数理解析研究所講究録
第 792 巻 1992 年 172-186

Eisenstein 級数の Fourier-Jacobi 係数について.

京都大　池田　保　(Tamotsu Ikeda)

§1. Jacobi groups 上の automorphic form.

k を global field, $\mathbf{A}$ を K の adele 環、ψ を $\mathbf{A}/k$ の non-trivial な addictive character とする。V を K 上定義された 2-step unipotent algebraic group で Z をその center とする。S を non-trivial な homomorphism $Z \to k$ とする。$V/\mathrm{Ker(S)}$ が $Z/\mathrm{Ker(S)}$ を center とする Heisenberg group である時、S は non-degenerate であるという。H を k 上定義された algebraic group で V に作用しているものとする。H の action が Z, S を stabilize する時、H と V の半直積 D を Jacobi group ということとする。$D_0 = D/\mathrm{Ker}(S)$, $V_0 = V/\mathrm{Ker}(S)$, $Z_0 = Z/\mathrm{Ker}(S)$ とおく。H の action は $V/Z = V_0/Z_0$ の symplectic structure を保つので $H \to Sp_{V/Z}$ が定義できる。$\widetilde{Sp_{V/Z}(\mathbf{A})}$ を $Sp_{V/Z}(\mathbf{A})$ の metaplectic cover とする。$H(\mathbf{A})$ の covering $\widetilde{H(\mathbf{A})}$ を fibre product

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H(\mathbf{A})}(\mathbf{A}) & \to & H(\mathbf{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sp_{V/Z}\widetilde{(\mathbf{A})} & \to & Sp_{V/Z}(\mathbf{A}) \end{array}$$

で定義する。$\widetilde{D(\mathbf{A})}$ を $V(\mathbf{A})$ と $\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の半直積、J を V と $Sp_{V/Z}$ の半直積、$\widetilde{J(\mathbf{A})}$ を $V(\mathbf{A})$ と $Sp_{V/Z}\widetilde{(\mathbf{A})}$ の半直積とする。$V \to V_0$, $H \longmapsto Sp_{V/Z}$ は $D \to J$, $\widetilde{D(\mathbf{A})} \to \widetilde{J(\mathbf{A})}$ を induce するので、これを ι で表す。

$\widetilde{D(\mathbf{A})}$ の表現で、 $Z(\mathbf{A})$ が $\psi_S := \psi \circ S$. で作用するものを考える。V_0 は Hesenberg group なので、次のような座標がとれる。

$$V_0 = \{V_0 = (x, y, z) \mid x, y \in k^n, z \in k\}.$$

V_0 の composition law は、

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{(x_1\,{}^t y_2 - x_2\,{}^t y_1)}{2})$$

で与えられる。V_0 の subgroup X, Y を

$$X = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = 0\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = 0\}.$$

で定義すると X と Y は V/Z の maximal totally isotropic subspace で、 $X \oplus Y \simeq V/Z$.

$Sp_{V/Z} = Sp_n$ は V_0 に右から

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (xA + yC, xB + yD, z)$$

によって作用している。$V_0(\mathbf{A})$ の $\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ の上への Schrödinger 表現 ω_ψ は

$$\omega_\psi(v)\phi(t) = \phi(t + x)\psi(z + t\,{}^t y + \frac{1}{2}x\,{}^t y),$$

$v = (x, y, z) \in V_0(\mathbf{A})$, $\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ によって与えられる。

Stone von-Neumann の定理により、ω_ψ は $V_0(\mathbf{A})$ の規約表現で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用する唯一のものである。$V_0(\mathbf{A})$ の Schrödinger 表現は $\widetilde{J(\mathbf{A})}$ の Weil 表現 ω_ψ に一意的に拡張される。ω_ψ は次の式で定まる。

$$\omega_\psi\left(\left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon\right)\right)\phi(t) = \varepsilon\frac{\gamma(1)}{\gamma(\det A)}|\det A|^{\frac{1}{2}}\phi(tA),$$

$$\omega_\psi\left(\left(\begin{pmatrix}\mathbf{1}_n & B\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n\end{pmatrix},\varepsilon\right)\right)\phi(t)=\varepsilon\psi(\frac{1}{2}tB\,{}^t t)\phi(t),$$

$$\omega_\psi\left(\left(\begin{pmatrix}\mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n\\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n\end{pmatrix},\varepsilon\right)\right)\phi(t)=\varepsilon\gamma(1)^{-n}\mathcal{F}\phi(t).$$

ここで、$\mathcal{F}\phi$ は ψ によって定まる ϕ の Fourier 変換で

$$\mathcal{F}\phi(t)=\int_{X(\mathbf{A})}\phi(x)\psi(t\,{}^t x)dx.$$

$\gamma(\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{A}^\times$ は ψ によって定まる Weil constant で

$$\int_{\mathbf{A}}\mathcal{F}\varphi(t)\psi(\frac{1}{2}\alpha t^2)dt=\gamma(t)\int_{\mathbf{A}}\varphi(t)\psi(\frac{1}{2}\alpha t^2)dt,$$

$\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{A})$ で与えられる。ω_ψ の $\widetilde{Sp_n(\mathbf{A})}$ への制限も ω_ψ で表す。

$\phi\in\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ に対して theta function $\Theta^\phi(vh)$ を

$$\begin{aligned}\Theta^\phi(vh)&=\sum_{l\in X(k)}\omega_\psi(vh)\phi(l)\\&=\sum_{l\in X(k)}\omega_\psi(h)\phi(l+x)\psi(z+l\,{}^t y+\frac{1}{2}x\,{}^t y),\end{aligned}$$

$v\in V_0(\mathbf{A})$, $h\in\widetilde{Sp_n(\mathbf{A})}$ で定義する。

$C_\psi^\infty(V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A}))$ を $V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A})$ 上の smooth function で、$f(zv)=\psi(z)f(v)$, $z\in Z(\mathbf{A})$ をみたすものの空間とする。$C_\psi^\infty(V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A}))$ には C^∞-topology をいれる。$\phi\longmapsto\Theta^\phi$ で与えられる線形写像

$$\theta:\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))\longrightarrow C_\psi^\infty(V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A}))$$

は topological isomorphism になる。$\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ 上には $\widetilde{J(\mathbf{A})}$ 不変な non-degenerate Hermitian inner product

$$(\phi_1,\phi_2)=\int_{X(\mathbf{A})}\phi_1(t)\overline{\phi_2(t)}dt$$

が存在する。この時、

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{Z_0(\mathbf{A})V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A})} \Theta^{\phi_1}(v)\overline{\Theta^{\phi_2}(v)}dv.$$

が成り立つ。特に、ω_ψ の contragredient 表現は、$\omega_{\psi^{-1}} = \overline{\omega_\psi}$ に等しい。

$\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ を $V_0(\mathbf{A})$ 上の smooth function φ で次の 1), 2) をみたすものの空間とする。

1) $\varphi(zv) = \psi^{-1}(z)\varphi(v)$.

2) $|\varphi|$ は $Z_0(\mathbf{A})\backslash V_0(\mathbf{A})$ 上で rapidly decreasing .

$\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ は線形空間として $\mathcal{S}((X \oplus Y)(\mathbf{A}))$ と同形である。 この同形によって $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に topology をいれる。

(σ, W) を $V_0(\mathbf{A})$ の表現で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ. で作用するようなものとする。σ が $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に拡張されるとは次の積分

$$\sigma(\varphi)w = \int_{Z_0(\mathbf{A})/V_0(\mathbf{A})} \varphi(v)\sigma(v)w\, dv$$

が全ての $\varphi \in \mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ について収束して separately continuous linear map $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A})) \times W \longrightarrow W$ を与えることとする。Schrödinger 表現 ω_ψ は $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に拡張され、$\omega_\psi(\varphi) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\varphi = 0$ が成り立つ。

$\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ に対して、

$$\varphi(v) = \int_{X(\mathbf{A})} \phi_1(t - \frac{x}{2})\overline{\phi_2(t + \frac{x}{2})}\psi(-z - t\,{}^t\!y)dt$$

とおけば$\varphi \in \mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ であって、

$$\omega_\psi(\varphi)\phi = (\phi, \phi_2) \cdot \phi_1$$

が成り立つ。さらに このような φ は $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ を生成する。

Lemma 1: ϕ_1, ϕ_2, φ を上のように定める時、

$$\sum_{l \in Z_0(k)/V_0(k)} \varphi(h^{-1}v^{-1}luh) = \Theta^{\phi_1}(vh)\overline{\Theta^{\phi_2}(uh)},$$

$h \in \widetilde{Sp_n(\mathbf{A})}$ $u, v \in V_0(\mathbf{A})$ が成り立つ。

証明: u の関数として両辺は $C^{\infty}_{\psi^{-1}}(V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A}))$ の元である。任意の $\phi \in \mathcal{S}(V_0(\mathbf{A}))$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{Z_0(\mathbf{A})V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A})} \sum_{l \in Z_0(k)\backslash V_0(k)} \varphi(h^{-1}v^{-1}luh)\Theta^{\phi}(uh)du \\
=&\int_{Z_0(\mathbf{A})\backslash V_0(\mathbf{A})} \varphi(h^{-1}v^{-1}uh)\Theta^{\phi}(uh)du \\
=&\int_{Z_0(\mathbf{A})\backslash V_0(\mathbf{A})} \varphi(u)\Theta^{\phi}(vhu)du \\
=&\Theta^{\omega_\psi(\varphi)\phi}(vh) \\
=&(\phi, \phi_2)\Theta^{\phi_1}(vh).
\end{aligned}$$

が成り立つ。Hermitian form (,) は non-degenerate だから Lemma がいえる。

Lemma 2: (σ, W) を $V_0(\mathbf{A})$ の表現で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用するようなものとする。σ が $\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$ に拡張されるものとする。この時、$\sigma(\mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A})))W$ W において dense である。

証明: $\tilde{w}$ を W 上の linear functional で、任意の $\varphi \in \mathcal{S}_\psi(V_0(\mathbf{A}))$, $w \in W$ に対して $<\sigma(\varphi)w, \tilde{w}> = 0$ となるようなものとする。すると任意の $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in V_0(\mathbf{A})$ に対して、

$$\begin{aligned}
<\sigma(v_1)\sigma(\varphi)\sigma(v_1^{-1})w, \tilde{w}> &= \int_{Z_0(\mathbf{A})\backslash V_0(\mathbf{A})} \varphi(v) <\sigma(v_1 v v_1^{-1})w, \tilde{w}> dv \\
&= \int_{V_0(\mathbf{A})} <\sigma(v)w, \tilde{w}> \varphi(v)\psi(x_1 y - x y_1)dv.
\end{aligned}$$

が成り立つ。Supp(φ) が mod $Z_0(\mathbf{A})$ で compact ならこの積分は絶対収束して $<\sigma(v)w, \tilde{w}>$ $\varphi(v)$. の Fourier 変換に等しい。よって、$<\sigma(v)w, \tilde{w}>$ は恒等的に 0 でなくてはならない。

$C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ $D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})}$ 上の 関数 f で $f(zvh) = \psi_S(z)f(vh)$, $z \in Z(\mathbf{A})$, $v \in V(\mathbf{A})$, $h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}$. をみたすものの空間とする。Theta function Θ^ϕ, $\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ も ι によるひきもどしで $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ の元とみなす。

Corollary: W を $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ の closed subspace で $V(\mathbf{A})$ の元による right translation で不変なものとする。この時、次の形の関数

$$\Theta^{\phi_1}(vh)\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(uh)\overline{\Theta^{\phi_2}(uh)}du\,,$$

$v \in V(\mathbf{A})$, $h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}$, $f \in W$, $\phi_1,\phi_2 \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ によって W は生成される。

証明: W を right translation ρ により、$V(\mathbf{A})$ の表現とみなす。Lemma 1 の φ をとると、

$$\begin{aligned}\rho(\varphi)f(vh) &= \int_{Z(\mathbf{A})\backslash V(\mathbf{A})} \varphi(u)f(vhu)du \\ &= \int_{Z(\mathbf{A})\backslash V(\mathbf{A})} \varphi(h^{-1}v^{-1}uh)f(uh)du \\ &= \int_{Z(\mathbf{A})V(k)\backslash V(\mathbf{A})} \sum_{l\in Z(k)\backslash V(k)} \varphi(h^{-1}v^{-1}luh)f(uh)du.\end{aligned}$$

この積分は絶対収束するから Lemma 2 の条件がみたされる。

Remark: Stone von Neumann の定理により $\widetilde{D(\mathbf{A})}$ の表現 π で $Z_0(\mathbf{A})$ が ψ で作用するようなものは、tensor product:

$$(\omega_\psi \circ \iota) \otimes \tau\,.$$

でかける。 ここで ω_ψ は $\widetilde{J(\mathbf{A})}$ の Weil 表現で、τ i$\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の表現である。Corollary 3 の意味するところは π が $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ 上に実現されている時には τ は次のような $H(k)\backslash\widetilde{H(\mathbf{A})}$ 上の関数の空間であるということである。

$$\int_{V_0(k)\backslash V_0(\mathbf{A})} f(uh)\overline{\Theta^\phi(uh)}du\,,$$

$h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}$, $f \in W$, $\phi \in \mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$.

§2. Siegel 型の Eisenstein series .

Symplectic group 上に定義された Siegel 型の Eisenstein seires を考える。m, n を正整数とする。

$$G = Sp_{m+n} = \left\{ g \in GL_{2m+2n} \,\middle|\, g \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \\ -\mathbf{1}_{m+n} & \mathbf{0}_{m+n} \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \\ -\mathbf{1}_{m+n} & \mathbf{0}_{m+n} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \,\middle|\, A, B, C, D \in M_{m+n}(k), \right.$$

$$\left. A\,{}^tB = B\,{}^tA, C\,{}^tD = D\,{}^tC, A\,{}^tD - B\,{}^tC = \mathbf{1}_{m+n} \right\},$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in GL_{m+n}, A^{-1}B \in \mathrm{Sym}_{m+n}(k) \right\},$$

$$Z = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{m+n} & \begin{matrix} z & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_n \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) \,\middle|\, z \in \mathrm{Sym}_m(k) \right\},$$

$$V = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \mathbf{1}_m & x \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{matrix} & \begin{matrix} z & y/2 \\ {}^ty/2 & \mathbf{0}_n \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \begin{matrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ -{}^tx & \mathbf{1}_n \end{matrix} \end{array} \right) \,\middle|\, x, y \in M_{m\,n}(k), z - \frac{x\,{}^ty}{2} \in \mathrm{Sym}_m(k) \right\},$$

$$X = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \mathbf{1}_m & x \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{matrix} & \mathbf{0}_{m+m} \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \begin{matrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ -{}^tx & \mathbf{1}_n \end{matrix} \end{array} \right) \,\middle|\, x \in M_{m\,n}(k) \right\},$$

$$Y = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_{m+n} & \begin{matrix} \mathbf{0}_m & y/2 \\ {}^ty/2 & \mathbf{0}_n \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \end{array} \right) \,\middle|\, y \in M_{m\,n}(k) \right\},$$

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & 0 & \mathbf{0}_m & 0 \\ 0 & A & 0 & B/2 \\ \hline \mathbf{0}_m & 0 & \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 2C & 0 & D \end{array} \right) \middle| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n \right\}.$$

Z は $\mathrm{Sym}_m(k)$ と自然に同一視される。Z から k への homomorphism は $z \longmapsto \mathrm{tr}(zS)$, $S \in \mathrm{Sym}_m(k)$ とかける。この homomorpism も S で表す。$V_0 = V/\mathrm{Ker}(S)$ が Heisenberg group になるためには、$\det S \neq 0$ が必要十分である。H と Sp_n を次によって同一視する。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & 0 & \mathbf{0}_m & 0 \\ 0 & A & 0 & B/2 \\ \hline \mathbf{0}_m & 0 & \mathbf{1}_m & 0 \\ 0 & 2C & 0 & D \end{array} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$w_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_i & \mathbf{1}_i \\ -\mathbf{1}_i & \mathbf{0}_i \end{pmatrix}$ とおく。

$\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の $\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ における Weil 表現 ω_S は次の式であたえられる。

$$\omega_S\left(\left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon\right)\right)\phi(X) = \varepsilon^m \frac{\gamma_S(1)}{\gamma_S(\det A)} |\det A|^{\frac{m}{2}} \phi(XA),$$

$$\omega_S\left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & B \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}, \varepsilon\right)\right)\phi(X) = \varepsilon^m \psi_S(\frac{1}{2} XB\,{}^tX)\phi(X),$$

$$\omega_S\left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}, \varepsilon\right)\right)\phi(X) = \varepsilon^m \gamma_S(1)^{-n} \mathcal{F}\phi(X),$$

$$\mathcal{F}\phi(X) = \int_{X(\mathbf{A})} \phi(Y)\psi(\mathrm{tr} SX\,{}^tY) dY.$$

ここで $\gamma_S(\alpha)$ は S に関する Weil constant で、S が $\mathrm{diag}(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ に同値の時、$\gamma_S(\alpha) = \prod_{i=1}^m \gamma(s_i\alpha)$.

ω を $\mathbf{A}^\times/k^\times$ の unitary quasi-character 、 $s \in \mathbf{C}$ とする。$I(\omega,s) = I_G(\omega,s)$ を $G(\mathbf{A})$ 上の 関数 f で、次をみたすものの空間とする。

$$f(pg) = \omega(\det A)|\det A|^{s+\rho} f(g),$$

$g \in G(\mathbf{A})$, $p = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \in P(\mathbf{A})$. ここで、 $\rho = \frac{m+n+1}{2}$. また、 f は $G(\mathbf{A})$ の standard maximal compact subgroup に関して right finite であるとする。

同様に $I(\omega,s)^\sim = I_G(\omega,s)^\sim$ を $\widetilde{G(\mathbf{A})} = \widetilde{Sp_{m+n}}(\mathbf{A})$ 上の 関数 f で、次をみたすものの空間とする。

$$f(pg) = \varepsilon \frac{\gamma(1)}{\gamma(\det A)} \omega(\det A)|\det A|^{s+\rho} f(g),$$

$g \in G(\mathbf{A})$, $p = \left(\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon\right) \in \widetilde{P(\mathbf{A})}$. ここで、 $\widetilde{P(\mathbf{A})}$ は $P(\mathbf{A})$ の $\widetilde{Sp_{m+n}}(\mathbf{A})$ における inverse image.

type (ω,s) (resp. $(\omega,s)^\sim$) の Eisenstein series $E(g;f)$ を次のように定義する。

$$E(g;f) = \sum_{\gamma \in P\backslash G} f(\gamma g),$$

$f \in I_G(\omega,s)$ (resp. $I_G(\omega,s)^\sim$). これは $\mathrm{Re}(s) >> 0$ のとき絶対収束して、f が s に holomorphic に depend する時、 全 s-平面に解析接続される。

§3. Fourier-Jacobi 係数

定義: φ を $G(k)\backslash G(\mathbf{A})$ 上の C^∞-function とする。 φ の Fourier-Jacobi 係数 φ_S とは $D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})}$ 上の関数

$$\varphi_S(vh) = \int_{Z(k)\backslash Z(\mathbf{A})} \varphi(zvh)\psi_S^{-1}(z)dz$$

$v \in V(\mathbf{A})$, $h \in \widetilde{H(\mathbf{A})}$ のこととする。 φ_S は $C_S^\infty(D(k)\backslash\widetilde{D(\mathbf{A})})$ に属する。

§1 の結果より、Eisenstein series の Fourier-Jacobi 係数によって生成される $\widetilde{D(\mathbf{A})}$ の表現 は次の形の積分で表される関数で生成される。

$$\Theta^{\phi_1}(vh)\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} E_S(uh;f)\overline{\Theta^{\phi_2}(uh)}dv$$

$v\in V(\mathbf{A})$, $h\in\widetilde{H(\mathbf{A})}$, $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$.

それゆえ

$$\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} E_S(vh;f)\overline{\Theta^{\phi}(vh)}dv \tag{1}$$

$\phi\in\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ の形の関数を考えるのは自然である。

Q を G における V の normalizer とする。両側剰余類 $W_P\backslash W_G/W_Q$ の完全代表系として、

$$\xi_i=\left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0}_{m-i} & 0 & \mathbf{1}_{m-i} & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{n+i} & 0 & \mathbf{0}_n\\ \hline -\mathbf{1}_{m-i} & 0 & \mathbf{0}_{m-i} & 0\\ 0 & \mathbf{0}_{n+i} & 0 & \mathbf{1}_{n+i}\end{array}\right),$$

$i=0,1,\cdots,m$. Open cell は $P\xi_0Q$ だけであることに注意しておく。

Lemma 3: $\gamma\in G\notin P\xi_0Q$, ならば$\gamma^{-1}P\gamma\cap Z$ 上で S は non-trivial.

証明: $q\in Q$ の時 q は Z を normalize して qSq^{-1} もまた non-degenerate だから $\gamma=\xi_i$, $i>0$, としてよい。この時 $\gamma^{-1}P\gamma\cap Z$ は Z の最後の行と列からなる部分空間を含む。明らかに S はこの部分空間の上で non-degenerate.

$\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ の Hilbert symbol を $<,>$ で表す。$\chi_a(x)=<a,x>$ とおく。

定理: $f\in I(\omega,s)$ または $f\in I(\omega,s)^{\sim}$ とする。$\phi\in\mathcal{S}(X(\mathbf{A}))$ は $\widetilde{H(\mathbf{A})}$ の standard maximal compact subgroup の ω_S による作用で有限であるとする。また、Re(s) は十分大きいとする。この時、(1) は 次の関数からえられる Eisenstein series である。

$$R(h;f,\phi)=\int_{V(\mathbf{A})} f(w_{m+n}vw_nh)\overline{\omega_\psi(vw_nh)\phi(0)}dv\,.$$

$R(h;f,\phi)$ の型はつぎのとおり。

$$\begin{cases} I_H(\omega\chi_a,s)\,,\ a=(-1)^{\frac{m}{2}}\det S\,, & 2|m\,,\ f\in I_G(\omega,s) \\ I_H(\omega\chi_a,s)^{\sim}\,,\ a=(-1)^{\frac{m}{2}}\det S\,, & 2|m\,,\ f\in I_G(\omega,s)^{\sim} \\ I_H(\omega\chi_a,s)^{\sim}\,,\ a=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\det S\,, & 2\nmid m\,,\ f\in I_G(\omega,s) \\ I_H(\omega\chi_a,s)\,,\ a=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\det S\,, & 2\nmid m\,,\ f\in I_G(\omega,s)^{\sim} \end{cases}$$

証明: (1) は絶対収束であるとしてよい。簡単のため $f\in I(\omega,s)$ であるとする。剰余類 $P\backslash G$ を次のように分割する。

$$P\backslash G=\cup_{i>0}(P\backslash P\xi_iQ)\cup(P\backslash P\xi_0Q).$$

この分割により、

$$\begin{aligned}\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})}E_S(vh;f)\overline{\Theta^\phi(vh)}dv &= \int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})}E(vh;f)\overline{\Theta^\phi(vh)}dv \\ &=\sum_{i>0}\sum_{\gamma\in P\backslash P\xi_iQ}\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})}f(\gamma vh)\overline{\Theta^\phi(vh)}dv \\ &\quad+\sum_{\gamma\in P\backslash P\xi_0Q}\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})}f(\gamma vh)\overline{\Theta^\phi(vh)}dv.\end{aligned}$$

となる。Lemma 3 により最初の項は 0 に等しい。さらに最初の剰余類は

$$P\backslash P\xi_0Q=\xi_0\cdot(Y\backslash V)\cdot(P_H\backslash H).$$

$$P_H=\left\{\begin{pmatrix}A & *\\ \mathbf{0}_n & {}^tA^{-1}\end{pmatrix}\mid A\in GL_n\right\}$$

と分割される。$\gamma\in H$ は $V(k)$, $V(\mathbf{A})$ を normalize するので最初の項は次のように変形さ

れる。

$$\sum_{\gamma\in P\backslash P\xi_0 Q}\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(\gamma vh)\overline{\Theta^{\phi}(vh)}dv$$

$$=\sum_{\gamma_1\in Y\backslash V}\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(\xi_0\gamma_1\gamma vh)\overline{\Theta^{\phi}(vh)}dv$$

$$=\sum_{\gamma_1\in Y\backslash V}\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{V(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(\xi_0\gamma_1 v\gamma h)\overline{\Theta^{\phi}(v\gamma h)}dv$$

$$=\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{Y(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v\gamma h)\overline{\Theta^{\phi}(v\gamma h)}dv$$

$$=\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{Y(k)\backslash V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v\gamma h)\sum_{l\in Y(k)}\overline{\mathcal{F}(\omega_S(lv\gamma h)\phi(0))}dv$$

$$=\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v\gamma h)\overline{\mathcal{F}(\omega_S(v\gamma h)\phi(0))}dv$$

$$=\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{V(\mathbf{A})} f(\xi_0 v\gamma h)\overline{\omega_S(w_n v\gamma h)\phi(0)}dv$$

$$=\sum_{\gamma\in P_H\backslash H}\int_{V(\mathbf{A})} f(w_{m+n} v w_n\gamma h)\overline{\omega_S(v w_n\gamma h)\phi(0)}dv\,.$$

よって、

$$(1)=\sum_{\gamma\in P_H\backslash H} R(\gamma h; f,\phi)$$

が示された。 $R(h;f,\phi)$ の型が求めるものであることを示す。 そのために $R(h;f,\phi)$ を少

し変形する。

$$
\begin{aligned}
R(h;f,\phi) &= \int_{V(\mathbf{A})} f(w_{m+n} v w_n h)\overline{\omega_S(v w_n h)\phi(0)}dv \\
&= \int_{X(\mathbf{A})}\int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & x & z - x\,{}^t y/2 & y/2 \\ 0 & \mathbf{1}_n & {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}_{m+n}} & \mathbf{1}_m & 0 \\ & & -{}^t x & \mathbf{1}_n \end{array} \right) w_n h \right) \\
&\qquad \times \overline{\omega_S(w_n h)\phi(x)\psi(\mathrm{tr}(S(z + x\,{}^t y/2)))}dzdydx \\
&= \int_{X(\mathbf{A})}\int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y/2 \\ & {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array} \right) w_n h \right) \\
&\qquad \times \overline{\omega_S(w_n h)\phi(x)\psi(\mathrm{tr}(S(z + x\,{}^t y)))}dzdydx \\
&= \int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y/2 \\ & {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array} \right) w_n h \right) \\
&\qquad \times \overline{\mathcal{F}\big(\omega_S(w_n h)\phi\big)(y)\psi_S(z)}dzdy \\
&= \int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y/2 \\ & {}^t y/2 & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array} \right) w_n h \right) \\
&\qquad \times \overline{\omega_S(h)\phi(y)\psi_S(z)}dzdy \\
&= \int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array} \right) w_n h \right) \\
&\qquad \times \overline{\omega_S(h)\phi(2y)\psi_S(z)}dzdy\,.
\end{aligned}
$$

$p = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{m+n} & B \\ \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n} \end{pmatrix}, \varepsilon \right)$ とすると

$$
w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ & {}^t y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array} \right) w_n p
$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_m & 0 & 0 & 0 \\ 2\,{}^t\!yB & \mathbf{1}_n & 0 & B/2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}_{m+n}} & \mathbf{1}_m & -2By \\ & & 0 & \mathbf{1}_n \end{array}\right) w_{m+n} \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z+2yB\,{}^t\!y & y \\ & {}^t\!y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array}\right) w_n\,.$$

であるから

$$\begin{aligned} R(ph;f,\phi) &= \int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n}\left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ & {}^t\!y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_n & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_n} \end{array}\right) w_n ph\right) \\ &\qquad \times \overline{\omega_S(ph)\phi(2y)\psi_S(z)}dzdy \\ &= \varepsilon^m \int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})} f\left(w_{m+n}\left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z+2yB\,{}^t\!y & y \\ & {}^t\!y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array}\right) w_n h\right) \\ &\qquad \times \overline{\omega_S(h)\phi(2y)\psi_S(z+2yB\,{}^t\!y)}dzdy \\ &= \varepsilon^m R(h;f,\phi)\,. \end{aligned}$$

となる。また $p = \left(\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_{m+n} \\ \mathbf{0}_{m+n} & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \varepsilon\right)$, の時には

$$w_{m+n}\left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & y \\ & {}^t\!y & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array}\right) w_n p = p w_{m+n}\left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{1}_{m+n} & z & yA \\ & {}^t(yA) & \mathbf{0}_n \\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{1}_{m+n}} \end{array}\right) w_n\,.$$

なので

$$R(ph;f,\phi)=\int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})}f\left(w_{m+n}\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{1}_{m+n} & \begin{matrix} z & y\\ {}^t y & \mathbf{0}_n\end{matrix}\\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n}\end{array}\right)w_n ph\right)$$
$$\times\overline{\omega_S(ph)\phi(2y)\psi_S(z)}dzdy$$

$$=\varepsilon^m\frac{\gamma_{-S}(1)}{\gamma_{-S}(\det A)}\omega(\det A)|\det A|^{s+m+\frac{n+1}{2}}\int_{Y(\mathbf{A})}\int_{Z(\mathbf{A})}$$
$$f\left(w_{m+n}\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{1}_{m+n} & \begin{matrix} z & yA\\ {}^t(yA) & \mathbf{0}_n\end{matrix}\\ \hline \mathbf{0}_{m+n} & \mathbf{1}_{m+n}\end{array}\right)w_n h\right)\overline{\omega_S(h)\phi(2yA)\psi_S(z)}dzdy$$

$$=\varepsilon^m\frac{\gamma_{-S}(1)}{\gamma_{-S}(\det A)}\omega(\det A)|\det A|^{s+\frac{n+1}{2}}R(h,f,\phi).$$

よって Weil constant は等式

$$\gamma(a)\gamma(b)=<a,b>\gamma(1)\gamma(ab)$$

をみたすから定理が証明された。

参考文献

1. S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen I, II Math. Zeit. No.183 (1983) pp.21-46, ibid No.189 (1985) pp.81-110

2. R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Springer Lecture Note in Math. No.544

4. G. Shimura, On Eisenstein series, Duke Math. Vol.50 (1983) pp.417-476

5. G. Shimura, On Eisenstein series of half-integral weight, Duke Math. Vol 52 (1985) pp.281-314