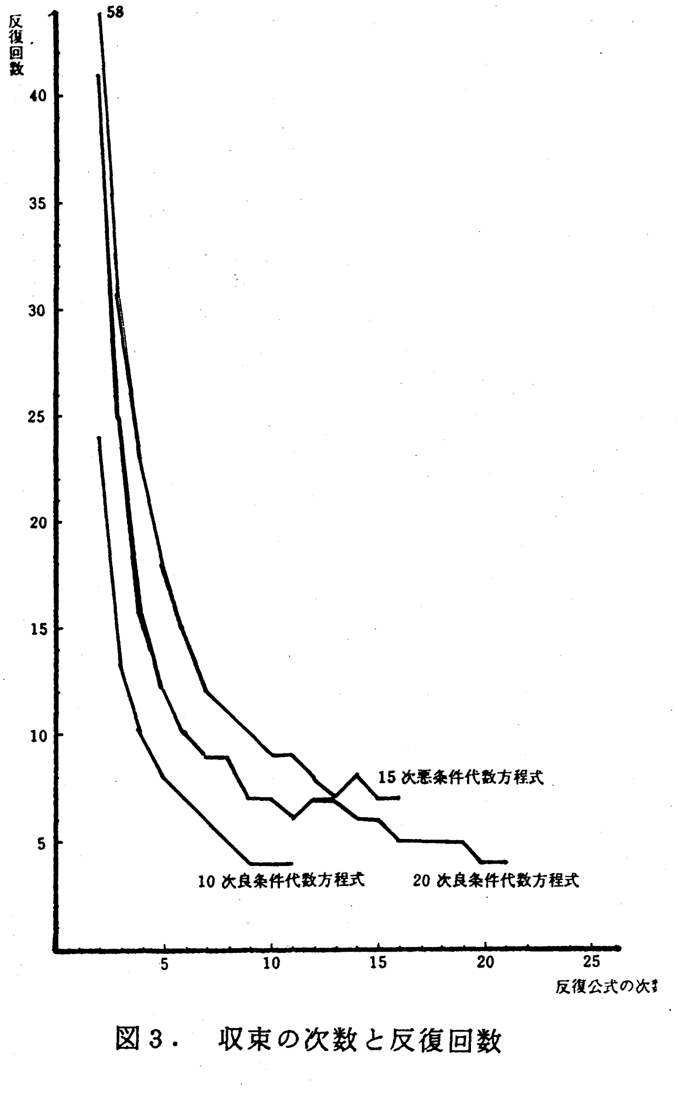

図 3．　収束の次数と反復回数

```
      SUBROUTINE LOCAL(C,N,K,Zold,Znew)
      COMPLEX・16 A(101),C(101),F(101),H(101),Zold,Znew,W
      DO 10 I=1,N+1
      F(I)=C(1)
10    CONTINUE
      DO 20 I=2,N
      F(1)=C(I)+F(1)・Zold
      DO 25 J=2,N+2-I
      IF(J.LE.K) F(J)=F(J-1)+F(J)・Zold
25    CONTINUE
20    CONTINUE
      F(1)=C(N+1)+F(1)・Zold
      A(1)=(1.0D00,0.0D00)
      DO 30 I=2,K-1
      A(I)=F(I+1)/F(2)
30    CONTINUE
      H(1)=-F(1)/F(2)
      DO 40 I=2,K-1
      W=A(I)
      DO 50 J=2,I
      W=W・H(J-1)+A(I-J+1)
50    CONTINUE
      H(I)=H(1)/W
40    CONTINUE
      Znew=Zold+H(K-1)
      RETURN
```

図1． プログラム A.　n 次代数方程式に対する k次公式

```
  SUBROUTINE LOCAL(C,N,K,Zold,Znew)
    COMPLEX・16 C(101),F(101),U(101),Zold,Znew
    DO 10 I=1,N+1
    F(I)=C(1)
10 CONTINUE
    DO 20 I=2,N
    F(1)=C(I)+F(1)・Zold
    DO 25 J=2,N+2-I
    IF(J.LE.K+1) F(J)=F(J-1)+F(J)・Zold
25 CONTINUE
20 CONTINUE
    F(1)=C(N+1)+F(1)・Zold
    U(1)= F(2)/F(1)
    DO 50 L=2,K
    U(L)=L・F(L+1)
    DO 40 J=1,L-1
    U(L)=U(L)-F(L+1-J)・U(J)
40 CONTINUE
    U(L)=U(L)/F(1)
50 CONTINUE
    Znew=Zold+U(K-1)/U(K)
    RETURN
    END
```

図2． プログラムB． n 次代数方程式に対する k次公式

参考文献

[1] O.Aberth, Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously", Math. Comp., Vol.27, No.122(1973), 339-344.

[2] E.Bodewig, On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation, Quart. Appl. Math., 7(1949), 325-333.

[3] L. Euler, (Gerhrad Kowalewski 編), LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA, INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS CUM EIUS VSU IN ANALYSI FINITORUM AC DOCTRINA SERIERUM, X(1755), 422-445.

[4] M. Fourier, Question D'analyse Algébrique, Bull. des Sciences par la Societe Philo.(1818), 61-67.

[5] E.Halley, Methodus Nova Accurata & facilis inveniendi Radices Æqùationum quarumcumque gegeraliter, sine praevia Reductione, Philos. Trans. Roy. Soc., London, Vol.18(1694), 136-148.

[6] E. Hansen and M. Patrick, A family of root finding methods, Numer. Math., 27(1977), 257-269.

[7] 五十嵐，永坂， Newton-Raphson 系解法の収束の次数と反復回数の関係，情報処理学会論文誌, 32(1991), 1349-1354.

[8] 五十嵐， 代数方程式に対するパラメータを含む反復解法系の大域的振る舞い，日本応用数理学会論文誌, 2(1992), 印刷中.

[9] I.Kiss, Uber eine Verallgemeinerung des Newtonschen Näherungsver-fahrens, Z.A.M.M., Vol.34, No.1/2, pp.68-69, 1954.

[10] 桜井・鳥居・杉浦，Padéd. 近似による代数方程式の反復解法，情報処理学会論文誌，31(1990), 517-522.

[11] T. Pomentale, A class of iterative methods for holomorphic functions, Numer. Math., 18(1971), 193-203.

[12] E. Schröder, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann., 2(1869), 317-356.