数理解析研究所講究録
第792巻 1992年 187-194

半整数weightのNewformの理論について

上田 勝 (Masaru Ueda, 京大理)

(序文) 以前より研究している"Newformの理論を半整数weightの場合に拡張する"というテーマについての最新結果を報告する。この文章の内容は 数理研講究録752「保型形式とゼータ関数の研究」に書いた [U5] の続きになる。

新しく追加された結果は次のものである。即ち、[U5]の主結果において仮定されていたsquarefullという技術的な仮定を除去した事、及びこの事により、より一般的な結果を得る事ができ、Kohnenの結果[K]を完全に含む様になった事である。

残念な事にこの稿に当てる事のできる時間が限られているため、かなり読みにくい文章になってしまった。この研究テーマに関する今までの歴史や事実等は[U5]にかなり詳しく書いてあるので、このテーマに興味のある方は初めにそちらを読んでいただければ幸いである。筆者は現在この文章の内容の論文[U3]をワープロで打っている所である。もし詳しい内容が必要な方があれば、申し出があり次第お送りするつもりである。//

記号　以下 次の記号を用いる。但し、詳しい記号の意味は [U1]～[U3] を見てほしい。

k, N を正の整数であるとし、更に N は4で割れると仮定する。χ を modulo N で定義された even Dirichlet character で $\chi^2=1$ となるものであるとする。

$S = S(k+1/2, N, \chi) :=$ weight $k+1/2$, level N, character χ の cusp form のなす空間.

更に $\mathrm{ord}_2(N)=2$ の時には Kohnen space

$$S_K = S(k+1/2, N, \chi)_K$$
$$:= \left\{ f = \sum_{n\geq 1} a(n)\, e(nz) \in S(k+1/2, N, \chi)\ ;\ \middle|\ a(n)=0 \text{ if } \chi_2(-1)(-1)^k n \equiv 2, 3 \pmod 4 \right\}$$

但し、$e(z) := \exp(2\pi\sqrt{-1}\,z)$, χ_2 は χ の 2-成分。//

我々はこの記号の下で次の問題を考える。//

問題　$S(k+1/2, N, \chi)$, $S(k+1/2, N, \chi)_K$ の中の "new-form" のなす部分空間を求めよ。即ち、次の2条件を満たす部分空間 $S^{new} = S^{new}(k+1/2, N, \chi)$ を見い出せ。

① S^{new} に対して Hecke operator に関する strong multiplicity one theorem が成立する。

② $S^{new}(k+1/2, N', \chi)$ $(N' | N)$ を用いて
$S(k+1/2, N, \chi)$, $S(k+1/2, N, \chi)$ が直和分解等の形で回復できる。//

歴史 今までに [N], [K], [MRV] 等の結果がある。これらについては [U5] を見られたい。//

さて我々は $N = 4 \times$ 奇数, $S(k+1/2, N, \chi)_K$ の場合にこの問題に関する肯定的解答を得た。([U3, §3])
その他の場合についても[U3] では扱っているが、以下では上の場合についてのみ考える。//

いくつか記号を導入しよう。
$\nu_p = \mathrm{ord}_p(N)$ (pは奇素数) とする。そして

$$N = 4M = 4M_1 M_{2+}, \quad M_1 = \prod_{\substack{p|M \\ \nu_p=1}} p, \quad M_{2+} = \prod_{\substack{p|M \\ \nu_p \geq 2}} p^{\nu_p}$$

と分解し、 $\Pi = \{l_1, \ldots, l_r\} :=$ M_{2+} の全素因子のなす集合とおく。//

Π の各部分集合 I に対し twisting operator R_I を次で導入する。

$$R_I : S(k+1/2, N, \chi) \longrightarrow S(k+1/2, N, \chi)$$
$$\sum_{n\geq 1} a(n)\, e(nz) \longmapsto \sum_{n\geq 1} a(n) \prod_{\ell\in I} \left(\frac{n}{\ell}\right) e(nz)$$

すると

〈Fact 1〉 $\mathcal{R} := \mathbb{Z}[R_I \,;\, I \subseteq \Pi]$ は hermitian commutative algebra となる。（[U3, §1]）//

更に 任意の正整数 n prime to N に対し、Hecke operator $\tilde{T}(n^2) = \tilde{T}_{k+1/2, N, \chi}(n^2)$ （定義は [U3] をみよ。）を考える。
また 正の整数 $m \in \mathbb{Z}$ に対し $U(m)$ を次で定める。

$$\sum_{n\geq 1} a(n)\, e(nz) \,\Big|\, U(m) := \sum_{n\geq 1} a(nm)\, e(nz) \quad //$$

すると

〈Fact 2〉 R_I $(I \subseteq \Pi)$, $\tilde{T}(n^2)$, $((n, N) = 1)$, $U(p^2)$ $(0 < p \mid M)$ は それぞれ互いに可換である。（cf. [U3]）//

twisting operator による分解

$S_K^{\phi} = S^{\phi}(k+1/2, N, \chi)_K$ という記号で $S_K = S(k+1/2, N, \chi)_K$ の中での $\mathrm{Ker}(R_\Pi)$ の直交補空間を表そう。
即ち

$$S_K = S_K^{\phi} \oplus \mathrm{Ker}(R_\Pi) \quad //$$

簡単な考察で

$$\mathrm{Ker}(R_\pi) \subseteq \left\{ \sum_{n\geq 1} a(n)\, e(nz) \in S_K \;;\; \begin{array}{l} \\ a(n)\neq 0 \Rightarrow \quad n \in \bigcup_{\ell\in\pi} \mathbb{Z}\ell \end{array} \right\}$$

が言える。 従って $\mathrm{Ker}(R_\pi)$ の元は "old form" であると考える事ができる。 よって我々は S_K^{ϕ} の方を調べる。

さて Fact 1 より、 S_K^{ϕ} を次の様に分解できる。

$$S_K^{\phi} = \bigoplus_{\kappa\in \mathrm{Map}(\pi,\{\pm 1\})} S_K^{\phi,\kappa},$$

$$S_K^{\phi,\kappa} := \{ f\in S_K^{\phi} \;;\; f|R_{\{\ell\}} = \kappa(\ell) f \quad (\forall \ell\in\pi) \}$$ //

そして Fact 2 より 各 $S_K^{\phi,\kappa}$ に $\tilde{T}(n^2)$ ($(n,N)=1$) と $U(\ell^2)$ ($\ell | M_1$) が作用する事が分かる。//

old form の空間の定義

各 $0<d \mid M_1$ に対して

$\mathfrak{S}(k+1/2,\, 4dM_{2+},\, \chi)_K$

$:= \langle S(k+1/2,\, 4dm,\, \chi)_K | R_I \;;\; 0<m \mid M_{2+},\ I\subseteq \pi \rangle_{\mathbb{C}}$

と定める。

これは twisting operator で stable になるように定義した訳で、 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k+1/2,\, 4dM_{2+},\, \chi)_K$ は $\mathcal{R}=\mathbb{Z}[R_I \;;\; I\subseteq\pi]$ の

表現空間となる。従って、$\mathfrak{S}$の中での$\mathrm{Ker}(R_\pi)$の直交補空間$\mathfrak{S}^{\phi}$や、$\mathfrak{S}^{\phi}$のκ−固有空間$\mathfrak{S}^{\phi,\kappa}$が$S^{\phi,\kappa}$の時と同様に定義できる。

これらの記号の下で$S_K^{\phi,\kappa}$の部分空間$S_K^{\phi,\kappa,old}$を次で定める。

$$
S_K^{\phi,\kappa,old} := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{ed \mid M_1,\ e,d \geq 1 \\ \prod_{\ell\in\pi}\ell^2 \mid r \mid M_{2+} \\ dr < M}} S^{\phi,\kappa}(k+1/2,\ 4dr,\ \chi)_K \mid U(e^2) & \text{if } \exists \ell \in \pi \text{ such that } \nu_\ell \geqq 3 \\ \displaystyle\sum_{\substack{ed \mid M_1 \\ e,d \geqq 1 \\ d < M_1}} \mathfrak{S}^{\phi,\kappa}(k+1/2,\ 4dM_{2+},\ \chi)_K \mid U(e^2) & \text{if } M_{2+} = \prod_{\ell\in\pi}\ell^2 \\ & (\Leftrightarrow \forall \ell\in\pi,\ \nu_\ell = 2) \end{cases}
$$

<u>new form の空間の定義</u>

$S_K^{\phi,\kappa,new} = S^{\phi,\kappa,new}(k+1/2,\ N,\ \chi)_K$ を $S_K^{\phi,\kappa}$ の中での $S_K^{\phi,\kappa,old}$ の直交補空間であるとおく。//

すると、

<u>定理</u> (I) $\chi=1$ (Haupt type) の場合、

$S^{\phi, \kappa, new}_{K}$ は全ての $\tilde{T}_{k+1/2, N, \chi}(n^2)$ $((n, N)=1)$ の同時固有関数よりなる直交基底をもつ。その基底の元は non-zero な定数倍をのぞき1意に決まる。それらの基底の元 f はまた $\mho(p^2)$ (p:素数, $p|M$) の固有ベクトルであり、$\lambda_p \in \mathbb{C}$ を

$$\begin{cases} f|\tilde{T}(p^2) = \lambda_p f & (\forall p, (p, N)=1) \\ f|\mho(p^2) = \lambda_p f & (\forall p, p|M) \end{cases}$$

とおくと、conductor M の primitive form $F \in S(2k, M)$ が存在して、$F|T(p) = \lambda_p F$ ($\forall p$ $(p, N)=1$ 又は $p|M$) となる。

更に $S^{\phi, \kappa, new}_{K}$ に対して Strong multiplicity one theorem が成立する。

(II) $\chi \neq 1$ (Neben type) の場合、

この場合も $M_{2+} \neq \prod_{\ell \in \pi} \ell^2$ であれば $\chi=1$ の時と同じ主張が成立する。//

(注) 我々は Fourier 係数に関する ある予想を [U3] で導入する。その予想の下では、$\chi=1$, $\chi \neq 1$ のいかんを問わず一般的な主張をすることができる。しかし $\chi \neq 1$ の時 その予想

はまだ解けていない。 詳しくは [U3] を見てほしい。

1992. 1. 31

参考文献

[K] W. Kohnen, Newforms of half-integral weight, J. reine und angew. Math. 333 (1982) P. 32 - 72.

[MRV] Manickam, Ramakrishnan, and Vasudevan, On the theory of Newforms of half-integral weight, J. of Number theory Vol. 34 (1990) P. 210 - 224.

[N] S. Niwa, On Shimura's trace formula, Nagoya Math. J. 66 (1977) P. 183 - 202.

[U1] M. Ueda, The decomposition of the spaces of cusp forms of half-integral weight and trace formula of Hecke operators, J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988) P. 505 - 555.

[U2] M. Ueda, the trace formulae of twisting operators on the spaces of cusp forms of half-integral weight and some trace relations. Japanese J. of Math., New series Vol. 17-1 (1991).

[U3] M. Ueda, On twisting operators and New-forms of half-integral weight (to appear).

[U4] M. Ueda, Table for modular forms of weight 3/2 (No. 1) (1987) (preprint)

[U5] M. Ueda, 数理研講究録 752, (1991)