数理解析研究所講究録
第 793 巻 1992 年 1-74

制御代数的トポロジー入門

エジンバラ大　A・ラニツキ　(Andrew Ranicki)
城西大　山崎　正之　(Masayuki Yamasaki)

序.

Wall の finiteness obstruction や Whitehead の捩れは代数的 K-理論のトポロジーへの応用の最も代表的なものである. これらは与えられた空間に関する位相的条件を基本群の群環上の加群の代数的性質に反映させる. Connell と Hollingsworth [8], Chapman [6] そして Quinn [15], [16] らによって発展された「制御 K-理論」はより繊細で, 距離空間の上で "parametrize" された加群（幾何加群）を扱う. 各 $\epsilon > 0$ に対し ϵ 制御 K-理論が考えられる；そこではすべての操作が距離空間で計って高々 ϵ の数倍程度に制限を受ける. と言っても, 実は, 自己同型写像の作る制御ホワイトヘッド群のみが直接定義され, 制御射影類群は Bass-Heller-Swan [2] の分裂定理（群環 $\mathbf{Z}[\pi]$ の射影類群 $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi])$ はホワイトヘッド群 $Wh(\pi \times \mathbf{Z})$ の直和因子である）の類似として制御ホワイトヘッド群のある部分群として定義されていたにすぎない.

われわれは [22] において射影に関する制御付き代数を展開して, 制御付き $\widetilde{K}_0$-群を直接定義し, 制御付きの $\widetilde{K}_0$ および Wh-群を種々の完全列を用いて関係付けることが出来た. この代数的方法により, 次の事実のほぼ self-contained な証明ができる.

1. 有限 CW 複体の間の同相写像は単純である. これはいわゆる「ホワイトヘッドの捩れの位相不変性」であり, Chapman [3] により最初に証明された.

2. 任意のコンパクト ANR は有限 CW 複体のホモトピー型を持つ．これは「ボルスク予想」と呼ばれ，West [24] により最初に証明された．

PL 同相写像は単純ホモトピー同値写像である；ホワイトヘッドの捩れのこの「組合せ的不変性」は Milnor [14] により示された．証明は帰納法により，鍵となったのは Higman [12] による計算 $Wh(\{1\}) = 0$ であった．1 に対するわれわれの帰納的な証明の鍵となるのも同様に Bass-Heller-Swan [2] の計算 $Wh(\mathbf{Z}^n) = 0$ である．2 の証明も 1 の証明に密接に関連している．

われわれの証明においては「幾何」的部分を減らし，出来る限り「代数的」に議論を行った．1 および 2 の知られている証明の中で最も代数的であろう．従って，他の応用にも利用しやすい形になっていると思う．なお Ferry-Pedersen の 'squeezing' の技法を用いれば，いわゆる「有界制御」の理論からもこれらの「ϵ 制御」に関する結果が導かれるようだ．

なお [22] が仕上がった後，この方法を制御 L-理論に拡張し，Novikov による有理ポントリャーギン類の位相不変性の同様な直接的証明を予定している．

本稿では [22] の紹介を行う．構成は以下の通りである．§1 でまず Quinn による幾何加群およびそれらの間の幾何射の概念を復習する．§2 では幾何加群を拡張して射影加群の概念を導入する．また鎖複体やそれに関連する諸概念を解説する．§3 では制御射影類群 $\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$ を，制御写像 $p_X : M \longrightarrow X$ の上の n 次元 ϵ 射影鎖複体を用いて定義する．§4 では制御捩れの群 $Wh(X, p_X, n, \epsilon)$ を制御写像 $p_X : M \longrightarrow X$ の上の n 次元 ϵ 可縮な自由鎖複体を用いて定義する．§5 では $\widetilde{K}_0$ と Wh-群が，対 $(X, Y \subseteq X)$ の「安定完全列」により関係付けられる．さらに §6 では切除写像やマイヤー・ビートリス「安定完全列」などが議論される．§7 ではよく知られている単射 $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi]) \to Wh(\pi \times \mathbf{Z})$ (Bass [1]) の制御版の類似を得る．これは

§8 で制御 K-理論不変量に関するビートリス型の性質を得るのに用いられる. 制御 finiteness obstruction や制御捩れは §9 で定義される. 上で述べた 1 および 2 は §10 で示される.

なお原稿中の可換図式には TEXPLORATOR 社の **LAMSTeX** を用いた.

1. 幾何加群.

この節では F. Quinn [17] による幾何加群およびそれらの間の幾何射の概念を解説する. ただし, いくつかの記法は Connolly-Koźniewski [9] のものを用いているし, またいくつかのものは全く新しい.

M を位相空間とし, 集合 $|S|$ 上の写像

$$S : |S| \longrightarrow M; |s| \longrightarrow [s]$$

を考える. 以下においては写像とそのグラフを同一視する. したがって S は写像自身とそのグラフ($|S| \times M$ の部分集合)の両方を表す. 要素 $s \in S \subset |S| \times M$ の第 1 成分を $|s| \in |S|$ で, また第 2 成分を $[s] \in M$ で表す. つまり写像 S は $|s|$ を $[s]$ に移す.

定義. グラフ S の点で生成される自由 $\mathbf{Z}$加群を M 上の幾何加群 といい, $\mathbf{Z}[S]$ と書く. $|S|$ が有限集合であるとき, 幾何加群 $\mathbf{Z}[S]$ は有限生成 (*f.g.*)であるという. M 上の幾何加群の族 $\{\mathbf{Z}[S_\alpha]\}_{\alpha\in A}$ (A は添字集合) の直和 $\bigoplus_{\alpha\in A} \mathbf{Z}[S_\alpha]$ を次のように定義する. まずおのおのの S_α の「コピー」 S'_α を作る:

$$S'_\alpha : |S'_\alpha| = |S_\alpha| \times \{\alpha\} \approx |S_\alpha| \xrightarrow{S_\alpha} M.$$

$|S'_\alpha|$ たちは集合$\left(\bigcup_{\alpha\in A} |S_\alpha|\right) \times A$ の互いに交わらない部分集合である. 非交和 $|S'_\alpha|$ のことを $\bigsqcup_{\alpha\in A} |S'_\alpha|$ と書く. S'_α たちは写像 $\bigsqcup_{\alpha\in A} S'_\alpha : \bigsqcup_{\alpha\in A} |S'_\alpha| \to M$ を定め

る．さて直和 $\bigoplus_{\alpha\in A}\mathbf{Z}[S_\alpha]$ を$\mathbf{Z}[\bigsqcup_{\alpha\in A}S'_\alpha]$ で定める．ただし本稿においてはあたかも $|S_\alpha|$ は互いに交わらないかのように扱い，コピー S'_α のことには触れずに，$\bigoplus_{\alpha\in A}\mathbf{Z}[S_\alpha]=\mathbf{Z}[\bigsqcup_{\alpha\in A}S_\alpha]$ と書く事にする．

例. (1) $|S|$ が空集合のとき，$\mathbf{Z}[S]$ を 0 と書く．

(2) M を CW 複体とし整数 $n\geq 0$ を固定する．M の n胞体全体の集合を $|S|$ とおき，各n胞体 $e\in|S|$ に対し，$\varphi_e:D^n\to M$ をその特性写像とする．対応 $S:|S|\to M;e\mapsto\varphi_e(O)$ が M 上の幾何加群 $\mathbf{Z}[S]$ を定める．ここで O は n球体 D^n の中心とする．単なる可換群とおもえばこれは M の通常の $\mathbf{Z}$係数胞体的n鎖群である．

$\pi:\widetilde{M}\to M$ を被覆写像としよう．M 上の幾何加群 $\mathbf{Z}[S]$ が与えられたとき，その「引き戻し」$\mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ を通常の引き戻し$\widetilde{S}:|\widetilde{S}|=S^*\widetilde{M}(\subset|S|\times\widetilde{M})\to\widetilde{M};(|s|,\tilde{m})\mapsto\tilde{m}$ によって定める．これは $\widetilde{M}$ 上の幾何加群である．π は正則被覆であると仮定しよう．π の被覆変換群 Π は $|\widetilde{S}|$ に自由に作用し，$\mathbf{Z}[\Pi]$加群として$\mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ は各軌道からの代表元たちによって自由に生成される．この自由 $\mathbf{Z}[\Pi]$加群 $\mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ のことを $\mathbf{Z}[S]$ のアセンブリとよぶ．特に M が普遍被覆を持つときは，それに関するアセンブリとして自由$\mathbf{Z}[\pi_1M]$加群 $\mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ を構成できる．一方，任意の自由 $\mathbf{Z}[\pi_1M]$加群は M 上のある幾何加群の普遍被覆に関するアセンブリと同型である．つまり M 上の幾何加群とは基底付き自由$\mathbf{Z}[\pi_1M]$加群を幾何学的に実現したものだと思って良い．

定義. $\mathbf{Z}[S]$ および $\mathbf{Z}[T]$ を M 上の幾何加群とする．S の要素 s, T の要素 t および $[s]$ から $[t]$ への M 上の道$\rho:[0,\tau]\to M$ ($\tau\geq 0$, $\rho(0)=[s]$, $\rho(\tau)=[t]$) の組(s,ρ,t) を考える．そのような組を s から t への道という．幾何射 $f:\mathbf{Z}[S]\to\mathbf{Z}[T]$ とは次の

ような $\mathbf{Z}[S]$ の生成元から $\mathbf{Z}[T]$ の生成元への道の形式的線形和のことをいう：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda : [0,\tau_\lambda] \to M, t_\lambda).$$

ここに Λ はある添字集合であり，各生成元からでる道の数は有限個であることを要求する．$\mathbf{Z}[S]$ から $\mathbf{Z}[T]$ への二つの幾何射$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda)$ ，$f' = \sum_{\gamma\in\Gamma} m'_\gamma(s'_\gamma, \rho'_\gamma, t'_\gamma)$ が等しい $(f = f')$ とは，係数が零の項を取り除いた後に，全単射 $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ で次をみたすものが存在することをいう．

$$m'_{\varphi(\lambda)} = m_\lambda \quad \text{かつ} \quad (s'_{\varphi(\lambda)}, \rho'_{\varphi(\lambda)}, t'_{\varphi(\lambda)}) = (s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) \quad (\text{すべての } \lambda \in \Lambda).$$

二つの幾何射の和は二つの形式和を形式的にあわせることにより定める．幾何射の整数倍は各項を整数倍して定める．f と g の差 $f-g$ は $f+(-1)g$ で定める．二つの連続する幾何射

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T], \quad g = \sum_{\gamma\in\Gamma} n_\gamma(t'_\gamma, \sigma_\gamma, u_\gamma) : \mathbf{Z}[T] \longrightarrow \mathbf{Z}[U]$$

の合成は

$$\sum_{\lambda\in\Lambda, \gamma\in\Gamma, t_\lambda = t'_\gamma} n_\gamma m_\lambda(s_\lambda, \sigma_\gamma\rho_\lambda, u_\gamma),$$

で定める．ただし連続した二つの道 $\rho_\lambda : [0,\tau_\lambda] \to M$, $\sigma_\gamma : [0,\tau'_\gamma] \to M$ ($\rho_\lambda(\tau_\lambda) = \sigma_\gamma(0)$) の合成 $\sigma_\gamma\rho_\lambda : [0, \tau_\lambda + \tau'_\gamma] \to M$ は

$$\sigma_\gamma\rho_\lambda(x) = \begin{cases} \rho_\lambda(x) & (0 \le x \le \tau_\lambda), \\ \sigma_\gamma(x-\tau_\lambda) & (\tau_\lambda \le x \le \tau_\lambda + \tau'_\gamma), \end{cases}$$

で定める．幾何射$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T]$ の中の道の始点と終点のみに注目すれば$\mathbf{Z}$加群準同型写像：

$$|f| : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T]\ ;\ s \longmapsto \sum_{s_\lambda = s} m_\lambda t_\lambda.$$

を得る. M 上の幾何加群たちの間の幾何射の族 $\{f_\alpha : \mathbf{Z}[S_\alpha] \to \mathbf{Z}[T_\alpha]\}_{\alpha\in A}$ の直和は

$$\bigoplus_{\alpha\in A} f_\alpha = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in A}\mathbf{Z}[S_\alpha] \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A}\mathbf{Z}[T_\alpha]$$

で定める. ただし, $f_\alpha : \mathbf{Z}[S_\alpha] \to \mathbf{Z}[T_\alpha]$ は包含関係$S_\alpha \subset \bigsqcup_{\alpha\in A} S_\alpha$, $T_\alpha \subset \bigsqcup_{\alpha\in A} T_\alpha$ により $\mathbf{Z}[\bigsqcup S_\alpha]$ から $\mathbf{Z}[\bigsqcup T_\alpha]$ の幾何射とみなす.

例. (1) 項のない空の幾何射を 0 と記す. $|0|$ は普通の意味での零準同型写像である.
(2) $\mathbf{Z}[S]$ を M 上の幾何加群とし, $s \in S$ から s 自身への「一点の道」$c_s : \{0\} \to M$ を $c_s(0) = [s]$ で定める.

このとき

$$\sum_{s\in S} 1(s, c_s, s) : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[S]$$

で定まる幾何射を $\mathbf{Z}[S]$ 上の **恒等幾何射** といい, $1_{\mathbf{Z}[S]}$ または単に 1 と記す. 任意の幾何射 $f : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T]$ に対し, 等式$f1_{\mathbf{Z}[S]} = f = 1_{\mathbf{Z}[T]}f$ が成立する. $|1_{\mathbf{Z}[S]}|$ は通常の意味での $\mathbf{Z}[S]$ 上の恒等写像である.

直和の間の幾何射を表すのに行列がしばしば用いられる. 幾何射

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) : \bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{Z}[S_j] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m}\mathbf{Z}[T_i]$$

が与えられたとき, 幾何射 $f_{ij} : \mathbf{Z}[S_j] \to \mathbf{Z}[T_i]$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ を

$$f_{ij} = \sum_{\lambda\in\Lambda,\, s_\lambda\in S_j,\, t_\lambda\in T_i} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda)$$

で定める. f は f_{ij} たちにより完全に決定される ; 実際 f は和$\sum_{i,j} f_{ij}$ に等しい. ただし, f_{ij} を包含関係$S_j \subset \bigsqcup_{1\le j\le n} S_j$, $T_i \subset \bigsqcup_{1\le i\le m} T_i$ により, $\mathbf{Z}[\bigsqcup S_j]$ から $\mathbf{Z}[\bigsqcup T_i]$ の幾何射とみなしている. $m \times n$ 行列 $(f_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ により f を表す. 例えば, 直和 $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[S_i] \to \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[S_i]$ は $f_1, \ldots, f_n$ を対角成分とする対角行列でかける.

さて M は道連結で, $\mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ および $\mathbf{Z}[\widetilde{T}]$ はそれぞれ正則被覆 $\pi:\widetilde{M}\to M$ に関する$\mathbf{Z}[S]$ および $\mathbf{Z}[T]$ のアセンブリであるとし, π の被覆変換群を Π とする. 道 (s,ρ,t) は要素 $\tilde{s}\in\widetilde{S}$ から要素 $\tilde{t}\in\widetilde{T}$ への道$(\tilde{s},\tilde{\rho},\tilde{t})$ に持ち上がる. Π の作用だけの持ち上がり方がある. 従って, 幾何射$f=\sum_\lambda m_\lambda(s_\lambda,\rho_\lambda,t_\lambda):\mathbf{Z}[S]\to\mathbf{Z}[T]$ はアセンブリの間の幾何射:

$$\tilde{f}=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{g\in\Pi}m_\lambda(g\tilde{s}_\lambda,g\tilde{\rho}_\lambda,g\tilde{t}_\lambda):\mathbf{Z}[\widetilde{S}]\longrightarrow\mathbf{Z}[\widetilde{T}]$$

を誘導する. $\mathbf{Z}$加群準同型写像 $|\tilde{f}|$ は構成の仕方から $\mathbf{Z}[\Pi]$加群準同型写像になっている. これを f のアセンブリと呼ぶ. 被覆 $\pi:\widetilde{M}\to M$ を固定するとき, アセンブリはM 上の（有限生成）幾何加群と幾何射のつくるカテゴリーから（有限生成）自由 $\mathbf{Z}[\Pi]$加群と準同型写像のつくるカテゴリーへの関手となる.

$\mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ から $\mathbf{Z}[\widetilde{T}]$ への任意の$\mathbf{Z}[\Pi]$加群準同型写像は $\mathbf{Z}[S]$ から $\mathbf{Z}[T]$ へのある幾何射のアセンブリとして実現することができる. さて (s,ρ,t) を幾何射 f の中の道とする. 道 ρ を両端を固定したまま（道の定義区間を連続的に変えながら）M の中のホモトピーで変形して, 道 (s,ρ',t) を得たとする. このようなホモトピーは $\widetilde{M}$ における両端を固定した道のホモトピーに持ち上がるので, f の中の道 (s,ρ,t) を (s,ρ',t) に取り替えても, 誘導するアセンブリは変わらない. 従って次のような定義をすると都合がよい. 道 (s,ρ,t) のホモトピーとは道 ρ の両端を固定し, 定義区間を連続的に変えるホモトピーのこととする. 端点 s および t は変えない. 幾何射のホモトピーとは次のふたつの操作の有限回の列のことをいう:

1. 道のホモトピー,
2. 同類項 $m(s,\rho,t)$, $n(s,\rho,t)$ をまとめて $(m+n)(s,\rho,t)$ にする操作, およびその逆操作.

例えば, 道 (s,ρ,t) が (s,ρ',t) にホモトピックならば, 幾何射 $(s,\rho,t)-(s,\rho',t)$ は零

幾何射にホモトピックである：

$$(s,\rho,t)-(s,\rho',t) \overset{\text{操作1}}{\sim} (s,\rho,t)-(s,\rho,t) \overset{\text{操作2}}{\sim} 0(s,\rho,t) \;=\; 0.$$

互いにホモトピックな幾何射のアセンブリは等しい.

$\varphi : M \to N$ を連続写像とする. M 上の幾何加群 $A = \mathbf{Z}[S]$ に対し, その順像 $\varphi_\sharp A$ を, N 上の幾何加群 $\mathbf{Z}[\varphi S : |S| \to M \to N]$ で定める. S（グラフ）の元 $s = (|s|, [s])$ に対し, φS（グラフ）の元 $(|s|, \varphi[s])$ を φs と記す. $f = \sum m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) : A \to B$ が M 上の幾何加群 A, B の間の幾何射であるとき, 幾何射

$$\sum m_\lambda(\varphi s_\lambda, \varphi\rho_\lambda : [0,\tau_\lambda] \xrightarrow{\rho_\lambda} M \xrightarrow{\varphi} N, \varphi t_\lambda)$$

を $\varphi_\sharp f : \varphi_\sharp A \to \varphi_\sharp B$ と記す. もし $f \sim g$ ならば $\varphi_\sharp f \sim \varphi_\sharp g$ である.

2. 鎖複体.

この節では幾何加群のカテゴリー（より正確には幾何加群と幾何射のホモトピー類のつくるカテゴリー）における「鎖複体」を導入する.

定義. M 上の幾何加群の間の幾何射の列：

$$\{C, d\} : \ldots \to C_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} C_r \xrightarrow{d_r} C_{r-1} \to \ldots$$

が $d_r d_{r+1} \sim 0$ をみたすとき, M 上の鎖複体という.

この定義において等式のかわりにホモトピー $d^2 \sim 0$ が使われていることに注意してほしい. これは, CW複体からつくられる鎖複体がホモトピー $d^2 \sim 0$ しか満たさないためである. 詳しいことは [16] を参照してほしい. われわれはさらに一般の「射影加群の鎖複体」を必要とする. まず「射影加群」を導入しよう.

定義. M 上の幾何加群 A から自分自身への幾何射 $p: A \to A$ が$p^2 \sim p$ をみたすとき, p は射影であるという. M 上の幾何加群 A と射影 $p: A \to A$ の対 (A,p) を M 上の射影加群という. (A,p) が有限生成 (f.g.)とは A が有限生成であることをいう. 二つの射影加群の間の射 $f:(A,p) \to (B,q)$ とは幾何射 $f: A \to B$ で $qf \sim f$ および $fp \sim f$ をみたすもののことをいう. 射影加群 (A_i,p_i) の直和 $\bigoplus_i(A_i,p_i)$ は $(\bigoplus_i A_i, \bigoplus_i p_i)$ で定める.

もし (A,p) が M 上の射影加群であるならば, 幾何射 $p: A \to A$ は (A,p) から自分自身への射となる. この射 p は (up to homotopy での)「恒等」射である. M 上の射影加群と射のホモトピー類はカテゴリーをつくる. 射 $f:(A,p) \to (B,q)$ が同型射であるとは, 射 $g:(B,q) \to (A,p)$ で $gf \sim p$, $fg \sim q$ をみたすものが存在することをいう ; このときg を f の逆射という.

$(A,1)$ という形の射影加群は幾何加群 A と同一視され, 自由加群と呼ばれる. 自由加群 $(A,1)$, $(B,1)$ の間の射の全体と A, B の間の幾何射の全体は一致する.

定義. M 上の射影加群の間の射の列

$$\{(C,p),d\}: \ldots \to (C_{r+1},p_{r+1}) \xrightarrow{d_{r+1}} (C_r,p_r) \xrightarrow{d_r} (C_{r-1},p_{r-1}) \to \ldots$$

は, $d_r d_{r+1} \sim 0$ をみたすとき, M 上の射影鎖複体とよばれる. 本稿においてはしばしば「境界射」d を省略して, 単に (C,p) と書くことも多い. 射影鎖複体 (C,p) が n 次元であるとは $C_r = 0$ $(r < 0 \quad r > n)$ が成り立っていることをいう. すべての p_r が 1 であるとき, 自由鎖複体とよび, 上で導入した幾何加群の鎖複体

$$C: \ldots \to C_{r+1} \to C_r \to C_{r-1} \to \ldots$$

と同一視する. 二つの射影鎖複体 (C,p), (D,q) の直和は次のように定める :

$$(C,p) \oplus (D,q): \cdots \to (C_r,p_r) \oplus (D_r,q_r) \xrightarrow{d_C \oplus d_D} (C_{r-1},p_{r-1}) \oplus (D_{r-1},q_{r-1}) \to \cdots.$$

射影鎖複体 (C, p) が 有限生成 (f.g.) とは各 (C_r, p_r) が有限生成であることをいう.

さらに鎖複体に関する各種の概念が, 通常の場合と全く同様にして定められる:

定義. (1) 射影鎖複体の間の鎖写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ とは射 $f_r:(C_r,p_r)\to(D_r,q_r)$ たちの列 $f=\{f_r\}$ で$d_rf_r\sim f_{r-1}d_r$ をみたすもののことをいう.

(2) 鎖写像 $f,g:(C,p)\to(D,q)$ の間の鎖ホモトピー $h:f\simeq g$ とは $d_{r+1}h_r+h_{r-1}d_r\sim g_r-f_r$ をみたす射 $h_r:(C_r,p_r)\to(D_{r+1},q_{r+1})$ の列 $h=\{h_r\}$ のことをいう.

(3) 鎖写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ が 鎖同値写像であるとは, $gf\simeq p$ および $fg\simeq q$ をみたす鎖写像 $g:(D,q)\to(C,p)$ (鎖ホモトピー逆) が存在することをいう.

(4) 二つの射影鎖複体 (C,p) , (D,q) が鎖同値である ($(C,p)\simeq(D,q)$) とは, それらの間に鎖同値写像が存在することをいう.

(5) 射影鎖複体 (C,p) が 可縮であるとは, 零鎖複体と鎖同値のことをいう. このとき, その鎖ホモトピー $h:0\simeq p:(C,p)\to(C,p)$ を鎖縮射とよぶ.

(6) 鎖写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ が 同型写像($f:(C,p)\cong(D,q)$) とは, $gf\sim p$, $fg\sim q$ をみたす鎖写像 $g:(D,q)\to(C,p)$(逆写像) が存在することをいう. このとき各 f_r は射影加群の間の同型射を与える.

(7) 鎖写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ の写像錐 $\mathcal{C}(f)$ とは

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}(f)} = \begin{pmatrix} d_D & (-)^{r-1}f \\ 0 & d_C \end{pmatrix} : \mathcal{C}(f)_r &= (D_r,q_r)\oplus(C_{r-1},p_{r-1}) \\ \longrightarrow \mathcal{C}(f)_{r-1} &= (D_{r-1},q_{r-1})\oplus(C_{r-2},p_{r-2}) \end{aligned}$$

で定められる射影鎖複体のことをいう. (鎖写像 f が鎖同値写像であるためには, $\mathcal{C}(f)$ が可縮であることが必要十分である. 2.4 を参照のこと.)

いよいよ「幾何的制御」の概念を導入する. 距離空間 X への連続写像 $p_X: M\to X$ を制御写像とよぶ. M が特定な制御写像 p_X を与えられているとき, X 上の

幾何加群 $\mathbf{Z}[S]$ は p_X 上の幾何加群であるという. W は X の部分集合とする. $\epsilon \geq 0$ に対し, X における W の閉ϵ近傍を W^ϵ と書く. 明らかに $(W^\epsilon)^\delta \subset W^{\epsilon+\delta}$ が成り立つ. さらに, $\epsilon > 0$ に対して $W^{-\epsilon}$ は集合$\{x \in W | d(x, X-W) \geq \epsilon\} \subset W$ を表すものとする.

制御写像 p_X が与えられたとき, 幾何射やそのホモトピーの「半径」を次のように定める. 幾何射 f の中で非零係数を持つ任意の道 $(s, \rho : [0,\tau], t)$ に対し, その M における像が$p_X^{-1}(\{p_X\rho(0)\}^\epsilon \cap \{p_X\rho(t_\rho)\}^\epsilon)$ に含まれるとき, f は半径 ϵ を持つという. 半径 ϵ の幾何射たち f, g の間ののホモトピーに対し,

1. 操作 1 において, 各道 (s, ρ, t) のホモトピーの像が$p_X^{-1}(\{p_X\rho(0)\}^\epsilon \cap \{p_X\rho(t_\rho)\}^\epsilon)$ に含まれ,
2. 操作 2 において, 同類項をまとめる（または同類項にわける）道 (s, ρ, t) の像が$p_X^{-1}(\{p_X\rho(0)\}^\epsilon \cap \{p_X\rho(t_\rho)\}^\epsilon)$ に含まれるとき, そのホモトピーは半径 ϵ を持つといい, $f \sim_\epsilon g$ とかく.

命題 2.1.

(1) $f \sim_\epsilon f'$ かつ $f' \sim_\delta f''$ ならば$f \sim_{\max\{\epsilon,\delta\}} f''$ である.

(2) $f \sim_\epsilon f'$ かつ $g \sim_\delta g'$ ならば任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対し$mf + ng \sim_{\max\{\epsilon,\delta\}} mf' + ng'$ である.

(3) 幾何射 f が半径 δ を持ち, 幾何射 g が半径 ϵ を持つならば, その合成 g は半径 $\delta + \epsilon$ を持つ.

(4) $f \sim_\epsilon f'$ かつ $g \sim_\delta g'$ ならば$gf \sim_{\epsilon+\delta} g'f'$ である.

証明: 定義より明らか. $\square$

$p_X : M \to X$ を M の制御写像とする. 次の定義では幾何加群はすべて p_X 上にあるとする.

定義. 射影 $p:A\to A$ が $p^2\sim_\epsilon p$ をみたすとき, p は ϵ 射影であるという. p が ϵ 射影であるとき, 射影加群 (A,p) は ϵ 射影加群であるという. 射 $f:(A,p)\to(B,q)$ が ϵ射であるとは, f が半径 ϵ を持ち, さらに $qf\sim_\epsilon f$, $fp\sim_\epsilon f$ をみたすことをいう. ϵ 射 $f:(A,p)\to(B,q)$ が ϵ 同型射であるとは, $gf\sim_{2\epsilon}p$, $fg\sim_{2\epsilon}q$ をみたすϵ 射 $g:(B,q)\to(A,p)$ が存在することをいう.

上の ϵ 射や ϵ 同型射の定義は, 定義域・値域の射影加群の半径に無関係であることに注意せよ. また, 上の定義で用いられる ϵ の係数は不統一であるように見える. 実際この定義には恣意性がある. このような係数が選ばれたわけを簡単に説明する. まず第一に, $p:A\to A$ が ϵ 射影であれば $p:(A,p)\to(A,p)$ は ϵ 射であることが望ましい. 次に, 半径は射や同型射の合成に関し良い振る舞いをしてほしい. (下の命題を見よ.) ϵ 射影の定義における要求を例えば $p^2\sim_{2\epsilon}p$ に変えると, 上の条件を満足させるためにはϵ 同型射の定義において$gf\sim_{3\epsilon}p$, $fg\sim_{3\epsilon}q$ を要求せざるを得なくなる. これはあまり望ましい定義とは思われない. ともかく, いろいろ考えられる定義の中で最も使いやすいと思われるものを選んだつもりである. あまり重要なことではないので, これで認めてほしい.

命題 2.2. δ 射 (resp. 同型射) $f:(A,p)\to(B,q)$ と ϵ 射(resp. 同型射) $g:(B,q)\to(C,r)$ の合成 $gf:(A,p)\to(C,r)$ は $\delta+\epsilon$ 射 (resp. 同型射)である.

証明 : 明らかに gf は半径 $\delta+\epsilon$ を持つ. また,

$$r(gf)=(rg)f\sim_{\delta+\epsilon}gf,\qquad (gf)p=g(fp)\sim_{\delta+\epsilon}gf.$$

であるから gf は $\delta+\epsilon$ 射である. さらに f が δ 同型射で f^{-1} がその逆, また g が ϵ 同型射で g^{-1} がその逆とすると,

$$(f^{-1}g^{-1})(gf)\sim_{2\delta+2\epsilon}f^{-1}qf\sim_{2\delta}f^{-1}f\sim_{2\delta}p\ ,$$

また同様に $(gf)(f^{-1}g^{-1}) \sim_{2\delta+2\epsilon} r$ となり, gf が $\delta+\epsilon$ 同型射であることがわかる.

□

定義. M 上の射影鎖複体 (C,p) が次の 3 条件をみたすとき, p_X 上の ϵ 射影鎖複体であるという:

1. 各 (C_r, p_r) は ϵ 射影加群,
2. 各 $d_r : (C_r, p_r) \to (C_{r-1}, p_{r-1})$ は ϵ 射,
3. 各 r に対し $d_r d_{r+1} \sim_{2\epsilon} 0$.

自由な ϵ 射影鎖複体は自由 ϵ 鎖複体とよぶ.

定義. (1) A 鎖写像 $f : (C,p) \to (D,q)$ が ϵ 鎖写像であるとは, 各 $f_r : (C_r, p_r) \to (D_r, q_r)$ が ϵ 射であり, さらに $d_r f_r \sim_\epsilon f_{r-1} d_r$ が成り立つことをいう.

(2) 鎖写像 $f, g : (C,p) \to (D,q)$ の間の鎖ホモトピー $h : f \simeq g$ がϵ 鎖ホモトピーである ($h : f \simeq_\epsilon g$) とは, 各 h_r が ϵ 射であり, さらに $d_{r+1}h_r + h_{r-1}d_r \sim_{2\epsilon} g_r - f_r$ が成り立つことをいう.

(3) 鎖写像 $f : (C,p) \to (D,q)$ が ϵ 鎖同値写像 であるとは, $gf \simeq_\epsilon p$, $fg \simeq_\epsilon q$ をみたすϵ 鎖写像 $g : (D,q) \to (C,p)$ (ϵ 鎖ホモトピー逆) が存在することをいう.

(4) 二つの射影鎖複体 (C,p) , (D,q) が ϵ 鎖同値である ($(C,p) \simeq_\epsilon (D,q)$) とは, それらの間に ϵ 鎖同値写像が存在することをいう.

(5) 射影鎖複体 (C,p) が ϵ 可縮であるとは, それが零鎖複体に ϵ 鎖同値であることをいう. このとき, ϵ 鎖ホモトピー $h : 0 \simeq_\epsilon p : (C,p) \to (C,p)$ をϵ 鎖縮射という.

(6) ϵ 鎖写像 $f : (C,p) \to (D,q)$ が ϵ 同型写像である ($(C,p) \cong_\epsilon (D,q)$) とは, $gf \sim_{2\epsilon} p$ および $fg \sim_{2\epsilon} q$ をみたすϵ 鎖写像 $g : (D,q) \to (C,p)$(ϵ 逆写像とよばれる) が存在することをいう. このとき各 f_r は射影加群の間の ϵ 同型射を与える.

上の定義において, 半径に関する条件が隠されていることに注意せよ. 例え

ば (1) では df, fd ともに半径 ϵ を持たねばならないし, (2) では dh, hd, g, f は半径 2ϵ を持たねばならない. また, 射影鎖複体の間の ϵ 同型写像は必ず ϵ 鎖同値写像になっていることにも注意せよ. 次元 0 の射影鎖複体においてはその逆も成り立つ. ϵ 射影鎖複体 (C,p) の「恒等」鎖写像 $p=\{p_r\}$ はϵ 同型写像になっている.

命題 2.3. (1) ϵ 鎖写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ とϵ' 鎖写像$f':(D,q)\to(E,r)$ の合成 $f'f$ は $\epsilon+\epsilon'$ 鎖写像である.

(2) ϵ 同型写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ と ϵ' 同型写像$f':(D,q)\to(E,r)$ の合成 $f'f$ は $\epsilon+\epsilon'$ 同型写像である.

(3) ϵ 鎖同値写像 $f:(C,p)\to(D,q)$ と ϵ' 鎖同値写像 $f':(D,q)\to(E,r)$ の合成 $f'f$ は $\epsilon+\epsilon'$ 鎖同値写像である.

証明: (1) と (2) は明らか. (3)を証明しよう: ϵ 鎖ホモトピー $h:gf\simeq p$, $k:fg\simeq q$ およびϵ' 鎖ホモトピー $h':g'f'\simeq q$, $k':f'g'\simeq r$ が存在するようなf , f' の鎖ホモトピー逆 g , g' をとる. すると

$$d(f'kg'+k')+(f'kg'+k')d\sim_{\epsilon+2\epsilon'}f'(dk+kd)g'+(r-f'g')$$

$$\sim_{2\epsilon+2\epsilon'}f'(q-fg)g'+(r-f'g')\sim_{2\epsilon+2\epsilon'}f'g'-f'fgg'+r-f'g'$$

$$\sim_{2\epsilon+2\epsilon'}r-(f'f)(gg')\ ,$$

であり, また同様にして

$$d(h+gh'f)+(h+gh'f)d\sim_{2\epsilon+2\epsilon'}p-(gg')(f'f)$$

が成り立つ. □

命題 2.4. $f:(C,p)\to(D,q)$ を ϵ 鎖写像とする. 写像錐 $\mathcal{C}(f)$ が ϵ 可縮ならば, f は 2ϵ 鎖同値写像である. f が ϵ 鎖同値写像ならば, $\mathcal{C}(f)$ は 3ϵ 可縮である.

証明: ϵ 鎖縮射, $\Gamma : 0 \simeq_\epsilon q \oplus p : \mathcal{C}(f) \to \mathcal{C}(f)$ が与えられたとき, ϵ 射 g, h, k を次式で定める:

$$\Gamma \;=\; \begin{pmatrix} k & ? \\ (-)^r g & h \end{pmatrix} \;:\; \mathcal{C}(f)_r \;=\; (D_r, q_r) \oplus (C_{r-1}, p_{r-1})$$
$$\longrightarrow \mathcal{C}(f)_{r+1} \;=\; (D_{r+1}, q_{r+1}) \oplus (C_r, p_r)\ .$$

すると $g : (D,q) \to (C,p)$ f の鎖ホモトピー逆である. ϵ 鎖ホモトピーは $h : gf \simeq_\epsilon p : (C,p) \to (C,p)$, $k : fg \simeq_\epsilon q : (D,q) \to (D,q)$ により与えられる. g の半径は ϵであるが, 残念ながら $dg \sim_{2\epsilon} gd$ しか得られず, g は 2ϵ 鎖写像なので f は 2ϵ 鎖同値写像でしかない.

次に f が ϵ 鎖同値写像, $g : (D,q) \to (C,p)$ がその ϵ 鎖ホモトピー逆, そして

$$h \;:\; gf \;\simeq_\epsilon\; p \;:\; (C,p) \longrightarrow (C,p)$$

$$k \;:\; fg \;\simeq_\epsilon\; q \;:\; (D,q) \longrightarrow (D,q)$$

が ϵ 鎖ホモトピーであるとする. $\mathcal{C}(f)$ の 3ϵ 鎖縮射は次式で与えられる:

$$\Gamma \;=\; \begin{pmatrix} k + (fh - kf)g & (-)^r (fh - kf)h \\ (-)^r g & h \end{pmatrix} \;:$$

$$\mathcal{C}(f)_r \;=\; (D_r, q_r) \oplus (C_{r-1}, p_{r-1}) \longrightarrow \mathcal{C}(f)_{r+1} \;=\; (D_{r+1}, q_{r+1}) \oplus (C_r, p_r)\ .$$

□

3. 射影類.

まず制御のない場合の射影類および finiteness obstruction について復習した後, 制御のある場合にアナロジーを展開しよう.

環 A と整数 $n \geq 0$ が与えられたとき, n次元有限生成射影A加群鎖複体の Grothendieck群の, 有限生成自由A加群鎖複体のつくる部分群による商を$\widetilde{K}_0(A,n)$と書く. $n = 0$ のときは有限生成射影A加群のGrothendieck群の有限生成自由 A加群のつくる部分群による商として定義されるA の通常の射影類群と同じである:

$$\widetilde{K}_0(A,0) \;=\; \widetilde{K}_0(A)\ .$$

n次元有限生成射影A加群鎖複体 P の射影類

$$[P] \;=\; \sum_{r=0}^{n}(-)^r[P_r] \in \widetilde{K}_0(A)$$

は鎖ホモトピー不変であり, $[P]=0$ が P が有限な有限生成自由A加群 鎖複体に鎖同値であるための必要十分条件である. 射影類により同型写像が定まる:

$$\widetilde{K}_0(A,n) \longrightarrow \widetilde{K}_0(A)\;;\;[P] \longrightarrow [P]\,.$$

finitely dominated な空間 M の普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ の特異鎖複体は有限な有限生成射影$\mathbf{Z}[\pi_1(M)]$加群鎖複体 $C(\widetilde{M})$ に鎖同値である. 射影類

$$[M] \;=\; [C(\widetilde{M})] \in \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)])$$

が Wall [23] の finiteness obstruction である ; $[M]=0$ であることと M が有限な CW 複体にホモトピー同値であることは互いに必要十分である.

大切なおしらせ. この節の鎖複体はすべて有限生成とする.

定義. p_X 上の二つの射影鎖複体 (C,p) , (C',p') に対し, $(C,p)\oplus(E,1)$ と $(C',p')\oplus(E',1)$ が ϵ 鎖同値となるような p_X 上の n次元自由 ϵ 鎖複体 $(E,1)$, $(E',1)$ が存在するとき, (C,p) と (C',p') は n安定 ϵ 鎖同値 であるという.

$\epsilon>0$ を固定するとき, n安定 ϵ 鎖同値は同値関係ではない. (C,p), (C',p') が n安定 ϵ 鎖同値 で (C',p'), (C'',p'') がやはり n安定 ϵ 鎖同値ならば, (C,p) と (C'',p'') は n安定 2ϵ 鎖同値でしかない.

定義. p_X 上の n次元 ϵ 射影鎖複体全体に, n安定 ϵ 鎖同値で生成される同値関係を入れて得られる同値類 $[C,p]$ 全体の集合を $\widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)$ と書く. $\widetilde{K}_0(X,p_X,0,\epsilon)$ は 0 を省略して$\widetilde{K}_0(X,p_X,\epsilon)$ と書く.

命題 3.1. 直和により $\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$ は可換群の構造を持つ. さらに, もし $[C, p] = [C', p'] \in \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$ ならば, p_X 上のある n次元自由 ϵ 鎖複体 $(E, 1)$, $(F, 1)$ に対して3ϵ 鎖同値写像

$$(C, p) \oplus (E, 1) \to (C', p') \oplus (F, 1)$$

が存在する. つまり, (C, p) と (C', p') は n安定 3ϵ 鎖同値である.

証明: 逆元の存在を証明する. まず, (A, p) が ϵ 射影加群であるならば, $(A, 1-p)$ もやはり ϵ 射影加群であって, 直和 $(A, p) \oplus (A, 1-p)$ は $(A, 1)$ に ϵ 同型である; 射 $(p, 1-p) : (A, p) \oplus (A, 1-p) \to (A, 1)$ が ϵ 同型射を, そして${}^t(p, 1-p) : (A, 1) \to (A, p) \oplus (A, 1-p)$ がその ϵ 逆射を与える. さて $\{(C, p), d_C\}$ が n次元 ϵ 射影鎖複体であるとする. n次元 ϵ 射影鎖複体:

$$\{(C, 1-p), 0\} : \ldots \to 0 \to (C_n, 1-p_n) \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{0} (C_0, 1-p_0) \to 0$$

との直和 $\{(C, p), d_C\} \oplus \{(C, 1-p), 0\}$ は自由 ϵ 鎖複体:

$$\{(C, 1), d_C\} : \ldots \to 0 \to (C_n, 1) \xrightarrow{d_C} \ldots \xrightarrow{d_C} (C_0, 1) \to 0$$

と ϵ 同型である. 従って $[(C, 1-p), 0]$ が $[(C, p), d_C]$ の逆元を与える.

次に $[(C, p), d] = [(C', p'), d']$ と仮定しよう. ここで Chapman [6, (3.5)] の逆元キャンセルのトリックを用いる. (Chapman は制御ホワイトヘッド群に関する同様な命題の証明にこの方法を用いた.) 定義により, n次元 ϵ 射影鎖複体の列 $\{(C, p), d\} = \{(C^{(1)}, p^{(1)}), d\}, \ldots, \{(C^{(m)}, p^{(m)}), d\} = \{(C', p'), d'\}$ とp_X 上の n次元自由 ϵ 鎖複体の列$\{(E^{(k)}, 1), d\}$, $\{(F^{(k)}, 1), d\}$ で

$$\{(C^{(k)}, p^{(k)}), d\} \oplus \{(E^{(k)}, 1), d\} \simeq_\epsilon \{(C^{(k+1)}, p^{(k+1)}), d\} \oplus \{(F^{(k)}, 1), d\}$$

をみたすものが存在する. 次の合成が求める 3ϵ 鎖同値写像を与える:

$$
\begin{aligned}
&\{(C,p),d\} \oplus \sum_{k=1}^{m-1}\{(E^{(k)},1),d\} \oplus \sum_{k=1}^{m}\{(C^{(k)},1),d\} \\
&\cong_\epsilon \{(C,p),d\} \oplus \sum_{k=1}^{m-1}\{(E^{(k)},1),d\} \oplus \sum_{k=1}^{m}\Big(\{(C^{(k)},1-p^{(k)}),0\} \oplus \{(C^{(k)},p^{(k)}),d\}\Big) \\
&= \{(C,p),d\} \oplus \{(C^{(1)},1-p^{(1)}),0\} \oplus \sum_{k=1}^{m-1}\Big(\{(C^{(k)},p^{(k)}),d\} \oplus \{(E^{(k)},1),d\}\Big) \\
&\qquad\qquad \oplus \sum_{k=2}^{m}\{(C^{(k)},1-p^{(k)}),0\} \oplus \{(C^{(m)},p^{(m)}),d\} \\
&\simeq_\epsilon \{(C,p),d\} \oplus \{(C^{(1)},1-p^{(1)}),0\} \oplus \sum_{k=1}^{m-1}\Big(\{(C^{(k+1)},p^{(k+1)}),d\} \oplus \{(F^{(k)},1),d\}\Big) \\
&\qquad\qquad \oplus \sum_{k=2}^{m}\{(C^{(k)},1-p^{(k)}),0\} \oplus \{(C',p'),d'\} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\Big(\{(C^{(k)},p^{(k)}),d\} \oplus \{(C^{(k)},1-p^{(k)}),0\}\Big) \oplus \sum_{k=1}^{m-1}\{(F^{(k)},1),d\} \oplus \{(C',p'),d'\} \\
&\cong_\epsilon \{(C',p'),d'\} \oplus \sum_{k=1}^{m}\{(C^{(k)},1),d\} \oplus \sum_{k=1}^{m-1}\{(F^{(k)},1),d\}\ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

注意. 加法に関する逆元の構成方法により, 同値類 $[C,p] \in \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)$ は射影加群 (C_i,p_i) たちのみにより, 境界射にはよらないことがわかる.

次に, 制御 $\widetilde{K}_0$群の間の準同型写像を引き起こす「写像」について述べる. $p_X : M \to X$, $p_{X'} : M' \to X'$ を制御写像とする. p_X から $p_{X'}$ の写像とは, $p_{X'}\varphi = \bar{\varphi}p_X$ をみたす連続写像 $\varphi : M \to M'$, $\bar{\varphi} : X \to X'$ の組 $(\varphi,\bar{\varphi})$ のことをいう. 誤解の恐れがない限り, $\bar{\varphi}$ は省略して単に φ と書く. δ, ϵ を正の数, n を正の整数とする. $\bar{\varphi}$ に関する次の条件を考える:

$\mathbf{C}(\delta,\epsilon,n)$:　もし $d(x,y) \le n\delta$ ならば, $d(\bar{\varphi}(x),\bar{\varphi}(y)) \le n\epsilon$,　$(x, y \in X)$.

さて $\bar{\varphi}$ が条件 $\mathbf{C}(\delta,\epsilon,1)$ および$\mathbf{C}(\delta,\epsilon,2)$ をみたすと仮定し, $\varphi_\sharp$ を鎖複体に適用する: もし (C,p) が p_X 上の δ 射影鎖複体ならば$\varphi_\sharp(C,p) = (\varphi_\sharp C, \varphi_\sharp p)$ は $p_{X'}$ 上のϵ

射影鎖複体であり, もし p_X 上の二つの δ 射影鎖複体 (C,p) , (C',p') が n安定δ 鎖同値ならば, $\varphi_\sharp(C,p)$ と $\varphi_\sharp(C',p')$ はn安定 ϵ 鎖同値である. 従って φ は準同型写像 $\varphi_* : \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\delta) \to \widetilde{K}_0(X',p_{X'},n,\epsilon)$ を誘導する. 等式 $(\varphi\circ\psi)_* = \varphi_*\circ\psi_*$ は容易に確かめられる. もし X がコンパクトならば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して上の 2 条件をみたす $\delta > 0$ が存在する.

$n > 0$ を整数とする. $\widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)$ と$\widetilde{K}_0(X,p_X,\epsilon)$ の関係を調べる. まず準同型写像

$$\iota \ : \ \widetilde{K}_0(X,p_X,\epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)$$

が, 0次元鎖複体を n次元鎖複体とみなすことにより得られる. これが実は全射となる. (3.3)

命題 3.2. n次元 ϵ 射影鎖複体(C,p) は次の条件をみたすn次元 ϵ 射影鎖複体 (D,q) にϵ 鎖同値である: $r > 0$ に対しては $q_r = 1 : D_r \to D_r$ で, $r = 0$ では$(D_0,q_0) = (\bigoplus_{r:\mathrm{even}}(C_r,p_r)) \oplus (\bigoplus_{r:\mathrm{odd}}(C_r,1-p_r))$.

証明: $r>0$ では $(D_r,q_r) = \bigoplus_{i\geq r}(C_i,1)$, そして $r=0$ では (D_0,q_0) を上のように定める. 境界射 d_D は次式で定める:

$$(d_D)_r \ = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-p_r & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p_{r+1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p_{r+2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_{r+3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} : (C_r,1)\oplus\cdots\oplus(C_n,1)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (C_{r-1},1)\oplus(C_r,1)\oplus\cdots\oplus(C_n,1), & (\ r>1\ ) \\ (C_0,p_0)\oplus(C_1,1-p_1)\oplus\cdots\oplus(C_n,(1-)p_n), & (\ r=1\ ). \end{cases}$$

すると $(D,q) = \{(D_r,q_r),d_D\}$ は n次元 ϵ 射影鎖複体となる. 次の ϵ 鎖写像が求める ϵ 鎖同値写像とその ϵ 鎖ホモトピー逆を与える:

$$\tilde{p}_r = {}^t(\,p_r \quad 0 \quad \dots \quad 0\,) \ : \ (C_r,p_r) \longrightarrow (D_r,q_r)$$

$$\hat{p}_r = (\,p_r \quad 0 \quad \dots \quad 0\,) \ : \ (D_r,q_r) \longrightarrow (C_r,p_r).$$

□

系 3.3. 準同型写像 $\iota : \widetilde{K}_0(X, p_X, \epsilon) \to \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$ は全射である.

証明: 元 $[C, p] \in \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$ に対して (D, q) を 3.2 のようにとる. すると (C, p) と 0次元 自由 鎖複体

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow (D_0, 1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

の直和は 0次元 ϵ 射影鎖複体

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow (D_0, q_0) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

と n次元自由 ϵ 鎖複体

$$\cdots \longrightarrow (D_2, 1) \xrightarrow{d_D} (D_1, 1) \xrightarrow{d_D} (D_0, 1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

の直和に ϵ 鎖同値である. 実際 ϵ 鎖同値写像は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_r &: (C_r, p_r) \longrightarrow (D_r, 1) \qquad (r > 0), \\ \begin{pmatrix} 0 & q_0 \\ \tilde{p}_0 & 1 - q_0 \end{pmatrix} &: (C_0, p_0) \oplus (D_0, 1) \longrightarrow (D_0, q_0) \oplus (D_0, 1) \qquad (r = 0). \end{aligned}$$

□

命題 3.4. この対応 $(C, p) \mapsto (D_0, q_0)$ は準同型写像

$$\sigma : \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(X, p_X, 9\epsilon)$$

を定める.

証明: 最初に (C, p) が 0 に ϵ 鎖同値である場合を考える. Γ を (C, p) の ϵ 鎖縮射とせよ. 3ϵ 鎖縮射 Γ' を次のように定める: $\Gamma' = \Gamma d \Gamma$. こうすると半径は大きくなっ

てしまうが, ホモトピー $(\Gamma')^2 \sim_{6\epsilon} 0$ を得る. (Cf. J. H. C. Whitehead [25,(6.2)].) これを用いて

$$d+\Gamma' \ : \ \bigoplus_{r:\text{even}}(C_r,p_r) \longrightarrow \bigoplus_{r:\text{odd}}(C_r,p_r)$$
$$d+\Gamma' \ : \ \bigoplus_{r:\text{odd}}(C_r,p_r) \longrightarrow \bigoplus_{r:\text{even}}(C_r,p_r)$$

が互いの 3ϵ逆射であることを示すことができる. 従って $\bigoplus_{r:\text{odd}}(C_r,p_r)$ と $\bigoplus_{r:\text{even}}(C_r,p_r)$ は$\widetilde{K}_0(X,p_X,3\epsilon)$ の中で同じ元を表し, $[D_0,q_0]=0\in\widetilde{K}_0(X,p_X,3\epsilon)$ である.

次に $f:(C,p)\to(C',p')$ が ϵ 鎖同値写像とする. 2.4 により写像錐 $\mathcal{C}(f)$ は 3ϵ 可縮である. 前半の議論により $\sum_r(-1)^r[\mathcal{C}(f)_r,p'_r\oplus p_{r-1}]=0\in\widetilde{K}_0(X,p_X,9\epsilon)$ である. ところでこの元は$\sum_r(-1)^r[C'_r,p'_r]-\sum_r(-1)^r[C_r,p_r]$ に等しい.

自由 ϵ 鎖複体との直和は自由加群との直和に対応するので, 命題は証明された. □

この二つの準同型写像は「安定的」な逆写像である. つまり次の二つの図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{K}_0(X,p_X,\epsilon) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon) \\
\downarrow & & \| \\
\widetilde{K}_0(X,p_X,9\epsilon) & \xleftarrow[\ \sigma\ ]{} & \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\widetilde{K}_0(X,p_X,9\epsilon) & \xleftarrow{\ \sigma\ } & \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon) \\
\| & & \downarrow \\
\widetilde{K}_0(X,p_X,9\epsilon) & \xrightarrow[\ \iota\ ]{} & \widetilde{K}_0(X,p_X,n,9\epsilon)
\end{array}$$

3.2 の系をもう一つ述べる.

系 **3.5.** $n>0$ とする. もし $[C,p]=0\in\widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)$ ならば(C,p) は p_X 上の n次元自由 30ϵ 鎖複体に 60ϵ 鎖同値である.

証明: (D,q) を 3.2 のようにとる. 上の命題により $[D_0,q_0]=0\in\widetilde{K}_0(X,p_X,9\epsilon)$ である. 2.1 により自由加群 $(F,1)$ で, $(D_0,q_0)\oplus(F,1)$ がある自由加群 $(G,1)$ に 27ϵ

同型になるものがある. (C,p) は(D,q) と 1次元 自由鎖複体

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow (F,1) \xrightarrow{1} (F,1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

の直和に 2ϵ 鎖同値である. この和は 28ϵ 自由鎖複体に 55ϵ 同型となる. □

任意の $\epsilon > 0$ に対し,「制御を忘れる」写像がある:

$$\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(\{*\}, M \to \{*\}, n, \epsilon)\ .$$

右側の群 $\widetilde{K}_0(\{*\}, M \to \{*\}, n, \epsilon)$ は ϵ に依存しない. M が連結かつ局所1-連結と仮定する. このとき Quinn [17] は, M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ に関するアセンブリ写像 $\mathbf{Z}[S] \mapsto \mathbf{Z}[\widetilde{S}]$ が, M 上の幾何加群と射のホモトピー類のつくるカテゴリーから基底付き自由$\mathbf{Z}[\pi_1(M)]$加群のカテゴリーへの自然な同値を与えることを示した. 従って $\widetilde{K}_0(\{*\}, M \to \{*\}, n, \epsilon)$ は$\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)])$ に同型となり, 上の写像は次のように書き換えることができる:

$$\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(\{*\}, M \to \{*\}, n, \epsilon) \overset{\text{アセンブリ}}{\cong} \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)])\ .$$

4. 捩れ (Torsion).

この節ではまず制御のない場合の「捩れ」について簡単に復習し, その後で制御のある場合のアナロジーを取り扱う.

群 π と整数 $n \geq 1$ が与えられたとき, n次元の可縮基底付き有限生成自由$\mathbf{Z}[\pi]$加群鎖複体のつくるGrothendieck 群の基本的複体のつくる部分群による商を $Wh(\pi, n)$ とかく. $n = 1$ のときは, これはいわゆる Π のホワイトヘッド群(基底付き有限生成自由$\mathbf{Z}[\pi]$加群の同型写像の Grothendieck 群のある商)を与える:

$$Wh(\pi, 1) = Wh(\pi)\ .$$

可縮な基底付き有限生成自由$\mathbf{Z}[\pi]$加群鎖複体 C の捩れは任意の鎖縮写像 $\Gamma : 0 \simeq 1 : C \longrightarrow C$ を用いて

$$\tau(C) \;=\; \tau(d+\Gamma : C_{\mathrm{odd}} \longrightarrow C_{\mathrm{even}}) \in Wh(\pi)$$

と定義される. 捩れにより次の同型写像が誘導される:

$$Wh(\pi, n) \longrightarrow Wh(\pi) \; ; \; [C] \longrightarrow \tau(C) \; .$$

有限 CW複体の間のホモトピー同値写像 $f : L \longrightarrow M$ のホワイトヘッドの捩れ

$$\tau(f) \;=\; \tau(\tilde{f} : C(\widetilde{L}) \longrightarrow C(\widetilde{M})) \in Wh(\pi_1(M))$$

は次の性質を持つ:f が単純である $(\tau(f) = 0)$ ことと f が変形(elementary expansions と collapse の合成)にホモトピックであることは互いに必要十分である. これに関しては Milnor [14] や Cohen [7] を参照せよ.

この節では制御付きのホワイトヘッド群を検討する. これは Quinn [17] により定義されたものである. 本稿では, 相対制御ホワイトヘッド群を同時に定義する都合上 Quinn のものとはやや異なっているが, 本質的な違いはない.

距離空間 X への制御写像 $p_X : M \to X$ および整数 $n \geq 1$ を固定する. 部分集合 $Y \subseteq X$ と $\epsilon > 0$ が与えられたとき, 相対制御ホワイトヘッド群 $Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ を$Wh(\pi, \rho)$ の制御付きアナロジーとして定義する. §5 ではこれと §3 の制御射影類群 $\widetilde{K}_0$ とを「安定完全列」を用いて結び付ける.

重要な注意. この節では幾何加群はすべて有限生成とする. これが明示的に使われるのは制御ホワイトヘッド群を通常のホワイトヘッド群とアセンブリにより比較するときのみである. 他の議論は無限生成の場合でも全く同様に成立する. 実際, §7 では「局所有限生成」な幾何加群を用いて「局所有限ホワイトヘッド群」を導入する.

定義. 幾何射 $f: \mathbf{Z}[S] \to \mathbf{Z}[S]$ が基本的であるとは, $\mathbf{Z}[S]$ が二つの幾何加群 $\mathbf{Z}[A]$, $\mathbf{Z}[B]$ の直和であり, f がその直和分解に関して

$$f = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbf{Z}[A] \oplus \mathbf{Z}[B] \to \mathbf{Z}[A] \oplus \mathbf{Z}[B]$$

の形に書けることをいう. 基本的な幾何射 f は同型射である. 逆射 $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ もやはり基本的である.

同じランクを持つ幾何加群の間の同型射 $f: \mathbf{Z}[S] \to \mathbf{Z}[S']$ が幾何的であるとは, ある全単射 $\varphi: S \to S'$ に関して次のことが成り立つことをいう: f の中には $s' = \varphi(s)$ でないかぎり $s \in S$ から $s' \in S'$ への道はなく, 各 $s \in S$ に対しちょうど 1 つ s から $\varphi(s)$ への係数 ± 1 を持つ道がある. その逆射 f^{-1} は道の向きを逆にすることにより得られる.

基本的な自己同型射および幾何的な同型射の列

$$D : \mathbf{Z}[S_1] \xrightarrow{f_1} \mathbf{Z}[S_2] \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_m} \mathbf{Z}[S_{m+1}]$$

を変形という. 任意の部分的合成 $f_j f_{j-1} \cdots f_1$, $f_i^{-1} f_{i+1}^{-1} \cdots f_j^{-1}$ が半径 ϵ を持つとき, D は ϵ 変形であるという. D が ϵ 変形であるとき, 合成して得られる ϵ 同型射 $f = f_m f_{m-1} \cdots f_1$ を ϵ単純同型射という. 合成 $f^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \cdots f_m^{-1}$ が f の ϵ逆射を与える. ϵ単純同型射と δ単純同型射の合成は $(\epsilon + \delta)$単純同型射である.

定義. 自由な鎖複体:

$$\dots \to 0 \to 0 \to A \xrightarrow{1} A \to 0 \to 0 \to \dots$$

を基本的自明鎖複体という. 自由鎖複体 T が自明であるとは, 有限個の基本的自明鎖複体の直和になっていることをいう. 自由鎖複体の間の ϵ 鎖写像 $f = \{f_r\}: C \to D$ は, 各 f_r が ϵ単純同型射であり, さらに $f^{-1} = \{f_r^{-1}\}$ がϵ 鎖写像であるとき ϵ単純

同型写像であるという．このとき C と D は ϵ単純同型であるといい，$C \cong_{\epsilon,\Sigma} D$ とかく．ϵ単純同型写像と δ単純同型写像の合成は$(\epsilon+\delta)$単純同型写像である．n を整数とする．二つの自由鎖複体 C , C' がn安定ϵ同値であるとは，ある n次元自明鎖複体 T , T' に対し，$C \oplus T$ と $C' \oplus T'$ が ϵ単純同型になることをいう．

W を X の部分集合とする．$p_W : p_X^{-1}(W) \to W$ は p_X を制限して得られる写像を表すものとする．p_X 上の幾何加群 $A = \mathbf{Z}[S]$ の W への制限とはS の元 $(|s|,[s])$ で $[s] \in p_X^{-1}(W)$ をみたすものにより生成される p_W 上の幾何加群のことをいう．これを $A(W)$ とかく；すなわち

$$A(W) = \mathbf{Z}[S|S^{-1}p_X^{-1}(W) : S^{-1}p_X^{-1}(W) \longrightarrow p_X^{-1}(W)].$$

幾何射 $f = \sum m_\lambda(s_\lambda,\rho_\lambda,t_\lambda) : A \to B$ のW への制限は次式で定義される：

$$f|W = \sum_{[s_\lambda]\in p_X^{-1}(W)} m_\lambda(s_\lambda,\rho_\lambda,t_\lambda) : A \to B.$$

f が半径 ϵを持てば $f|W$ は幾何射 $f|W : A(W) \to B(W^\epsilon)$ を定める．f , $g : A \to B$ を二つの幾何射とする．$f|W = g|W$ が成り立つことをW 上で f と g は等しいといい，"$f = g$ (over W)" とかく．同様に $f|W \sim_\epsilon g|W$ であることをW 上で f と g はホモトピックであるといい，"$f \sim_\epsilon g$ (over W)" とかく．

基本的自己同型射が与えられているとする：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbf{Z}[A] \oplus \mathbf{Z}[B] \to \mathbf{Z}[A] \oplus \mathbf{Z}[B].$$

h をその制限 $h|(X-W)$ で置き換えると別の幾何射 $f_{[W]}$ を得る．この幾何射は $X-W$ 上では f と一致し W 上では恒等幾何射と一致する．$f_{[W]}$ を f の W の外への局所化という．等式 $(f_{[W]})^{-1} = (f^{-1})_{[W]}$ が成り立つことに注意せよ．変形 $D = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ に対し，その W の外への局所化を $(f_1', f_2', \ldots, f_m')$ で定める．た

だし f_j が基本的自己同型射のときは $f'_j = (f_j)_{[W]}$ であり, f_j が幾何的同型射のときは $f'_j = f_j$ とする. 変形の局所化の合成 $f'_m \cdots f'_1$ を単純同型射 $f = f_m \cdots f_1$ のW の外への局所化といい, $f_{[W]}$ で表す. f が ϵ単純同型射ならば $f_{[W]}$ も ϵ単純同型射であり, $X - W^{\epsilon}$ 上で f と一致し, $W^{-\epsilon}$ 上では幾何的である.

定義. (1) $f,\ g : C \to D$ を p_X 上の自由鎖複体の間の鎖写像とする. 半径 ϵ の幾何射の列 $h = \{h_r\}$ がf と g の間の W 上の ϵ 鎖ホモトピーである, $h : f \simeq_W g$ とは, dh および hd が共に半径 2ϵ を持ち, さらにW 上で $dh + hd \sim_{2\epsilon} g - f$ が成り立つことをいう.

(2) ϵ 鎖写像 $f : C \to D$ が ϵ W 上の鎖同値写像であるとはϵ 鎖写像 $g : D \to C$ と W 上の ϵ 鎖ホモトピー:$gf \simeq_W p$, $fg \simeq_W q$ が存在することをいう.

(3) W 上の ϵ 鎖ホモトピー $h : 0 \simeq_W 1 : C \to C$ をW 上の ϵ 鎖縮射とよび, このとき C は W 上 ϵ 可縮であるという.

(4) C の W 上の強 ϵ 鎖縮射 Γ とは, C の W 上の ϵ 鎖縮射でさらに条件:$\Gamma_{r+1}\Gamma_r \sim_{2\epsilon} 0$ (W 上) をみたすもののことをいう. そのような Γ が存在するとき, C は W 上で強 ϵ 可縮という. 特に $W = X$ のときは, 単に強 ϵ 可縮という. (注意: Γ が W 上の ϵ 鎖縮射ならば, $\Gamma' = \Gamma d \Gamma$ は $W^{-3\epsilon}$ 上の強 3ϵ 鎖縮射である. これはすでに 3.4 の証明の中で用いられた.)

自由鎖複体 C , C' が (n, W)安定 ϵ 同値であるとは, p_{X-W} 上の n次元 自由 ϵ 鎖複体 D , D' で$C \oplus D$ と $C' \oplus D'$ が n安定 ϵ 同値になるものが存在することをいう. これを $C \overset{n,W}{\underset{\epsilon}{\sim}} C'$ と記す. 例えば (n, X)安定 ϵ 同値と n安定 ϵ 同値は同じことである. $C \overset{n,W}{\underset{\epsilon}{\sim}} C'$ かつ $C' \overset{m,V}{\underset{\delta}{\sim}} C''$ ならば$C \overset{\max\{n,m\}, W \cap V}{\underset{\max\{\epsilon,\delta\}}{\sim}} C''$ である.

定義. Y を X の部分集合とする. $Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ を $X - Y$ 上で強 ϵ 可縮なn次元自由 ϵ 鎖複体全体にある同値関係をいれたものとする. その同値関係は $(n, X - Y^{20\epsilon})$

安定40ϵ同値により生成されたものを用いる．特にY空集合の場合はYを表記からはずす．また$n=1$の場合もnを省略する．例：$Wh(X,p_X,n,\epsilon)=Wh(X,\emptyset,p_X,n,\epsilon)$, $Wh(X,Y,p_X,\epsilon)=Wh(X,Y,p_X,1,\epsilon)$, 等々．

Mが連結かつ局所1連結のとき「制御を忘れる」アセンブリ写像がある：

$$Wh(X,p_X,n,\epsilon)\longrightarrow Wh(\pi_1(M)).$$

適当なϵとδに対し，δホモトピー同値写像$f:L\to M$はϵ制御捩れ$\tau(f)\in Wh(X,p_X,n,\epsilon)$を持ち，これは制御を忘れると普通のホワイトヘッドの捩れ$\tau(f)\in Wh(\pi_1(M))$にアセンブルする．– 詳しくは§9を参照されたい．

命題 4.1. 直和により$Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)$は可換群の構造を持つ．また，$[C]=[C']\in Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)$ならば$C$と$C'$は$(n,X-Y^{20\epsilon})$安定86$\epsilon$同値である．

逆元の存在を示さねばならない．$\dim C<n$の場合は，次のテクニカルな補題によりCの懸垂ΣC（さらに一般にCと$X-Y$上で「同じ」ものの懸垂ならなんでもよい）が$[C]$の逆元を与えることがわかる．

補題 4.2. $C=\{C_r,d_r\}$ (*resp.* $C'=\{C'_r,d'_r\}$) はp_X上の次元m (*resp.* m')の自由ϵ (*resp.* ϵ') 鎖複体とする．YはXの部分集合とし次のことを仮定する．

1. Cは$X-Y^\epsilon$上のϵ鎖縮射Γを持つ
2. $C_r(X-Y)=C'_r(X-Y)$　　(すべてのr)
3. $d_r|X-Y^\epsilon=d'_r|X-Y^\epsilon:C_r(X-Y^\epsilon)\to C_{r-1}(X-Y)$　　(すべてのr).

$\gamma=\max\{\epsilon,\epsilon'\}$, $n=\max\{m+1,m'\}$とおく．このとき$C'\oplus\Sigma C$から$p_{Y^{11\epsilon+2\gamma}}$上の$n$次元自由$4\epsilon+\gamma$鎖複体と$p_X$上の$n$次元自明鎖複体の直和への$(6\epsilon+\gamma)$単純同型射が存在する．従って$C'\oplus\Sigma C$は0に$(n,X-Y^{11\epsilon+2\gamma})$安定$6\epsilon+\gamma$同値である．

証明： ϵ 射 $\hat{d}_r : C'_r \to C_{r-1}$, $\hat{\Gamma}_r : C_r \to C'_{r+1}$ を次式で定める：

$$\hat{d}_r = \begin{cases} d_r & \text{over } X - Y^{\epsilon} \\ 0 & \text{over } Y^{\epsilon} \end{cases}$$

$$\widehat{\Gamma}_r = \begin{cases} \Gamma_r & \text{over } X - Y^{\epsilon} \\ 0 & \text{over } Y^{\epsilon}. \end{cases}$$

次のように 2ϵ単純同型射およびその逆を定義する：

$$f_r = \begin{pmatrix} (-)^r 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-)^{r-1}\hat{d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (-)^r \widehat{\Gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-)^r 1 & \widehat{\Gamma} \\ (-)^{r-1}\hat{d} & -\hat{d}\,\widehat{\Gamma} + 1 \end{pmatrix}$$

$$: (C' \oplus \Sigma C)_r = C'_r \oplus C_{r-1} \longrightarrow C'_r \oplus C_{r-1} ,$$

$$f_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-)^{r+1}\widehat{\Gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-)^r \hat{d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-)^r 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-)^r (1 - \widehat{\Gamma}\hat{d}\,) & (-)^{r+1}\widehat{\Gamma} \\ \hat{d} & 1 \end{pmatrix}$$

$$: C'_r \oplus C_{r-1} \longrightarrow (C' \oplus \Sigma C)_r = C'_r \oplus C_{r-1} .$$

新しい鎖複体 $\bar{C} = \{\bar{C}_r, \bar{d}_r\}$ を

$$\bar{C}_r = C'_r \oplus C_{r-1} ,$$

$$\bar{d}_r = f_{r-1}(d'_r \oplus d_{r-1}) f_r^{-1} = \begin{pmatrix} -d' + (d'\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} d)\hat{d} & d'\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} d \\ \hat{d}d' + d\hat{d} - \hat{d}(d'\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} d)\hat{d} & d - \hat{d}(d'\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} d) \end{pmatrix}$$

と定める．すると，$\bar{d}_r \bar{d}_{r+1} \sim_{8\epsilon+2\gamma} 0$, $\bar{d}_r f_r \sim_{6\epsilon+\gamma} f_{r-1}(d'_r \oplus d_{r-1})$ となる．$X - Y^{2\epsilon}$ 上で$d'\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} d \sim_{2\epsilon} 1$ が成立しているので

$$\bar{d}_r \sim_{4\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{over } X - Y^{3\epsilon}$$

となる．$\bar{d}_r$ を $X - Y^{3\epsilon}$ 上のみで $3\epsilon + \gamma$ ホモトピーにより変えて $4\epsilon + \gamma$ 鎖複体 $\widetilde{C} = \{\bar{C}_r, \tilde{d}_r\}$ をつくる：

$$\tilde{d}_r = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{over } X - Y^{3\epsilon} \\ \bar{d}_r & \text{over } Y^{3\epsilon} . \end{cases}$$

$f = \{f_r\}$ は $C' \oplus \Sigma C$ から $\widetilde{C}$ への$6\epsilon + \gamma$単純同型射となる．$\widetilde{C}$ はその 2 通りの制限：

$$\widetilde{C}(Y^{11\epsilon+2\gamma}) = \{C_r(Y^{11\epsilon+2\gamma}),\ d_r | Y^{11\epsilon+2\gamma}\ \},$$

$$\widetilde{C}(X - Y^{11\epsilon+2\gamma}) = \{C_r(X - Y^{11\epsilon+2\gamma}),\ d_r | X - Y^{11\epsilon+2\gamma}\ \}$$

の直和である．$\widetilde{C}(X - Y^{11\epsilon+2\gamma})$ は自明であり，$\widetilde{C}(Y^{11\epsilon+2\gamma})$ は$p_{Y^{11\epsilon+2\gamma}}$ 上の自由 $4\epsilon + \gamma$ 鎖複体である． □

$n > 1$ の時の n次元の逆元を得るには次の折りたたみ論法を用いる. 山崎 [26] では下からの折り返しが用いられた.

補題 4.3. Y を X の部分集合とし, C は p_X 上の n次元 自由 ϵ 鎖複体 $(n > 1)$ で$X - Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射 Γ を持つとする. このとき C は$(n-1)$次元 自由 ϵ 鎖複体:

$$\{\widehat{C}, \hat{d}\,\} \;:\; \ldots \to 0 \to C_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d \\ \Gamma \end{pmatrix}} C_{n-2} \oplus C_n \xrightarrow{(d\ \ 0)} C_{n-3} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} C_0 \to 0$$

に $(n, X - Y^{17\epsilon})$安定 16ϵ 同値である. $\{\widehat{C}, \hat{d}\}$ は $X - Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射を持つ.

証明 : i, j を$C_n(Y)$, $C_n(X-Y)$ の C_n の中への 包含写像とし, r, q を C_n の $C_n(Y)$, $C_n(X-Y)$ の上への射影とする. 仮定によりホモトピー: $\Gamma dj \sim_{2\epsilon} j : C_n(X-Y) \to C_n$ が存在する. 次の 3ϵ 鎖複体 C' を考える:

$$\ldots \to 0 \to C_n(Y) \xrightarrow{\Delta} C_{n-1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d \\ q\Gamma \end{smallmatrix}\right)} C_{n-2} \oplus C_n(X-Y) \xrightarrow{(d\ \ 0)} C_{n-3} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} C_0 \to 0.$$

ただし $\Delta = d_n i - d_n jq\Gamma d_n i$ とする.

すると次の図式が C と C' の間の n安定 4ϵ 同値を与える :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\quad d \quad} & C_{n-1} & \xrightarrow{\quad d \quad} & C_{n-2} & \xrightarrow{\quad d \quad} & C_{n-3} & \to \ldots \\
 & & & \oplus & & \oplus & & & \\
 & & & C_n(X-Y) & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & C_n(X-Y) & & & \\
 & \Big\downarrow f_n & & \Big\downarrow f_{n-1} & & \Big\downarrow f_{n-2} & & \Big\| & \\
0 \longrightarrow & C_n(Y) & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-2} \oplus C_n(X-Y) & \longrightarrow & C_{n-3} & \to \ldots \\
 & \oplus & & \oplus & & & & & \\
 & C_n(X-Y) & \xrightarrow[1]{\qquad} & C_n(X-Y) & & & & &
\end{array}$$

ただし

$$f_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q\Gamma di & 1 \end{pmatrix} : C_n = C_n(Y) \oplus C_n(X-Y) \longrightarrow C_n(Y) \oplus C_n(X-Y)$$
$$f_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & -dj \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q\Gamma & 1 \end{pmatrix} : C_{n-1} \oplus C_n(X-Y) \longrightarrow C_{n-1} \oplus C_n(X-Y)$$
$$f_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : C_{n-2} \oplus C_n(X-Y) \longrightarrow C_{n-2} \oplus C_n(X-Y) .$$

次のことに注意せよ：

1. $\widehat{C}$ は次式で定まる $X-Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射$\widehat{\Gamma}$ を持つ：

$$\widehat{\Gamma}_{n-2} = (\Gamma_{n-2} \quad d) \ , \ \widehat{\Gamma}_{n-3} = \begin{pmatrix} \Gamma_{n-3} \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \widehat{\Gamma}_r = \Gamma_r \quad (r < n-3)$$

2. $\widehat{C}_r(X-Y) = C'_r(X-Y)$（すべての r）
3. $\hat{d}_r|X-Y^\epsilon = d'_r|X-Y^\epsilon : C_r(X-Y^\epsilon) \to C_r(X-Y)$ （すべての r）

4.2 により, $C' \oplus \Sigma\widehat{C}$ は 0 に$(n, X-Y^{17\epsilon})$安定 9ϵ 同値である.

さらに $\widehat{C} \oplus \Sigma\widehat{C}$ はやはり 4.2 により 0 に$(n, X-Y^{13\epsilon})$安定 7ϵ 同値である. 従って C と $\widehat{C}$ は $(n, X-Y^{17\epsilon})$安定 16ϵ 同値である：

$$C \quad \underset{7\epsilon}{\overset{n,X-Y^{13\epsilon}}{\sim}} \quad C' \oplus \Sigma\widehat{C} \oplus \widehat{C} \quad \underset{9\epsilon}{\overset{n,X-Y^{17\epsilon}}{\sim}} \quad \widehat{C}. \qquad \square$$

系 4.4. $n > 1$ とする. このとき $[\Sigma\widehat{C}]$ は$[C]$ の $Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ における逆元を与える. 実際$C \oplus \Sigma\widehat{C}$ は 0 に$(n, X-Y^{17\epsilon})$安定 23ϵ 同値である.

証明 : $C \oplus \Sigma\widehat{C} \quad \underset{16\epsilon}{\overset{n,X-Y^{17\epsilon}}{\sim}} \quad \widehat{C} \oplus \Sigma\widehat{C} \quad \underset{7\epsilon}{\overset{n,X-Y^{13\epsilon}}{\sim}} \quad 0.$ $\square$

$n = 1$ の場合の逆元の存在は次の補題の特別な場合$(C'_1 = C_0, C'_0 = C_1, d' = \Gamma)$である.

補題 4.2′. $C : 0 \to C_1 \xrightarrow{d} C_0 \to 0$ を1次元自由 ϵ 鎖複体, $C' : 0 \to C'_1 \xrightarrow{d'} C'_0 \to 0$ を 1 次元自由 ϵ' 鎖複体とする. 次のことを仮定する：

1. C は $X-Y^\epsilon$ 上の ϵ 鎖縮射 Γ を持つ

2. $C'_1(X-Y)=C_0(X-Y)$, $\quad C'_0(X-Y)=C_1(X-Y)$

3. $d'|X-Y^\epsilon \sim_\epsilon \Gamma|X-Y^\epsilon : C'_1(X-Y^\epsilon)\to C'_0(X-Y)$.

さらに $\gamma=\max\{\epsilon,\epsilon'\}$ とおく．このとき直和 $C\oplus C'$ は$p_{Y^{5\epsilon+\gamma}}$ 上の1次元自由 $3\epsilon+\gamma$ 鎖複体と p_X 上の 1次元自明鎖複体の直和に $(5\epsilon+\gamma)$単純同型である．

証明：ϵ 射 $\tilde{d}:C'_0\to C_0$, $\tilde{\Gamma}:C'_1\to C_1$, $\hat{\Gamma}:C_0\to C'_0$ を$X-Y^\epsilon$ の上では d, Γ, Γ で，またY^ϵ 上では 0, 0, 0 で定める．1次元自由 $3\epsilon+\gamma$ 鎖複体 E を次のように定める：

$$
\begin{aligned}
E_1 &= C'_1\oplus C_1 \quad , \quad E_0 \;=\; C_0\oplus C'_0 \\
d_E &= \begin{cases} \begin{pmatrix} d\tilde{\Gamma}-\tilde{d}\,\hat{\Gamma}d\tilde{\Gamma}+\tilde{d}d' & d-\tilde{d}\,\hat{\Gamma}d \\ \hat{\Gamma}d\tilde{\Gamma}-d' & \hat{\Gamma}d \end{pmatrix} & \text{over } Y^{2\epsilon} \\ 1 & \text{over } X-Y^{2\epsilon}\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ϵ単純同型射 $f_1:C_1\oplus C'_1\to E_1$ および2ϵ単純同型射 $f_0:C_0\oplus C'_0\to E_0$ を

$$
f_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\tilde{\Gamma} \end{pmatrix}, \qquad f_0=\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hat{\Gamma} & -1 \end{pmatrix}
$$

と定めるならば，直接計算により $d_E \sim_{3\epsilon+\gamma} f_0(d\oplus d')f_1^{-1}$ が示され，さらに $f=\{f_r\}:C\oplus C'\to E$ が$(5\epsilon+\gamma)$単純同型射であることがわかる．E は $p_{Y^{5\epsilon+\gamma}}$ 上の自由 $3\epsilon+\gamma$ 鎖複体$E(Y^{5\epsilon+\gamma})$ と自明な鎖複体 $E(X-Y^{5\epsilon+\gamma})$ の直和である．

□

以上で逆元の存在が示された．後半の証明は前節の制御射影類群の場合と同様に Chapman の「逆元のキャンセルのトリック」を用いればよい．詳細は略す．以上で 4.1 の証明を終る．

次の命題は相対制御ホワイトヘッド群において二つの元が等しいことを示すのに便利である．

命題 4.5. $[C,d]$ と $[C',d']$ を $Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)$ の元とする．任意の r に対して $C_r(X-Y)=C'_r(X-Y)$, $d_r|X-Y^\epsilon=d'_r|X-Y^\epsilon$ が成り立てば，$[C]=[C']$ である．

証明：$n>1$ の場合の証明を行う．Γ を C の $X-Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射とする．$\Gamma':C'_r\to C'_{r+1}$ $(r\in\mathbf{Z})$ を

$$\Gamma' \;=\; \begin{cases}\Gamma & \text{over } X-Y^\epsilon\\ 0 & \text{over } Y^\epsilon\end{cases}$$

で定義せよ．すると Γ' は C' の $X-Y^{2\epsilon}$ 上の強 ϵ 鎖縮射である．4.3 を C,Γ および C',Γ' にそれぞれ適用して得られる$(n-1)$次元 鎖複体を $\widehat{C}$, $\widehat{C}'$ とする．すると

$$C \quad \underset{16\epsilon}{\overset{n,X-Y^{17\epsilon}}{\sim}} \widehat{C} \;,\quad C' \quad \underset{16\epsilon}{\overset{n,X-Y^{19\epsilon}}{\sim}} \widehat{C}' \;,$$

であり，また 4.2 により

$$\widehat{C}\oplus\Sigma\widehat{C} \quad \underset{7\epsilon}{\overset{n,X-Y^{13\epsilon}}{\sim}} 0 \;,\quad \widehat{C}'\oplus\Sigma\widehat{C} \quad \underset{7\epsilon}{\overset{n,X-Y^{13\epsilon}}{\sim}} 0$$

を得る．同値の合成：

$$C \quad \underset{16\epsilon}{\overset{n,X-Y^{17\epsilon}}{\sim}} \widehat{C}\oplus\Sigma\widehat{C}\oplus\widehat{C}' \quad \underset{16\epsilon}{\overset{n,X-Y^{19\epsilon}}{\sim}} C'$$

により C と C' の間の $(n,X-Y^{19\epsilon})$安定 32ϵ 同値を得る．

$n=1$ の場合も同様である；上の $\Sigma\widehat{C}$ の替わりに C の逆元(補題 4.2′)を用いればよい．　□

$p_X:M\to X$, $p_{X'}:M'\to X'$ を制御写像とし，Y, Y' は X , X' の部分集合とする．写像 $\varphi:p_X\to p_{X'}$ が $\bar{\varphi}(Y)\subset Y'$ をみたし，さらに前節の条件 $\mathbf{C}(\delta,\epsilon,1)$, $\mathbf{C}(\delta,\epsilon,2)$, $\mathbf{C}(\delta,\epsilon,20)$, $\mathbf{C}(\delta,\epsilon,40)$ をすべてみたすならば，φ は準同型写像 $\varphi_*:Wh(X,Y,p_X,\delta)\to Wh(X',Y',p_{X'},\epsilon)$ を誘導する．等式 $(\varphi\circ\psi)_*=\varphi_*\circ\psi_*$ が成り立つ．

整数 $n > 1$ を固定する. $Wh(X, Y, p_X, \epsilon)$ と $Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ には以下のような関係がある. 4.3 を繰り返し用いて次の命題が示される:

命題 4.6. *1次元鎖複体を n次元鎖複体とみなして得られる写像$\iota : Wh(X, Y, p_X, \epsilon) \to Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ は全射である: C が $X - Y$ 上の強ϵ鎖縮射 Γ を持つn次元自由 ϵ 鎖複体ならば, 1次元 自由 ϵ 鎖複体:*

$$C_\Gamma \ : \ C_{\mathrm{odd}} \ = \ C_1 \oplus C_3 \oplus \ldots \ \xrightarrow{d+\Gamma} \ C_{\mathrm{even}} \ = \ C_0 \oplus C_2 \oplus \ldots$$

は $X - Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射 $d + \Gamma : C_{\mathrm{even}} \to C_{\mathrm{odd}}$ を持ち $Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ において C と同じ元を表す.

命題 4.7. 対応 $[C] \mapsto [C_\Gamma]$ は準同型写像

$$\tau \ : \ Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow Wh(X, Y^{(90n+100)\epsilon}, p_X, (90n + 250)\epsilon)$$

を誘導する.

証明: まず C を固定したとき $[C_\Gamma]$ が Γ の取り方に依らないことを示す. Γ' を別の $X - Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射とすると次のホモトピーが存在する:

$$(1 + \Gamma'\Gamma)(d + \Gamma) \sim_{3\epsilon} (d + \Gamma')(1 + \Gamma'\Gamma) : C_{\mathrm{odd}} \to C_{\mathrm{even}} \qquad \text{over} \ \ X - Y^\epsilon.$$

ここで現れた二つの射 $1 + \Gamma'\Gamma : C_{\mathrm{odd}} \to C_{\mathrm{odd}}$ および$1 + \Gamma'\Gamma : C_{\mathrm{even}} \to C_{\mathrm{even}}$ は $n\epsilon$ 単純同型射である; 実際これらはそれぞれ次のような積に書ける:

$$(1 + \Gamma'\Gamma|C_1)(1 + \Gamma'\Gamma|C_3) \cdots$$

$$(1 + \Gamma'\Gamma|C_0)(1 + \Gamma'\Gamma|C_2) \cdots$$

さらに $n\epsilon$ ホモトピー

$$(1 + \Gamma'\Gamma)(1 + \Gamma'\Gamma)^{-1} \sim_{n\epsilon} 1, \quad (1 + \Gamma'\Gamma)^{-1}(1 + \Gamma'\Gamma) \sim_{n\epsilon} 1$$

があることに注意せよ.（これを得るには $(1+\Gamma'\Gamma)^{-1}=1-\Gamma'\Gamma+(\Gamma'\Gamma)^2-\cdots+(-1)^k(\Gamma'\Gamma)^k$ を用いよ. ただし $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ である. ）$(n+3)\epsilon$ 射 $\Delta : C_{\mathrm{odd}} \to C_{\mathrm{even}}$ を次式で定める：

$$\Delta \;=\; (1+\Gamma'\Gamma)(d+\Gamma)(1+\Gamma'\Gamma)^{-1}.$$

すると Δ は, 1次元鎖複体とみなすとき, $Wh(X, Y^{n\epsilon}, p_X, (n+3)\epsilon)$ の元を表す；$X-Y^{n\epsilon}$ 上の $(n+3)\epsilon$ 鎖縮射は

$$h \;=\; (1+\Gamma'\Gamma)(d+\Gamma)(1+\Gamma'\Gamma)^{-1}$$

で与えられる. Δ に関する上の式は C_Γ と Δ が$n\epsilon$単純同型であることを意味する. 従って $[C_\Gamma]=[\Delta]\in Wh(X, Y^{(n+1)\epsilon}, p_X, (n+3)\epsilon)$ となる. 次に Δ と $C_{\Gamma'}$ を比較する.

$$\Delta \sim_{(n+3)\epsilon} d+\Gamma' \qquad \text{over} \quad X-Y^{(n+1)\epsilon}$$

がわかるので, Δ を $X-Y^{(n+1)\epsilon}$ 上のホモトピーで変えてΔ と同じ元を表し, かつ等式:

$$\Delta' \;=\; d+\Gamma' \qquad \text{over} \quad X-Y^{(n+1)\epsilon}$$

が成り立つような Δ' をつくれ. 4.5 により Δ' と $C_{\Gamma'}$ は$Wh(X, Y^{n\epsilon}, p_X, (n+3)\epsilon)$ で同じ元を表す. ゆえに C_Γ と $C_{\Gamma'}$ は$Wh(X, Y^{n\epsilon}, p_X, (n+3)\epsilon)$ で同じ元を表す. 以上で Γ に依存しないことが示された.

次に二つの元 $[C]$, $[C']\in Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$ に対し40ϵ単純同型射 $f:\bar{C}=C\oplus D\to \widehat{C}=C'\oplus D'$ が存在したとする. ただし D , D' は $Y^{20\epsilon}$ 上の n次元 40ϵ 自由鎖複体である. Γ (resp. Γ') が C (resp. C') の $X-Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射とすると, $\bar{\Gamma}=\Gamma\oplus 0$ (resp. $\widehat{\Gamma}=\Gamma'\oplus 0$) は$40\epsilon$ 自由鎖複体 $\bar{C}$ (resp. $\widehat{C}$) の $X-Y^{20\epsilon}$ 上の強 ϵ 鎖縮射であり, $\widehat{\Gamma}'=f\bar{\Gamma}f^{-1}$ は $\widehat{C}$ の$X-Y^{60\epsilon}$ 上の強 81ϵ 鎖縮射である. f は1

次元鎖複体 $\widehat{C}_{\widehat{\Gamma}'}$, $\bar{C}_{\bar{\Gamma}}$ の間の 121ϵ単純同型写像を与える. C_Γ と $\bar{C}_{\bar{\Gamma}}$ (resp. $C'_{\Gamma'}$ と $\widehat{C}_{\widehat{\Gamma}}$) は$Wh(X, Y^{20\epsilon}, p_X, 40\epsilon)$ の中で同じ元を表す. 最後に $\widehat{C}_{\widehat{\Gamma}}$ と $\widehat{C}_{\widehat{\Gamma}'}$ は前段落の議論により$Wh(X, (Y^{60\epsilon})^{81n\epsilon}, p_X, 81(n+3)\epsilon)$ の同じ元を表す. ゆえに $[C_\Gamma] = [C'_{\Gamma'}]$ が $Wh(X, Y^{(81n+60)\epsilon}, p_X, (81n+243)\epsilon)$ で成立する.

自明な鎖複体を C に直和することはC_Γ に自明な鎖複体を直和することに対応するから, これはC_Γ の表す類を変えない. 従って τ はwell-defined である. これが準同型写像になることは明らか.

□

前節と同様に準同型写像 ι, τ は互いに「安定的」逆写像になっており, 同様な可換図式が得られる.

$f: C \to D$ が p_X 上の n次元自由 ϵ 鎖複体の間のϵ 鎖同値写像であるならば, $\mathcal{C}(f)$ は強9ϵ可縮である. f の制御捩れ $\tau(f)$ を

$$\tau(f) \;=\; [\mathcal{C}(f)] \in Wh(X, p_X, n+1, 9\epsilon)$$

で定める. ($n=0$ の場合, すなわち f が ϵ 同型射のとき, f は $\mathcal{C}(f)$ と同一視でき, その捩れ $\tau(f)$ は $Wh(X, p_X, \epsilon)$ でwell-defined である.

命題 4.8. $f: C \to D$, $g: D \to E$ が p_X 上のn次元自由 ϵ 鎖複体の間の ϵ 鎖同値写像であるとき,

$$\tau(gf) \;=\; \tau(g) + \tau(f) \in Wh(X, p_X, n+1, 18\epsilon)\ .$$

$n=0$ のときはこの等式は $Wh(X, p_X, 2\epsilon)$ で成立する.

証明: 自明な鎖複体 $\{T, d_T\}$ を次式で定める:

$$(d_T)_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : T_r = D_r \oplus D_{r-1} \longrightarrow D_{r-1} \oplus D_{r-2} = T_{r-1}.$$

すると 5ϵ単純同型射 $\mathcal{C}(f)\oplus\mathcal{C}(g)\to\mathcal{C}(gf)\oplus T$ が次のように定まる：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&(-)^r1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\(-)^rd&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\g&0&1&0\\0&f&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&(-)^rk\\0&1&0&f^{-1}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$:D_r\oplus C_{r-1}\oplus E_r\oplus D_{r-1}\longrightarrow D_r\oplus C_{r-1}\oplus E_r\oplus D_{r-1}$$

ただし f^{-1} は f の ϵ 鎖ホモトピー逆で, k は ϵ 鎖ホモトピー $ff^{-1}\simeq_\epsilon 1$ である. (Cf. Ranicki [19, 4.2 i)].) □

5. 相対 K-理論.

空間対 $(X, Y\subseteq X)$ のホモロジー群 $H_*(X,Y)$ は次が完全列をなすように定義された：

$$\ldots\longrightarrow H_n(Y)\longrightarrow H_n(X)\longrightarrow H_n(X,Y)\longrightarrow H_{n-1}(Y)\longrightarrow\ldots.$$

捩れや finiteness obstruction は類似な完全列で関係付けられる：

$$Wh(\rho)\longrightarrow Wh(\pi)\longrightarrow Wh(\pi,\rho)\longrightarrow\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\rho])\longrightarrow\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi]).$$

この完全列は群の任意の準同型写像 $\rho\longrightarrow\pi$ に対して定義される. $Wh(\pi,\rho)$ は有限生成射影的 $\mathbf{Z}[\rho]$加群鎖複体 C, 有限基底付き有限生成自由$\mathbf{Z}[\pi]$加群鎖複体 D, および鎖同値写像 $f:\mathbf{Z}[\pi]\otimes_{\mathbf{Z}[\rho]}C\simeq D$ の組 (C,D,f) たちの Grothendiedk群のある商として定義される. われわれは鎖ホモトピーでの domination の概念を用いて次の形の「安定完全列」:

$$Wh(Y)\longrightarrow Wh(X)\longrightarrow Wh(X,Y)\longrightarrow\widetilde{K}_0(Y)\longrightarrow\widetilde{K}_0(X)$$

を得て, 制御 finiteness obstruction の群と捩れの群を前節の相対群 $Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)$ を経由して関係付ける.

A加群鎖複体 C の domination (D,f,g,h) とは A加群鎖複体 D と鎖写像 $f:C\to D$, $g:D\to C$, および鎖ホモトピー $h:gf\simeq 1:C\to C$ のことであった. このとき C は D の鎖ホモトピーの意味での直和因子となる. A加群鎖複体 C が有限な有限生成自由A加群鎖複体 D によるdomination を持つための必要十分条件は, C が有限な有限生成射影的A加群鎖複体に鎖同値になることである. Ranicki [17] における finiteness obstruction の代数的理論では, そのような domination を用いて有限生成自由A加群のある射影

$$p\ =\ p^2\ :\ \sum_{r=0}^{\infty}D_r \longrightarrow \sum_{r=0}^{\infty}D_r$$

を明示的に構成して射影類を表すことができた:

$$[C]\ =\ [\mathrm{im}(p)]\in \widetilde{K}_0(A)\ .$$

この 'instant finiteness obstruction' を用いて§3 および §4 の制御付き $\widetilde{K}_0$- , Wh-群を互いに関係付ける.

$n>0$ とする. 包含写像 $i:Y\to X$, $j:(X,\emptyset)\to(X,Y)$ は明らかに準同型写像を引き起こす:

$$Wh(Y,p_Y,n,\epsilon)\xrightarrow{i_*}Wh(X,p_X,n,\epsilon)\xrightarrow{j_*}Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)$$

$$K_0(Y,p_Y,n,\epsilon)\xrightarrow{i_*}\widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon)\ .$$

この節ではこれらが「安定完全列」:

$$\begin{aligned}Wh(Y,p_Y,n,\epsilon)\to Wh(X,p_X,n,\epsilon)\to Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)&\\ \xrightarrow{\partial}\widetilde{K}_0(W,p_W,n,\epsilon')\to\widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon')&\end{aligned}$$

としてつなげることができることを示す. ただし W は $Y^{(4n+20)\epsilon}$ を含む X の任意の部分集合であり, ϵ' は $(12n+70)\epsilon$ 以上の任意の正の数とする.

定義. p_X 上の自由鎖複体 C の ϵ *domination* (D,f,g,h) とは, p_X 上の自由鎖複体 D と ϵ 鎖写像 $f:C\to D$, $g:D\to C$, そして ϵ 鎖ホモトピー $h:gf\simeq_\epsilon 1:C\to C$ の組をいう. そのとき C は D で ϵ *dominate* されるという.

命題 5.1. C を p_X 上の自由鎖複体, W を X の部分集合とする. $(C,1)$ がp_W 上の射影鎖複体 (D,r) に δ 鎖同値ならば, C は D で δ *dominate* される. 逆に C がp_W 上のn次元 *(f.g.)* 自由δ 鎖複体にδ *dominate* されるならば, $(C,1)$ は $p_{W^{(n+4)\delta}}$ 上の n次元 *(f.g.)* $(n+4)\delta$ 射影鎖複体に $(2n+5)\delta$ 鎖同値である.

証明 : $f:(C,1)\to(D,r)$, $g:(D,r)\to(C,1)$ を互いに逆なδ 鎖同値写像で,

$$h\ :\ gf\simeq 1\ :\ (C,1)\longrightarrow(C,1)\quad,\quad k\ :\ fg\simeq 1:(D,r)\longrightarrow(D,r)$$

が δ 鎖ホモトピーとする. このとき (D,f,g,h) が求める δ domination となる.

次に, (D,f,g,h) が C の δ domination とする. ただし D は p_W 上の n次元自由 δ 鎖複体である. $p_{W^{(n+4)\delta}}$ 上の無限 $(n+2)\delta$ 鎖複体 $\{C',d'\}$ を次のように定める :

$$C'_i\ =\ D_0\oplus D_1\oplus\ldots\oplus D_i\ ,$$

$$d'\ =\ \begin{pmatrix} fg & -d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -fhg & 1-fg & d & 0 & \ldots & 0 & 0\\ fh^2g & fhg & fg & -d & \ldots & 0 & 0\\ -fh^3g & -fh^2g & -fhg & 1-fg & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -fh^{2i-1}g & -fh^{2i-2}g & -fh^{2i-3}g & -fh^{2i-4}g & \ldots & 1-fg & d \end{pmatrix}$$

$$:\ C'_{2i}\ =\ D_0\oplus D_1\oplus\ldots\oplus D_{2i}\longrightarrow C'_{2i-1}\ =\ D_0\oplus D_1\oplus\ldots\oplus D_{2i-1}\ ,$$

$$d'\ =\ \begin{pmatrix} 1-fg & d & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ fhg & fg & -d & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -fh^2g & -fhg & 1-fg & d & \ldots & 0 & 0\\ fh^3g & fh^2g & fhg & fg & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -fh^{2i}g & -fh^{2i-1}g & -fh^{2i-2}g & -fh^{2i-3}g & \ldots & 1-fg & d \end{pmatrix}$$

$$:\ C'_{2i+1}\ =\ D_0\oplus D_1\oplus\ldots\oplus D_{2i+1}\longrightarrow C'_{2i}\ =\ D_0\oplus D_1\oplus\ldots\oplus D_{2i}\ .$$

直接計算により $d'^2 \sim_{(n+4)\delta} 0$ を確かめることができる. ここで次の公式を使うと便利である:

$$h^{2k}gf - h^{2k-1}gfh + h^{2k-2}gfh^2 - \ldots + gfh^{2k} \sim_{(2k+2)\delta} h^{2k} - dh^{2k+1} - h^{2k+1}d\ ,$$

$$h^{2k+1}gf - h^{2k}gfh + h^{2k-1}gfh^2 - \ldots - gfh^{2k+1} \sim_{(2k+3)\delta} dh^{2k+2} + h^{2k+2}d\ .$$

これらは $\sim_{2\delta} 1 - dh - hd$ を代入して証明できる. 次式で定義される δ 鎖写像 $f' : C \to C'$ と $(n+1)\delta$ 鎖写像$g' : C' \to C$ は互いに逆な $(n+1)\delta$ 鎖同値写像である.

$$f' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} : C_i \longrightarrow C'_i = D_0 \oplus \ldots \oplus D_i \qquad (d'f' \sim_{2\delta} f'd)\ ,$$

$$g' = (h^i g \quad h^{i-1}g \quad \ldots \quad hg \quad g) : C'_i = D_0 \oplus \ldots \oplus D_i \to C_i \quad (dg' \sim_{(n+2)\delta} g'd')$$

実際以下のように鎖ホモトピーが存在する.

$$h : g'f' = gf \simeq 1 : C \longrightarrow C \qquad (dh + hd \sim_{2\delta} 1 - g'f')$$

$$k' : f'g' \simeq 1 : C' \longrightarrow C' \qquad (d'k' + k'd' \sim_{(n+2)\delta} 1 - f'g')$$

ただし

$$k' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$: C'_i = D_0 \oplus D_1 \oplus \ldots \oplus D_i \longrightarrow C'_{i+1} = D_0 \oplus D_1 \oplus \ldots \oplus D_{i+1}\ .$$

E を C' の n骨格とする:

$$E : \ldots \to 0 \to C'_n \xrightarrow{d'} C'_{n-1} \to \ldots \to C'_1 \xrightarrow{d'} C'_0\ .$$

そして $q = \{q_i : E_i \to E_i\}$ を

$$q_i = 1 : E_i = C'_i \longrightarrow E_i = C'_i \qquad (0 \le i \le n-1)$$

$$q_n = \begin{cases} p : E_n = C'_n \longrightarrow E_n = C'_n & n \text{が偶数のとき} \\ 1 - p : E_n = C'_n \longrightarrow E_n = C'_n & n \text{が奇数のとき}, \end{cases}$$

と定める. ただし

$$p = \begin{pmatrix} fg & -d & 0 & \cdots \\ -fhg & 1-fg & d & \cdots \\ fh^2g & fhg & fg & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} : C'_n = D_0\oplus\ldots\oplus D_n \longrightarrow C'_n = D_0\oplus\ldots\oplus D_n .$$

言い替えれば $q_n = 1 - d'_{n+1} : C'_{n+1} = C'_n \to C'_n$ である. $i(>n)$ が偶数ならば $d'_i = p$ であり, $i(>n)$ が奇数ならば $d'_i = 1-p$ であるから$(n+4)\delta$ ホモトピー $d'^2 \sim_{(n+4)\delta} 0$ により$(n+4)\delta$ ホモトピー $p^2 \sim_{(n+4)\delta} p$ を得る. 従って q は $(n+4)\delta$ 射影である. さらに $d'_n q_n \sim_{(n+4)\delta} d'_n$ が成り立つ. これは次による:

$$0 \sim_{(n+4)\delta} d'_n d'_{n+1} = d'_n(1-q_n) = d'_n - d'_n q_n.$$

このように (E,q) は $p_{W(n+4)\delta}$ 上の n次元 $(n+4)\delta$ 射影鎖複体である. 鎖写像 $I:(C',1)\to(E,q)$, $J:(E,q)\to(C',1)$:

$$I = \begin{cases} 1 : C'_i \longrightarrow E_i = C'_i & 0\leq i\leq n-1 \text{ のとき} \\ q_n : C'_i \longrightarrow E_i = C'_i & i = n \text{ のとき} \\ 0 : C'_i \longrightarrow E_i = 0 & \text{f}\, i>n \text{ のとき} \end{cases}$$

$$J = \begin{cases} 1 : E_i = C'_i \longrightarrow C'_i & 0\leq i\leq n-1 \text{ のとき} \\ q_n : E_i = C'_i \longrightarrow C'_i & i = n \text{ のとき} \\ 0 : E_i = 0 \longrightarrow C'_i & i>n \text{ のとき} \end{cases}$$

は互いに逆な $(n+4)\delta$ 鎖同値写像である. 実際

$$IJ \sim_{(n+2)\delta} q : (E,q) \longrightarrow (E,q)$$

$$K : JI \simeq 1 : (C',1) \longrightarrow (C',1) \qquad (d'K + Kd' \sim_{(n+2)\delta} 1 - JI)$$

である. ただし

$$K = \begin{cases} 0 : C'_i \longrightarrow C'_{i+1} & 0\leq i\leq n-1 \text{ のとき} \\ 1 : C'_i = C'_n \longrightarrow C'_{i+1} = C'_n & i\geq n \text{ のとき.} \end{cases}$$

ゆえに $(C,1)$ と (E,q) は $(2n+5)\delta$ 鎖同値である. □

注意. これは Ranicki [18] の命題 3.1 の制御付きバージョンである. 第一著者は [18] における d' および p の式の符号の誤りを指摘していただいたErik Pedersen に心から感謝する. (と書いても本人には自分の名前しか読めないでしょうね.)

命題 5.2. W は X の部分集合とする. p_X 上の自由鎖複体 $(C,1)$ が p_W 上の自由鎖複体に ϵ *dominate* されるならば, C は $X - W^\epsilon$ 上 ϵ 可縮である. 逆に p_X 上の n次元 (f.g.) 自由 ϵ 鎖複体 C が$X - Y$ 上 ϵ 可縮ならば, C は$p_{Y^{(n+2)\epsilon}}$ 上のある n次元 (f.g.) 自由 ϵ 鎖複体に3ϵ *dominate* される.

証明: (D,f,g,h) を C の ϵ domination とする. f の半径は ϵ だから f は $X - W^\epsilon$ 上では 0 に等しい. ゆえに h は C の $X - W^\epsilon$ 上の ϵ 鎖縮射である.

次に Γ を C の $X - Y$ 上の ϵ 鎖縮射とする. 各整数 r に対し, 幾何的加群 D_r を次式で定める:

$$D_r \;=\; C_r(Y^{(n-r+2)\epsilon})\ .$$

境界射 $d_r : C_r \to C_{r-1}$ は半径 ϵ を持つからd_r の $Y^{(n-r+2)\epsilon}$ への制限は幾何射 $d_r : D_r \to D_{r-1}$ を定める. $d_r d_{r+1} \sim_{2\epsilon} 0 : D_{r+1} \to D_{r-1}$ は明らかである. ゆえに $\{D_r, d_r\}$ はC の「部分複体」である；すなわち包含写像 $i : D \to C$ はϵ 鎖写像である. 仮定により $1 - d\Gamma - \Gamma d : C_r \to C_r$ は$X - Y$ の上で 0 となるある幾何射 $F_r : C_r \to C_r$ に2ϵ ホモトピックである. F_r は半径 2ϵ を持つから, $F = if$ をみたす幾何射 $f_r : C_r \to D_r$ を定義する. $f = \{f_r\}$ は 3ϵ 鎖写像である. なぜならば:

$$\begin{aligned} i(df - fd) \;&=\; dF - Fd \sim_{3\epsilon} d(1 - d\Gamma - \Gamma d) - (1 - d\Gamma - \Gamma d)d \\ &\sim_{3\epsilon} -dd\Gamma + \Gamma dd \sim_{3\epsilon} 0. \end{aligned}$$

従って 2ϵ ホモトピー $d\Gamma + \Gamma d \sim_{2\epsilon} 1 - if$ を得ることができ, (D,f,i,Γ) は C の3ϵ domination である. □

∂ を定義する. C を p_X 上の n次元 f.g. 自由 ϵ 鎖複体で$X-Y$ 上で強 ϵ 可縮なものとする. すると C は上の命題により, $p_{Y^{(n+2)\epsilon}}$ 上のある n次元 f.g. 自由 ϵ 鎖複体 D に3ϵ dominate される. すると 5.1 により, $(C,1)$ は$p_{Y^{(4n+14)\epsilon}}$ 上のあるn次元 f.g. $(3n+12)\epsilon$ 射影鎖複体 (E,q) に$(6n+15)\epsilon$ 鎖同値である. X の部分集合 $W\supset Y^{(4n+20)\epsilon}$ と正の数$\epsilon'\geq(12n+70)\epsilon$ に対し, ∂ を

$$\partial([C]) \;=\; [E,q]\in\widetilde{K}_0(W,p_W,n,\epsilon')\;,$$

と定義する. ただし (E,q) は $(C,1)$ に $(6n+15)\epsilon$ 鎖同値な, $p_{Y^{(4n+14)\epsilon}}$ 上の任意の n次元 $(3n+12)\epsilon$ 射影鎖複体とする.

∂ が well-defined であることを示す. C' が p_X 上の n次元 f.g. 自由 ϵ 鎖複体で C と$Wh(X,Y,p_X,n,\epsilon)$ で同じ元を表すものとし, $(C',1)$ は $p_{Y^{(4n+14)\epsilon}}$ 上のn次元 f.g. $(3n+12)\epsilon$ 射影鎖複体 (E',q') に$(6n+15)\epsilon$ 鎖同値とする. $p_{Y^{20\epsilon}}$ 上のある n次元 f.g. 自由 40ϵ 鎖複体D, D' と p_X 上のある n次元 f.g. 自明鎖複体 T,T' に対し, 40ϵ単純同型射

$$C\oplus D\oplus T\cong_{40\epsilon,\Sigma}C'\oplus D'\oplus T'$$

が存在するとしても一般性を失わない. すると $(C,1)\oplus(D,1)$ と $(C',1)\oplus(D',1)$ は40ϵ 鎖同値である. ゆえに $(E,q)\oplus(D,1)$ と $(E',q')\oplus(D',1)$ は$(12n+70)\epsilon$ 鎖同値である. 従って (E,q) と (E',q') は $\widetilde{K}_0(W,p_W,n,\epsilon')$ で同じ元を表す.

注意. $\partial[C]$ は C の Y の近くでの振舞いのみによって決まる ; (C,d), $(\bar{C},\bar{d})$ が p_X 上の n次元自由 ϵ 鎖複体でそれぞれ $X-Y$ 上の強 ϵ 鎖縮射 Γ, $\bar{\Gamma}$ を持つとし, すべての r に対し

1. $C_r(Y^{(2n+5)\epsilon})=\bar{C}_r(Y^{(2n+5)\epsilon})$
2. $d_r|Y^{(2n+4)\epsilon}=\bar{d}_r|Y^{(2n+4)\epsilon}$

3. $\Gamma_r|Y^{(2n+4)\epsilon} = \bar{\Gamma}_r|Y^{(2n+4)\epsilon}$

が成り立つと仮定する. すると上の構成は C に対しても, また $\bar{C}$ に対しても同じ (E, q) をもたらす. さらに, $\bar{C}$ は $X - Y$ 全体で ϵ 可縮でなくても(E, q) は定義できることにも注意して欲しい. このように, $\partial([C])$ を計算するためには C を上の 1, 2 をみたす n次元自由 ϵ 鎖複体 $\bar{C}$ で置き換え, 上の 3 をみたす $Y^{(2n+4)\epsilon} - Y$ 上の ϵ 鎖縮射 $\bar{\Gamma}$ を用いればよい.

これで求める列ができた:

$$Wh(Y, p_Y, n, \epsilon) \xrightarrow{i_*} Wh(X, p_X, n, \epsilon) \xrightarrow{j_*} Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$$
$$\xrightarrow{\partial} \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon') \xrightarrow{i_*} \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon')\ .$$

合成 $j_* i_*$, ∂j_*, および $i_* \partial$ が 0 になることは容易に確かめられる.

定理 **5.3.** (1) $[C]$ が

$$j_*\ :\ Wh(X, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon)$$

の核に属すならば$[C]$ は($Wh(X, p_X, n, \bar{\epsilon})$ の元として)

$$i_*\ :\ Wh(Y^{2000\epsilon}, p_{Y^{2000\epsilon}}, n, \bar{\epsilon}) \longrightarrow Wh(X, p_X, n, \bar{\epsilon})$$

の像に入る. ただし $\bar{\epsilon} = 9000(9n + 34)\epsilon$.

(2) $[C]$ が

$$\partial\ :\ Wh(X, Y, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$$

の核に属すならば$[C]$ は($Wh(X, W^{\hat{\epsilon}}, p_X, n, \hat{\epsilon})$ の元として)

$$j_*\ :\ Wh(X, p_X, n, \hat{\epsilon}) \longrightarrow Wh(X, W^{\hat{\epsilon}}, p_X, n, \hat{\epsilon})$$

の像に入る. ただし $\hat{\epsilon} = 6000(9n + 34)\epsilon'$.

(3) $[E,q]$ が

$$i_* \;:\; \widetilde{K}_0(W,p_W,n,\epsilon') \longrightarrow \widetilde{K}_0(X,p_X,n,\epsilon')$$

の核に属すならば$[E,q]$ は($\widetilde{K}_0(W',p_{W'},n,\delta')$ の元として)

$$\partial \;:\; Wh(X,W^{240\epsilon'},p_X,n,\delta) \longrightarrow \widetilde{K}_0(W',p_{W'},n,\delta')$$

の像に入る. ただし $\delta = 180\epsilon'$, $\delta' = 180(12n+70)\epsilon'$, $W' = W^{180(4n+22)\epsilon'}$.

次の補題を用いる.

補題 5.4. C および D を自由 δ 鎖複体とする.

(1) 鎖写像 $f, f' : C \to D$ が δ 鎖ホモトピックならば, $\mathcal{C}(f)$ と $\mathcal{C}(f')$ の間に 2δ単純同型射が存在する.

(2) $\mathcal{C}(1_C : C \to C)$ はある自明鎖複体に 2δ単純同型である.

証明: (1) $h : f \simeq f'$ を δ 鎖ホモトピーとする. 求める 2δ単純同型射は次式で与えられる:

$$\begin{pmatrix} 1 & (-)^r h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;:\; \mathcal{C}(f)_r \;=\; D_r \oplus C_{r-1} \longrightarrow \mathcal{C}(f')_r \;=\; D_r \oplus C_{r-1}.$$

(2) 自明鎖複体 $T = \{T_r, d_r\}$ を

$$\begin{aligned} T_r \;&=\; C_r \oplus C_{r-1}\;, \\ d_r \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;:\; C_r \oplus C_{r-1} \longrightarrow C_{r-1} \oplus C_{r-2} \end{aligned}$$

で定める. 求める 2δ単純同型射 $\mathcal{C}(1_C) \to T$ は次式で与えられる:

$$\begin{pmatrix} (-)^r 1 & 0 \\ (-)^{r-1} d_C & 1 \end{pmatrix} \;:\; \mathcal{C}(1_C)_r \;=\; C_r \oplus C_{r-1} \longrightarrow T_r \;=\; C_r \oplus C_{r-1}. \qquad \square$$

5.3 の証明: (1) 4.1 により, $p_{Y^{20\epsilon}}$ 上のある n次元 f.g. 自由 86ϵ 鎖複体 D, D' と p_X 上のある n次元 f.g. 自明鎖複体 T, T' に対して86ϵ単純同型射:

$$f \;:\; C \oplus D \oplus T \longrightarrow D' \oplus T'$$

が存在する. $i: D \to C \oplus D \oplus T$ および $j: D' \to D' \oplus T'$ を包含写像とし, $q: D' \oplus T' \to D'$ を射影とする. 合成 $g = qfi: D \to D'$ は 100ϵ 鎖同値写像である. ゆえに $\mathcal{C}(g)$ は 300ϵ 可縮である. $\mathcal{C}(g) \oplus T'$ は $\mathcal{C}(jg: D \to D' \oplus T')$ に等しい. $jg = (jq)fi$ と fi は 100ϵ 鎖ホモトピックであるから, $\mathcal{C}(jg)$ は $\mathcal{C}(fi)$ に 200ϵ単純同型である. さらに $\mathcal{C}(fi)$ は $\mathcal{C}(i)$ に 200ϵ単純同型であることが容易にわかる. その $\mathcal{C}(i)$ は $C \oplus T \oplus \mathcal{C}(1_D: D \to D)$ に等しい. 最後に $\mathcal{C}(1_D)$ は自明な鎖複体 T'' に 200ϵ単純同型である. 合成:

$$C \oplus T \oplus T'' \cong_{200\epsilon,\Sigma} C \oplus T \oplus \mathcal{C}(1_D) = \mathcal{C}(i) \cong_{200\epsilon,\Sigma} \mathcal{C}(fi) \cong_{200\epsilon,\Sigma} \mathcal{C}(jg) = \mathcal{C}(g) \oplus T'$$

により $C \oplus T \oplus T''$ と $\mathcal{C}(g) \oplus T'$ の間の600ϵ単純同型写像を得る. $\mathcal{C}(g)$ は $Wh(Y^{2000\epsilon}, p_{Y^{2000\epsilon}}, n+1, 900\epsilon)$ の元を表す. ($\mathcal{C}(g)$ は強 900ϵ 鎖縮射 Γ を持ち, 1800ϵ ホモトピー $\Gamma^2 \sim 0$ は $Y^{2000\epsilon}$ 上で起こる.) 4.3 により, この元は $Wh(Y^{2000\epsilon}, p_{Y^{2000\epsilon}}, n, 900\epsilon)$ のある元 $[\bar{C}]$ の像になっている. $\bar{C}$ と C は $Wh(X, p_X, n, 900\epsilon)$ の中では同じ元を表すかどうかわからないが, $Wh(X, p_X, n+1, 900\epsilon)$ では同じ元を表す. 後は準同型写像 ι と τ の可換図式から主張が導かれる.

(2) 定義により $p_{Y^{(4n+14)\epsilon}}$ 上のある n次元 f.g. $(3n+12)\epsilon$ 射影鎖複体 (E, q) で $(C, 1)$ と$(6n+15)\epsilon$ 鎖同値なものがあり, $\partial[C] = [E, q] \in \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$ とかける. $\widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$ では $[E, q] = 0$ だから(E, q) は p_W 上のある n次元 f.g. 自由 $30\epsilon'$ 鎖複体 $(D, 1)$ に$60\epsilon'$ 鎖同値である. 従って $61\epsilon'$ 鎖同値写像 $f: D \to C$ が得られる. $\mathcal{C}(f)$ は p_X 上の $(n+1)$次元自由 $61\epsilon'$ 鎖複体で$183\epsilon'$ 可縮である. 従って強 $549\epsilon'$ 可縮であり, $Wh(X, p_X, n+1, 549\epsilon')$ の元を表す. 4.5 により, $\mathcal{C}(f)$ と C は $Wh(X, W, p_X, n+1, 549\epsilon')$ の同じ元を表す. 4.3 により $Wh(X, p_X, n, 549\epsilon')$ の元 $[\bar{C}]$ で$[\mathcal{C}(f)]$ にうつされるものがある. ι と τ の可換図式を用いて, $\bar{C}$ と C が $Wh(X, W^{549(90n+190)\epsilon'}, p_X, n, 549(90n+340)\epsilon')$ の同じ元を表すことが示される.

(3) (E,q) はp_X 上の n次元 f.g.自由 $30\epsilon'$ 鎖複体 $(C,1)$ と$60\epsilon'$ 鎖同値である. C は $X-W^{60\epsilon'}$ 上で $60\epsilon'$ 可縮であり, 従って $X-W^{240\epsilon'}$ 上で強 $180\epsilon'$ 可縮である. ゆえに C は $Wh(X,W^{240\epsilon'},p_X,n,180\epsilon')$ の元を定め,

$$\partial[C] \;=\; [E,q] \in \widetilde{K}_0(W',p_{W'},n,\delta')$$

となる. □

6. 切除写像とマイヤー・ビートリス列.

この節では X は 2 つの閉部分集合 X_- と X_+ の和であると仮定し, その共通部分を $X_0 = X_- \cap X_+$ とかく. 通常のホモロジーにおける切除同型:

$$H_*(X_+,X_0) \;\cong\; H_*(X,X_-)$$

やマイヤー・ビートリス完全列:

$$\ldots \to H_n(X_0) \to H_n(X_+) \oplus H_n(X_-) \to H_n(X) \to H_{n-1}(X_0) \to \ldots$$

は代数的 K-理論において種々な類似を持つ. われわれはまず制御ホワイトヘッド群における切除写像を定義し, 次にそれを用いて制御 K-理論における次のようなマイヤー・ビートリス列:

$$Wh(X_0) \to Wh(X_+) \oplus Wh(X_-) \to Wh(X) \to \widetilde{K}_0(X_0) \to \widetilde{K}_0(X_+) \oplus \widetilde{K}_0(X_-)$$

を導入する. 普通のホモロジーや Ranicki [21] の有界制御 K-理論における完全列の場合と同様に, 次のような鎖複体レベルでのマイヤー・ビートリス分解が重要となる: X 上の自由 ϵ 鎖複体 C は X_+ および X_- の近傍上の鎖複体 C_+ , C_- の「和」 $C = C_+ + C_-$ で表せる. ただし, C が可縮であるとき C_+, C_- は finitely dominated ではあるが一般には可縮ではない.

X_- , X_+ が閉集合であるという仮定は次のように用いられる. 仮にある X の道が X_- の点と X_+ の点を結んでいるならば必ず X_0 を通過しなければならない. 道 $\gamma : [0,s] \to X$ が $\gamma(0) \in X_-$ および $\gamma(s) \in X_+$ をみたしさらにある $\delta > 0$ に関し $\gamma([0,s]) \subset \{\gamma(0)\}^\delta$ が成り立つとする. 区間の連結性により $\gamma(t) \in X_0$ をみたす $t \in [0,s]$ が存在する. $\{\gamma(0)\}^\delta \subset \{\gamma(t)\}^{2\delta}$ だから, $\gamma([0,s])$ は $X_0^{2\delta}$ に含まれる. 以上の議論を $X_-^\delta = X_- \cup X_0^\delta$（これは正しくない）の替わりとして用いる.（但しこの仮定は本質的ではない. 閉であることを仮定しなくても, 以下の $X_\pm \cup V^\delta$ という形の集合をすべて $(X_\pm \cup V)^\delta$ などと置き換えれば議論は正しい.）

さて, 包含写像で誘導された準同型写像：

$$i_* \ : \ Wh(X_+, X_0, p_{X_+}, n, \epsilon) \longrightarrow Wh(X, X_-, p_X, n, \epsilon)$$

の安定的逆写像

$$\mathrm{exc} \ : \ Wh(X, X_-, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow Wh(X_+, X_+ \cap X_0^{(n+300)\epsilon}, p_{X_+}, n, 90\epsilon)$$

を定義しよう. $Wh(X, X_-, p_X, n, \epsilon)$ の元を表す鎖複体 $\{C, d\}$ に対し, 次の条件をみたす p_{X_+} 上の任意の n 次元 f.g.自由 90ϵ 複体$\{C_+, d_+\}$ を考える：

1. $(C_+)_r(X_+ - X_0^{(n+180)\epsilon}) = C_r(X_+ - X_0^{(n+180)\epsilon})$, かつ
2. $d_+ = d_C$ over $X_+ - X_0^{(n+270)\epsilon}$.

(そのような C_+ は例えば $(C_+)_r = C_r(X_+ - X_0^{r\epsilon})$ により得られる.）Γ を C の $X - X_-$ 上の強 ϵ 鎖縮射とする. このとき

$$\Gamma_+ \ = \ \begin{cases} \Gamma & \text{over } X_+ - X_0^{(n+270)\epsilon} \\ 0 & \text{over } X_+ \cap X_0^{(n+270)\epsilon} \end{cases}$$

は C_+ の $X_+ - X_0^{(n+300)\epsilon}$ 上の強 90ϵ 鎖縮射となる. 従って C_+ は $Wh(X_+, X_+ \cap X_0^{(n+300)\epsilon}, p_{X_+}, n, 90\epsilon)$ の元を表す. この元は 4.5 により C_+ の選び方にはよら

ない．この対応 $[C]\mapsto[C_+]$ が well-defined な求める切除準同型写像 exc を定めることを主張する．それを示すには40ϵ 単純同型な鎖複体 C , C' に対して上の条件をみたす C_+ , C'_+ で互いに 3600ϵ 単純同型なものがとれることを示せばよい．$f:C\to C'$ を 40ϵ 単純同型写像としC_+ を $(C_+)_r=C_r(X_+-X_0^{(r+40)\epsilon})$ とおく．局所化 $g=f_{[X_-\cup X_0^{(n+160)\epsilon}]}$ を考える．部分集合 $X_\pm$ は X で閉だから, g は $X_-\cup X_0^{(n+80)\epsilon}$ 上で幾何的であり, $X_+-X_0^{(n+200)\epsilon}$ 上で $g=f$ である．C' の境界射を gdg^{-1} に置き換えて新しい鎖複体 C'' を作れ．ただし d は C の境界射である．C'' と C' は $X_+-X_0^{(n+250)\epsilon}$ 上では(境界射の 81ϵ ホモトピーを除いて) 一致する．120ϵ 単純同型写像 $g:C\to C''$ は(半径が 40ϵ なので) C_+ から C'' のある幾何加群部分複体 C'_+ への幾何的な40ϵ 単純同型写像を定める．すると $C'_r(X_+-X_0^{(n+80)\epsilon})=(C'_+)_r(X_+-X_0^{(n+80)\epsilon})$, であり$d_{C'_+}=d_{C''}\sim_{81\epsilon}d_{C'}$ over $X_+-X_0^{(n+250)\epsilon}$ となる．ゆえに C_+ と C'_+ は (up to ホモトピーで) 求める条件をみたす．従って exc は well-defined である．

準同型写像 i_* , exc は互いに安定的逆写像である；正確にいえば, 次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc}
Wh(X_+,X_0,p_{X_+},n,\epsilon) & \xrightarrow{\quad i_*\quad} & Wh(X,X_-,p_X,n,\epsilon)\\
\downarrow & & \|\\
Wh(X_+,X_+\cap X_0^{(n+300)\epsilon},p_{X_+},n,90\epsilon) & \xleftarrow[\text{exc}]{} & Wh(X,X_-,p_X,n,\epsilon)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Wh(X_+,X_+\cap X_0^{(n+300)\epsilon},p_{X_+},n,90\epsilon) & \xleftarrow{\quad \text{exc}\quad} & Wh(X,X_-,p_X,n,\epsilon)\\
\| & & \downarrow\\
Wh(X_+,X_+\cap X_0^{(n+300)\epsilon},p_{X_+},n,90\epsilon) & \xrightarrow[i_*]{} & Wh(X,X_-^{(n+300)\epsilon},p_X,n,90\epsilon)
\end{array}$$

ただし縦の写像は包含写像により誘導される準同型写像である．

さて W を X の部分集合で $X_0^{400(n+10)\epsilon}$ $(\supset (X_0^{(n+300)\epsilon})^{(4n+20)\cdot 90\epsilon})$ を含むものとする. また ϵ' は $(12n+70)\cdot 90\epsilon$ 以上の任意の正の数とする. このとき準同型写像 $\partial_+ : Wh(X, p_X, n, \epsilon) \to \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$ を次の合成で定義する:

$$Wh(X, p_X, n, \epsilon) \to Wh(X, X_-, p_X, n, \epsilon) \xrightarrow{\text{exc}} Wh(X_+, X_+ \cap X_0^{(n+300)\epsilon}, p_{X_+}, n, 90\epsilon)$$
$$\xrightarrow{\partial} \widetilde{K}_0(X_+ \cap W, p_{X_+\cap W}, n, \epsilon') \to \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon') .$$

同様に準同型写像 $\partial_- : Wh(X, p_X, n, \epsilon) \to \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$ を X_+ と X_- の役目を入れ換えて定義する.

命題 6.1. $\partial_+ + \partial_- = 0$.

証明: 準同型写像 $\partial_+ + \partial_-$ は次のように分解できる:

$$Wh(X, p_X, n, \epsilon) \to Wh(X, p_X, n, 90\epsilon) \to Wh(X, X_0^{(n+300)\epsilon}, p_X, n, 90\epsilon)$$
$$\xrightarrow{\partial} \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$$

また最後のふたつの写像の合成は 0 である. □

これでマイヤー・ビートリス列が得られた:

$$Wh(X_0, p_{X_0}, n, \epsilon) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_- \\ i_+ \end{pmatrix}} Wh(X_-, p_{X_-}, n, \epsilon) \oplus Wh(X_+, p_{X_+}, n, \epsilon)$$
$$\xrightarrow{(j_-\ \ j_+)} Wh(X, p_X, n, \epsilon) \xrightarrow{\partial_+ = -\partial_-} \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$$
$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_- \\ i_+ \end{pmatrix}} \widetilde{K}_0(X_- \cup W, p_{X_-\cup W}, n, \epsilon') \oplus \widetilde{K}_0(X_+ \cup W, p_{X_+\cup W}, n, \epsilon')$$

ただし $i_\pm$, $j_\pm$ は包含写像で誘導された準同型写像である. 合成 $(j_-\ \ j_+)\begin{pmatrix} -i_- \\ i_+ \end{pmatrix}$, $\partial_+(j_-\ \ j_+)$ は明らかに 0 であり, 合成 $\begin{pmatrix} -i_- \\ i_+ \end{pmatrix}\partial_+$ も 6.1 により 0 である. この列は次の意味で安定的に完全である. (p は p_X の適当な制限を表す.)

定理 6.2. (1) $([C_-], [C_+]) \in Wh(X_-, p, n, \epsilon) \oplus Wh(X_+, p, n, \epsilon)$ が $(j_-\ \ j_+)$ の核に属すならば$([C_-], [C_+])$ は$(Wh(X_- \cup X_0^\gamma, p, n, \gamma) \oplus Wh(X_+ \cup X_0^\gamma, p, n, \gamma)$ の元として)

$$\begin{pmatrix} -i_- \\ i_+ \end{pmatrix} : Wh(X_0^\gamma, p, n, \gamma) \longrightarrow Wh(X_- \cup X_0^\gamma, p, n, \gamma) \oplus Wh(X_+ \cup X_0^\gamma, p, n, \gamma)$$

の像に入る. ただし $\gamma = 1200\epsilon$.

(2) $[C] \in Wh(X, p_X, n, \epsilon)$ が∂_+ 核に属すならば $[C]$ は($Wh(X, p_X, n, \hat{\epsilon})$ の元として)

$$(j_-\ j_+)\ :\ Wh(X_- \cup \hat{W}, p, n, \hat{\epsilon}) \oplus Wh(X_+ \cup \hat{W}, p, n, \hat{\epsilon}) \longrightarrow Wh(X, p_X, n, \hat{\epsilon})$$

の像に入る. ただし $\hat{W} = W^{13\cdot 10^6(9n+34)\epsilon'}$, $\hat{\epsilon} = 54 \cdot 10^6(9n+34)^2\epsilon'$.

(3) $[E, q] \in \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon')$ が$\begin{pmatrix} -i_- \\ i_+ \end{pmatrix}$ の核に属すならば $[E, q]$ は($\widetilde{K}_0(V, p_V, n, \delta')$ の元として)

$$\partial_+ : Wh(X, p_X, n, \delta) \longrightarrow \widetilde{K}_0(V, p_V, n, \delta')$$

の像に入る. ただし $\delta = 72 \cdot 180(12n+70)\epsilon'$, $\delta' = 90 \cdot 72 \cdot 180(12n+70)^2\epsilon'$, $V = W^{400(n+10)\delta}$.

証明: (1) 4.1 により, ある自明な T, T' に対し 86ϵ 単純同型写像$f : C_- \oplus C_+ \oplus T' \to T$ が存在する. C_- , C_+ をそれぞれ $C_- \oplus T'(X_-)$, $C_+ \oplus T'(X - X_-)$ で置き換えることにより f が$C_- \oplus C_+$ と T の間の 86ϵ 単純同型写像であるとしてよい. f' を f の $X_- \cup X_0^{2\cdot 86\epsilon}$ の外への局所化とすると, f' は $X_- \cup X_0^{86\epsilon}$ 上で幾何的で $X_+ - X_0^{3\cdot 86\epsilon}$ 上で f に等しい. T の境界射を $f'(d_{C_-} \oplus d_{C_+})(f')^{-1}$ に取り替える. これにより得られる 200ϵ 鎖複体を E とおく. E の境界射は $X_+ - X_0^{400\epsilon}$ では d_T に 172ϵ ホモトピックである. ゆえに f' は$C_- \oplus C_+$ から $X_- \cup X_0^{800\epsilon}$ 上の 200ϵ 鎖複体と自明な鎖複体との直和への 259ϵ 単純同型写像である. f' は $X_- \cup X_0^{86\epsilon}$ 上幾何的で半径 86ϵ を持つから, f' の中の道で C_- の基底元から出ているものを捨て去れば259ϵ 単純同型写像 $g : C_+ \to D_+ \oplus T''$ を得る. ただし D_+ は $p_{X_0^{800\epsilon}}$ 上の 200ϵ 鎖複体でT'' は自明な鎖複体 $T(X_+ - X_0^{600\epsilon})$ を表す. D_+ は強 1200ϵ 可縮で $Wh(X_+ \cup X_0^{800\epsilon}, p, n, 1200\epsilon)$ の中でC_+ と同じ元を表す.

345ϵ 単純同型写像$f(1_{C_-} \oplus g^{-1}) : C_- \oplus D_+ \oplus T'' \to C_- \oplus C_+ \to T$ は T'' で恒等写像にホモトピックであるから, その部分を取り去れば$C_- \oplus D_+$ から自明

な鎖複体 $T(X_- \cup X_0^{600\epsilon})$ への345ϵ 単純同型写像を得る. ゆえに $-[D_+] = [C_-]$ が $Wh(X_- \cup X_0^{800\epsilon}, p, n, 1200\epsilon)$ で成立する.

(2) C_+ を切除写像 exc の構成のときのようにとる. すると次の図式の第 2 列の $[C_+]$ は ∂ の核に属す:

$$
\begin{array}{ccccc}
[C_+] \in Wh(X_+, X_+ \cap X_0^{(n+300)\epsilon}, p, n, 90\epsilon) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{K}_0(X_+ \cap W, p, n, \epsilon') & \ni & \partial[C_+] \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
[C_+] \in Wh(X_+ \cup W, X_0^{(n+300)\epsilon}, p, n, 90\epsilon) & \xrightarrow{\partial} & \widetilde{K}_0(W, p, n, \epsilon') & \ni & \partial_+[C] = 0
\end{array}
$$

ただし縦は包含写像で誘導される写像である. 5.3(2) により, $Wh(X_+ \cup W, p, n, \delta)$ の中の元 $[\hat{C}_+]$ で, $Wh(X_+ \cup W, W^\delta \cap (X_+ \cup W), p, n, \delta)$ の中で$[\hat{C}_+] = [C_+]$ をみたすものが存在する. 従って $\delta = 6000(9n+34)\epsilon'$ とおくとき, $Wh(X, W^\delta, p, n, \delta)$ の中でも$[\hat{C}_+] = [C_+]$ となっている.

$\partial_- = -\partial_+$ であるから$[\hat{C}_-] \in Wh(X_- \cup W, p, n, \delta)$ で$Wh(X_- \cup W, W^\delta \cap (X_- \cup W), p, n, \delta)$ の中で$[\hat{C}_-] = [C_-]$ をみたすものが存在する. ただし $\{C_-, d_-\}$ は p_{X_-} 上の n 次元自由 90ϵ 鎖複体で$(C_-)_r(X_- - X_0^{(n+180)\epsilon}) = C_r(X_- - X_0^{(n+180)\epsilon})$, $d_- = d_C$ over $X_- - X_0^{(n+270)\epsilon}$ をみたすものとする. 4.5 により, $Wh(X, W^\delta, p, n, \delta)$ で $[C] = [C_-] + [C_+]$ である. ゆえに $Wh(X, W^\delta, p, n, \delta)$ で $[C] = [\hat{C}_-] + [\hat{C}_+]$ となる. 5.3(1) を $[C] - [\hat{C}_-] - [\hat{C}_+] \in Wh(X, p, n, \delta)$ に対し用いると$[D] \in Wh(W^{2001\delta}, p, n, \hat{\epsilon})$ でi_* により $[C] - [\hat{C}_-] - [\hat{C}_+] \in Wh(X, p, n, \hat{\epsilon})$ にうつされるものが存在する. ただし $\hat{\epsilon} = 9000(9n+34)\delta$. 準同型写像

$$Wh(X_- \cup W^{2001\delta}, p, n, \hat{\epsilon}) \oplus Wh(X_+ \cup W^{2000\delta}, p, n, \hat{\epsilon}) \xrightarrow{(j_- \quad j_+)} Wh(X, p, n, \hat{\epsilon})$$

は $([\hat{C}_-] + [D], [\hat{C}_+])$ を $[C]$ にうつす. $W^{2001\delta}$ および $W^{2000\delta}$ を$W^{13 \cdot 10^6 (9n+34)\epsilon'}$ で置き換えて (2) を得る.

(3) 5.3(3) により元

$$[C_+] \in Wh(X_+ \cup W, (X_+ \cup W) \cap W^{240\epsilon'}, p, n, 180\epsilon')$$

$$[C_-] \in Wh(X_- \cup W, (X_- \cup W) \cap W^{240\epsilon'}, p, n, 180\epsilon')$$

で

$$\begin{aligned} \partial[C_+] &= [E,q] \in \widetilde{K}_0((X_+ \cup W) \cap W', p, n, \gamma) \\ \partial[C_-] &= [E,q] \in \widetilde{K}_0((X_- \cup W) \cap W', p, n, \gamma) \end{aligned}$$

をみたすものが存在する．ただし$W' = W^{180(4n+22)\epsilon'}$，$\gamma = 180(12n+70)\epsilon'$．定義により$\partial[C_+]$ (resp. $\partial[C_-]$) は$(C_+, 1)$ (resp. $(C_-, 1)$) に γ 鎖同値な$p_{W'}$ 上の γ 射影鎖複体 (E_+, q_+) (resp. (E_-, q_-)) で表される．3.1 により $p_{W'}$ 上の自由 γ 鎖複体 F, G で

$$(E_+, q_+) \oplus (F, 1) \simeq_{6\gamma} (E_-, q_-) \oplus (G, 1)$$

をみたすものがある．ゆえに 8γ 鎖同値写像$f : C_- \oplus G \to C_+ \oplus F$ がある．$\mathcal{C}(f)$ は $(n+1)$ 次元強 72γ 可縮である．4.3 の構成を用いて n 次元強 72γ 可縮鎖複体$\{\widehat{\mathcal{C}(f)}, \hat{d}\}$ を作れ．構成方法により $\widehat{\mathcal{C}(f)}_r(X_+ - W') = (C_+)_r(X_+ - W')$ かつ $\hat{d}_r = d_{C_+}$ over $X_+ - (W')^{72\gamma}$ である．ゆえに ∂_+ は $[\widehat{\mathcal{C}(f)}] \in Wh(X, p_X, n, 72\gamma)$ を $[E, q]$ にうつす．□

7. $M \times S^1$ の制御ホワイトヘッド群．

$\pi \times \mathbf{Z}$ のホワイトヘッド群に関して分裂短完全列：

$$0 \longrightarrow Wh(\pi) \xrightarrow{i_!} Wh(\pi \times \mathbf{Z}) \xrightarrow{B \oplus N_+ \oplus N_-}$$

$$\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi]) \oplus \widetilde{\mathrm{Nil}}_0(\mathbf{Z}[\pi]) \oplus \widetilde{\mathrm{Nil}}_0(\mathbf{Z}[\pi]) \longrightarrow 0$$

が知られている（Bass [1, XII]）．ここで $i_!$ は包含写像 $i : \pi \longrightarrow \pi \times \mathbf{Z}$ の誘導する写像．幾何学的には B はコンパクト多様体 M から有限 CW 複体 X と S^1 の直積へのホモトピー同値写像 $f : M \longrightarrow X \times S^1$ の捩れ$\tau(f) \in Wh(\pi \times \mathbf{Z})$ に M の無限

巡回被覆$\bar{M} = f^*(X \times \mathbf{R})$ の 2 つの end $\bar{M}^{\pm} = \bar{f}^{-1}(\mathbf{R}^{\pm})$ のうち一方のSiebenmann end obstruction を対応させて定義される：

$$B\tau(f) \;=\; [\bar{M}^{+}] \;=\; -[\bar{M}^{-}] \in \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi])\ .$$

B は単射

$$\bar{B}\ :\ \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi]) \longrightarrow Wh(\pi \times \mathbf{Z})\ ;\ [P] \longrightarrow \tau(z : P[z, z^{-1}] \longrightarrow P[z, z^{-1}])$$

により分裂される. この分裂写像はRanicki [20] においては$\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi])$ の $Wh(\pi \times \mathbf{Z})$ への'algebraically significant injection' と呼んで, 'geometrically significant injection' $[P] \to \tau(-z : P[z, z^{-1}] \to P[z, z^{-1}])$ と区別される. こちらの写像の像は $Wh(\pi \times \mathbf{Z})$ の中の transfer invariant な元の作る部分群になっている. [22] においてわれわれはこの分裂短完全列の制御付きの場合の類似として次のような「安定」分裂短完全列を得た：

$$0 \to Wh(X, p_X, n, \epsilon) \xrightarrow{i_*^+} Wh(X \times S^1, p_X \times 1, n, \epsilon) \xrightarrow{B'} \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon') \to 0.$$

$\widetilde{\mathrm{Nil}}$ の項は現れない. この節では直接この「安定」短完全列には触れず, 応用に必要な次の定理とその系を述べる. 定理に現れる B と上の B' の関係については [22] を参照されたい.

定理 7.1. $p_X : M \to X$ を制御写像とする. 任意の $n > 0, \delta > 0$, $\epsilon \geq 18\delta$ に対し次の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc}
Wh(X, p'_X, n, 18\delta) & \xleftarrow{\ \bar{B}\ } & \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \delta) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Wh(X, p'_X, n, \epsilon) & \xrightarrow[B]{} & \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \kappa_n \epsilon)
\end{array}$$

ただし p'_X は次の制御写像：

$$p'_X \ : \ M \times S^1 \xrightarrow{\text{projection}} M \xrightarrow{p_X} X \ ,$$

縦の写像は制御を緩める安定化写像, そして$\kappa_n = 90(12n+70)$ とする.

7.1 の証明には（上の安定完全列でも用いられている）次の形の制御写像が重要である：

$$p_X \times 1_\Delta \ : \ M \times \Delta \longrightarrow X \times \Delta.$$

ただし $\Delta \subset \mathbf{R}$ または S^1. S^1 は商 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と考え $\mathbf{R}$ のリーマン計量から誘導される距離を与える. 射影 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$ を π と書く. また距離空間の直積にはいわゆる「最大」距離を用いる.

次の補題の条件はややテクニカルであるが, Δ としてはユークリッド空間の中の単体やもっと具体的には区間$[-s,s] \subset \mathbf{R}$ を考え, $p_{X\times\Delta}$ としては $p_X \times 1_\Delta$ を思い浮かべていただきたい.

補題 7.2. Δ はコンパクト距離空間であり, Δ から一点 $v \in \Delta$ への強変形レトラクション$\{r_t\}_{0\le t\le 1}$ ですべての $x, y \in \Delta$, $t \in [0,1]$ に対し$d(r_t(x), r_t(y)) \le d(x,y)$ となるものがあるとする. $p_{X\times\Delta} : N \to X \times \Delta$ は制御写像であり, N から $p^{-1}_{X\times\Delta}(X \times \{v\})$ への強変形レトラクション $\{R_t\}$ で, $X \times \Delta$ の $X \times \{v\}$ への強変形レトラクション$\{1_X \times r_t\}$ を覆うものがあると仮定する. $p_X : p^{-1}_{X\times\{v\}} \to X \times \{v\} = X$ を $p_{X\times\Delta}$ の制限とする. このとき任意の $n \ge 0$, $\epsilon > 0$ に対し同型が成り立つ：

$$\widetilde{K}_0(X \times \Delta, p_{X\times\Delta}, n, \epsilon) \ \cong \ \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$$

$$Wh(X \times \Delta, p_{X\times\Delta}, n+1, \epsilon) \ \cong \ Wh(X, p_X, n+1, \epsilon).$$

証明： $\widetilde{K}_0$ の場合の証明を述べる. 同型写像は

$$(R_1)_* \ : \ \widetilde{K}_0(X \times \Delta, p_{X\times\Delta}, n, \epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \epsilon)$$

で与えられる. 包含写像 $i : p_{X\times\Delta}^{-1} \to N$ の誘導写像 i_* が逆を与える. 合成 $(R_1)_* i_*$ は明らかに恒等写像である. $i_*(R_1)_* = 1$ を示すには各$[E,q] \in \widetilde{K}_0(X \times \Delta, p_{X\times\Delta}, n, \epsilon)$ に対し (E,q) と $(R_1)_\sharp(E,q)$ が同じ類を表すことを言えばよい. だがこれは明らかである. なぜならば区間の細分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ を十分細かく取れば各 $i = 0, \cdots, N-1$ に対し$(R_{t_i})_\sharp(E,q)$ と $(R_{t_{i+1}})_\sharp(E,q)$ はϵ 同型にできるからである. その同型写像はホモトピー $\{R_t\}_{t_i \le t \le t_{i+1}}$ の跡で与えられる.

Wh の場合も同様. □

7.1 の証明: まず準同型写像

$$B \ : \ Wh(X, p'_X, n, \epsilon) \longrightarrow \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \kappa_n \epsilon)$$

を任意の $n > 0$, $\epsilon > 0$ に対し定義する. C を $p'_X : M \times S^1 \to X$ 上の n 次元強 ϵ 可縮 f.g. 自由ϵ 鎖複体とする. $\tilde{C}$ を C の $1_M \times \pi : M \times \mathbf{R} \to M \times S^1$ による引き戻しとする. $\tilde{C}$ は有限生成ではない. しかし, 次の意味で M-局所有限である：直積空間 $M \times N$ 上の幾何加群が M-局所有限であるとは, 任意の $y \in N$ に対し N における y のある近傍 U で $M \times U$ が高々有限個の基底元を含むものがとれることを言う. $M \times N$ 上の幾何加群鎖複体 C が M-局所有限であるとは各 C_r が M-局所有限であることを言う.

定義. $q_X : M \times N \to X$ を制御写像とする. $\widetilde{K}_0^M(X, q_X, n, \epsilon)$ $(n \ge 0)$ および $Wh^M(X, Y, q_X, n, \epsilon)$ $(n \ge 1)$ は §§3 および 4 の定義において有限生成鎖複体のかわりに M-局所有限鎖複体を用いたものとする.

$\widetilde{K}_0$ や Wh をそれぞれ $\widetilde{K}_0^M$ や Wh^M で置き換えても, 前節までの議論は全く同様に成り立つ.

B の構成を続ける. $\tilde{C}$ は X で計ると強 ϵ 可縮であるが, $p_X \times 1_{\mathbf{R}} : M \times \mathbf{R} \to X \times \mathbf{R}$

を用いた場合は必ずしもそうではない. しかし構成から、十分大きな数 α に対し, 強 α 可縮になっている。K を正の数とし, 1 次関数 $\varphi^K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x/K$ を考える. もし K が十分大ならば $\varphi_\sharp^K(\tilde{C})$ は$p_X \times 1_{\mathbf{R}}$ 上の M-局所有限 n次元強 ϵ 可縮な自由ϵ 鎖複体となり, $Wh^M(X \times \mathbf{R}, p_X \times 1_{\mathbf{R}}, n, \epsilon)$ の元を表す. $B([C])$ をこの元の次の写像による像として定義する:

$$Wh^M(X \times \mathbf{R}, p_X \times 1_{\mathbf{R}}, n, \epsilon) \xrightarrow{\partial_+} \widetilde{K}_0^M(X \times J, p_X \times 1_J, n, \kappa_n\epsilon)$$

$$= \widetilde{K}_0(X \times J, p_X \times 1_J, n, \kappa_n\epsilon) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \kappa_n\epsilon) .$$

ただし ∂_+ は$X \times (\mathbf{R}; (-\infty, 0], [0, \infty))$ のマイヤー・ビートリス列の連結準同型写像で, J はある区間 $[-s, s]$, そして最後の写像はレトラクション $M \times J \to M$ によって誘導される 7.2 の同型写像とする. 最後にレトラクションがあるので $[\varphi_\sharp^K(\tilde{C})]$ の$\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \kappa_n\epsilon)$ の中の像は, C を固定したとき, 縮小に用いた K には無関係となる. $[C] = [C'] \in Wh(X, p'_X, n, \epsilon)$ と仮定しよう. 十分大きな K を使えば $Wh^M(X \times \mathbf{R}, p_X \times 1_{\mathbf{R}}, n, \epsilon)$ の中で$[\varphi_\sharp^K(\tilde{C})] = [\varphi_\sharp^K(\tilde{C}')]$ となる. ゆえに B は well-defined である. 準同型写像になることは明らかである.

次に

$$\bar{B} \ : \ \widetilde{K}_0(X, p_X, n, \delta) \longrightarrow Wh(X, p'_X, n, 18\delta)$$

を任意の $n > 0$, $\delta > 0$ に対して定義する. (A, p) を p_X 上の δ 射影加群とし, $P = \pi(0) \in S^1$ で生成される S^1 上の幾何加群 $D = \mathbf{Z}[\{P\}]$ を考える. 道 $t : [0, 1] \to \mathbf{R}$ を $t(\theta) = \theta \ (0 \leq \theta \leq 1)$ で定め, z を P から P への道 $(P, \pi \circ t : [0, 1] \to S^1, P)$ とする. 準同型写像 $\bar{B}_0$ を次式で定める:

$$\bar{B}_0 \ : \ \widetilde{K}_0(X, p_X, \delta) \longrightarrow Wh(X, p'_X, 2\delta) ;$$

$$[A, p] \longrightarrow [f_p = (1 - p) \otimes 1 + p \otimes z \ : \ A \otimes D \to A \otimes D] .$$

幾何加群のテンソル積や幾何射のテンソル積は山崎 [26] に定義されている. 簡単に復習しておく. $\mathbf{Z}[R]$, $\mathbf{Z}[S]$ をそれぞれ M および N 上の幾何加群

とする．そのテンソル積 $\mathbf{Z}[R]\otimes\mathbf{Z}[S]$ は $\mathbf{Z}[R\times S:|R|\times|S|\to M\times N]$ で定める．$r=(|r|,[r])\in R$ と $s=(|s|,[s])\in S$ に対し，$R\times S$ の元 $((|r|,|s|),([r],[s]))$ を $r\otimes s$ と書く．$r\in R$ から $r'\in R'$ への道 $(r,\rho:[0,\tau]\to M,r')$ と $s\in S$ から $s'\in S'$ への道 $(s,\sigma:[0,\tau']\to N,s')$ に対し，それらのテンソル積 $(r,\rho,r')\otimes(s,\sigma,s')$ を道 $(r\otimes s,\rho\otimes\sigma,r'\otimes s')$ で定義する．但し $\rho\otimes\sigma:[0,\tau+\tau']\to M\times N$ は次の合成道とする：

$$\rho\otimes\sigma(x)=\begin{cases}(\rho(x),\sigma(0) & (\ 0\le x\le\tau),\\ (\rho(\tau),\sigma(x-\tau)) & (\tau\le x\le\tau+\tau').\end{cases}$$

幾何射のテンソル積はこれを双線形に拡張して定義する．一般に等式ではなく，ホモトピー $(f'\otimes g')(f\otimes g)\sim f'f\otimes g'g$ が成り立つ．

$\bar{B}_0$ の構成に戻る．f_p が X で計って δ 同型写像になることは容易にわかる；逆は $(1-p)\otimes 1+p\otimes z^{-1}$ で与えられる．自由加群 $(E,1_E)$ を (A,p) に直和すると $f_{p\oplus 1_E}=f_p\oplus(1_E\otimes z)$ は f_p と同じ元を表す．次に $g:(A,p)\to(A',p')$ が δ 射影加群の間の δ 同型写像とし，g^{-1} をその逆とする．δ 同型写像 $F:(A\otimes D)\oplus(A'\otimes D)\to(A\otimes D)\oplus(A'\otimes D)$ を

$$F\ =\ \begin{pmatrix}(1-p)\otimes 1 & g^{-1}\otimes 1\\ g\otimes 1 & (1-p')\otimes 1\end{pmatrix}\qquad(F^2\sim_{2\delta}1)\ ,$$

と定義すると，ホモトピー

$$(1\oplus f_{p'})F\sim_{5\delta}F(f_p\oplus 1)$$

を得る．4.8 により $Wh(X,p'_X,2\delta)$ で $[f'_p]=[f_p]$ が成り立つ．ゆえに $\bar{B}_0$ は well-defined である．求める $\bar{B}$ は次の合成で定義する：

$$\widetilde{K}_0(X,p_X,n,\delta)\xrightarrow{\sigma}\widetilde{K}_0(X,p_X,9\delta)\xrightarrow{\bar{B}_0}Wh(X,p'_X,18\delta)\xrightarrow{\iota}Wh(X,p'_X,n,18\delta)\ .$$

7.1 の図式の可換性は容易に確かめることができる． □

7.1 を用いて 6.2(2) を書き換える. p_X, X_+, X_-, X_0 を §6 のようにとる. 与えられた $\epsilon > 0$ に対し X の閉集合 W を$X_0^{400(n+10)\epsilon}$ を含むようにとり, ϵ'' を $18\kappa_n\epsilon$ 以上の任意の正の数とする. p'_W を次の合成とする:

$$p_X^{-1}(W) \times S^1 \xrightarrow{\text{projection}} p_X^{-1}(W) \xrightarrow{p_X} W .$$

$\bar{\partial}_+ : Wh(X, p_X, n, \epsilon) \to Wh(W, p'_W, n, \epsilon'')$ を次の合成で定義する:

$$Wh(X, p_X, n, \epsilon) \xrightarrow{\partial_+} \widetilde{K}_0(W, p_W, n, \epsilon''/18) \xrightarrow{\bar{B}} Wh(W, p'_W, n, \epsilon'') .$$

このとき次の合成は 0 である:

$$\begin{aligned} Wh(X_-, p_{X_-}, n, \epsilon) \oplus Wh(X_+, p_{X_+}, n, \epsilon) &\xrightarrow{(j_-\ j_+)} Wh(X, p_X, n, \epsilon) \\ &\xrightarrow{\bar{\partial}_+} Wh(W, p'_W, n, \epsilon'') . \end{aligned}$$

系 **7.3.** $\ker\bar{\partial}_+$ の制御を緩める安定化写像

$$Wh(X, p_X, n, \epsilon) \longrightarrow Wh(X, p_X, n, \hat{\epsilon})$$

による像は, $\hat{\epsilon} \geq 54 \cdot 10^6(9n+34)^2\kappa_n\epsilon''$ かつ $\hat{W} \supset W^{13\cdot 10^6(9n+34)\kappa_n\epsilon''}$ のとき

$$(j_-\ j_+)\ :\ Wh(X_- \cup \hat{W}, p, n, \hat{\epsilon}) \oplus Wh(X_+ \cup \hat{W}, p, n, \hat{\epsilon}) \longrightarrow Wh(X, p_X, n, \hat{\epsilon})$$

の像に入る.

証明: 6.2 と 7.1 から明らか. □

これは次の節で制御ホワイトヘッド捩れの安定的消滅定理を示すのに用いられる.

8. ビートリス型消滅定理.

non-connective な一般ホモロジー理論 h_* におけるビートリスの定理とは次のようなものである：よい性質をもつ空間（例えば多面体）の間の写像 $p : M \longrightarrow K$ による各点の逆像が次元 ≤ 1 で h_*-非輪状

$$h_{-k}(p^{-1}(v) \longrightarrow \{v\}) = 0 \quad (v \in K\ ,\ k \geq -1)$$

ならば p は次元 ≤ 1 で h_*-同型である：

$$h_{-k}(p) = 0 \quad (k \geq -1)\ .$$

この節の題のビートリス型消滅定理とは次のようなものをいう：ある程度よい性質を持つ制御写像 $p_K : M \longrightarrow K$ が

$$Wh_{-k}(\pi_1(p_K^{-1}(v))) = 0 \quad (v \in K\ ,\ k \geq -1)$$

をみたせば，任意の $\epsilon > 0, n > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，制御を緩める安定化写像

$$Wh_{-k}(K, p, n, \delta) \longrightarrow Wh_{-k}(K, p, n, \epsilon) \quad (k \geq -1)$$

が零写像になる．本稿では lower Wh-群 Wh_{-k} $(k \geq 0)$ を表面に出すことは避ける．k 次元トーラス $T^k = (S^1)^k$ との直積を考えて，前節の Bass-Heller-Swan 型の分裂写像を用いた議論で代用する．例えば上に述べた仮定は少し強めて「各 $v \in K$, $k \geq 0$ に対し $Wh(\pi_1(p_K^{-1}(v)) \times \mathbf{Z}^k) = 0$ 」の形にする．lower Wh-群 Wh_{-k} を用いた議論は [22] にある．制御 lower K-理論に関しては [21] が詳しい。

制御振れ群に関するビートリス型定理から次のことがわかる．連結かつ局所 1 連結な空間 M から連結コンパクト ANR 距離空間 X への制御写像 $p_X : M \to X$ と任意の $n \geq 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して「制御を忘れる」アセンブリ写像

$$Wh(X, p_X, n+1, \delta) \longrightarrow Wh(\pi_1(M))$$

$$\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \delta) \longrightarrow \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)])$$

の像は次の写像の核に入る：

$$(p_X)_* \ : \ Wh(\pi_1(M)) \longrightarrow Wh(\pi_1(X))$$

$$(p_X)_* \ : \ \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)]) \longrightarrow \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(X)]) \ .$$

これらはもともと Chapman や Ferry によって, もっと幾何的な方法で証明された.

K を有限多面体とし制御写像 $p_K : M \to K$ は iterated mapping cylinder structure (Hatcher [11]) を持つと仮定する. さらに各頂点 $v \in K$ に対し

$$Wh(\pi_1(p_K^{-1}(v)) \times \mathbf{Z}^k) \ = \ 0 \ \ (k \geq 0)$$

と仮定する. 各 $k \geq 0$ に対し $p_K^{(k)}$ を次の合成で定義する：

$$p_K^{(k)} \ : \ M \times T^k \xrightarrow{\text{射影}} M \xrightarrow{p_K} K \ .$$

すると $p_K^{(k)}$ も p_K のものから誘導された iterated mapping cylinder structure をもち, 同様なホワイトヘッド群に関する仮定を満たす.

定理 8.1. p_K は上の仮定をみたすとする. 任意の $n > 0$ と $\epsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して制限を緩める安定化写像

$$Wh(K, p_K^{(k)}, n, \delta) \longrightarrow Wh(K, p_K^{(k)}, n, \epsilon)$$

はすべての $k \geq 0$ に対し零写像となる.

証明：単体的複体 L の中の単体の個数を $\sharp(L)$ で書くことにする. p_K と $n > 0$ を固定する. 正数の上で定義された正値な関数列：

$$(\epsilon \geq) \, \delta_1(\epsilon) \geq \delta_2(\epsilon) \geq \delta_3(\epsilon) \geq \cdots (> 0)$$

で, 次の条件を満たすものを帰納的に構成する.

L が K の部分複体で $\sharp(L) \leq l$ ならば, 制御を緩める安定化写像

$$Wh(L, p_L^{(k)}, n, \delta_l(\epsilon)) \longrightarrow Wh(L, p_L^{(k)}, n, \epsilon)$$

はすべての $k \geq 0$ とすべての $\epsilon > 0$ に対し 0 である. ただし $p_L^{(k)}$ は $p_K^{(k)}$ の L への制限を表す.

定理はこれの特別な場合 $(L = K)$ になっている.

$l = 1$ すなわち L が一点 $\{v\}$ の時は $\delta_1(\epsilon) = \epsilon$ とすればよい. なぜなら任意の $\gamma > 0$ に対し

$$Wh(\{v\}, p_{\{v\}}^{(k)}, n, \gamma) \;=\; Wh(\pi_1(p_K^{-1}(v) \times T^k)) \;=\; 0$$

であるから. 帰納的に $\delta_1, \ldots, \delta_{l-1}$ をすでに構成したとする. L を K の部分複体で $\sharp(L) \leq l$ と仮定する. Δ を L の単体で, 他の単体の面単体でないものとする. (以下では単体的複体とその表す多面体とをあまり区別しないで記す.) すると L は $L_+ = \Delta$ と $L_- = L - \mathrm{interior}(\Delta)$ の和集合になっている. 両者の交わりは $L_0 = \partial\Delta$ である. $\sharp(L_0) < l$, $\sharp(L_-) < l$ であるから安定化写像

$$Wh(L_0, p_{L_0}^{(k)}, n, \delta_{l-1}(\epsilon)) \longrightarrow Wh(L_0, p_{L_0}^{(k)}, n, \epsilon)$$

$$Wh(L_-, p_{L_-}^{(k)}, n, \delta_{l-1}(\epsilon)) \longrightarrow Wh(L_-, p_{L_-}^{(k)}, n, \epsilon)$$

は, 帰納法の仮定から, すべての $\epsilon > 0$ とすべての $k \geq 0$ に対し 0 である. この事実は L_+ に対しても成り立っている. なぜなら 7.2. によって, すべての $\gamma \geq 0$, $k \geq 0$ に対し

$$Wh(L_+, p_{L_+}^{(k)}, n, \gamma) \;\cong\; Wh(\{v\}, p_{\{v\}}^{(k)}, n, \gamma) \;=\; 0$$

であるから.

さて $\epsilon > 0$ を固定する. L_0 の L における正則近傍を $\hat{N}$ と書く. ただし部分複体の正則近傍とは十分細かい重心細分を取ったときの星状近傍のこととす

る. このとき正則近傍からその部分複体への強変形レトラクションで, p_K による逆像における強変形レトラクションで覆われるものが存在する. $\{r_t\}_{0\le t\le 1}$ が $L_-\cup\hat{N}$ から L_- への強変形レトラクション, $\{\tilde{r}_t\}$ が, それを覆う $p_K^{-1}(L_-\cup\hat{N})$ から$p_K^{-1}(L_-)$ への強変形レトラクションとする. これにより$(p_K^{(k)})^{-1}(L_-\cup\hat{N})$ から $(p_K^{(k)})^{-1}(L_-)$ への強変形レトラクション $\{\tilde{r}_t^{(k)}=\tilde{r}_t\times 1_{T^k}\}$ が誘導される. 7.2 の状況とは異なり, r_t は距離を増大させる可能性がある. しかし $L_+\cap\hat{N}$ はコンパクトだからある正の数$\delta^-(\epsilon)$ $(\ll\delta_{l-1}(\epsilon))$ が存在して, 次の図式がすべての $k\ge 0$ に対し可換となる:

$$\begin{array}{ccc} Wh(L_-\cup\hat{N},p^{(k)},n,\delta^-(\epsilon)) & \longrightarrow & Wh(L_-\cup\hat{N},p^{(k)},n,\epsilon) \\ {\scriptstyle(\tilde{r}_1^{(k)})_*}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle i_*} \\ Wh(L_-,p^{(k)},n,\delta_{l-1}(\epsilon)) & \longrightarrow & Wh(L_-,p^{(k)},n,\epsilon) \end{array}$$

すべての $k\ge 0$ に対し第 2 行は零写像だから第 1 行も零写像である. 同様に, ある正の数 $\delta^+(\epsilon)$ が存在して

$$Wh(L_+\cup\hat{N},p^{(k)},n,\delta^+(\epsilon)) \longrightarrow Wh(L_+\cup\hat{N},p^{(k)},n,\epsilon)$$

がすべての $k\ge 0$ に対し零写像となる. $\hat{\delta}(\epsilon)=\min\{\delta^+(\epsilon),\delta^-(\epsilon)\}$ とおき, 正の数 γ を次の 2 条件を満たすように十分小さくとる:

1. $54\cdot 10^6(9n+34)^2\kappa_n\gamma\le\hat{\delta}(\epsilon)$
2. L_0 の L における十分小さい正則近傍 N に対し,

$$N^{13\cdot 10^6(9n+34)\kappa_n\gamma}\subset\hat{N}$$

　が成り立つ

前と同じように正値関数 $\delta^0(\alpha)$ で, 全ての $\alpha>0$ と $k\ge 0$ に対して

$$Wh(N,p^{(k)},n,\delta^0(\alpha)) \longrightarrow Wh(N,p^{(k)},n,\alpha)$$

が零写像となるものが存在する. $\delta^L(\epsilon)>0$ を, 次の 2 条件を満たすように十分小さく選ぶ:

1. $\delta^L(\epsilon)<\delta^0(\gamma)/18\kappa_n$
2. $N\supset L_0^{300(n+10)\delta^L(\epsilon)}$

ただし γ は上で選んだもの.

次の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
Wh(L,p_L^{(k)},n,\delta^L(\epsilon)) \arrow[r, "\bar{\partial}_+"] \arrow[d, equal] & Wh(N,p_N^{(k+1)},n,\delta^0(\gamma)) \arrow[d, "0"] \\
Wh(L,p_L^{(k)},n,\delta^L(\epsilon)) \arrow[r, "\bar{\partial}_+"] \arrow[dr] & Wh(N,p_N^{(k+1)},n,\gamma) \\
Wh(L_-\cup\hat{N},p^{(k)},n,\hat{\delta}(\epsilon))\oplus Wh(L_+\cup\hat{N},p^{(k)},n,\hat{\delta}(\epsilon)) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & Wh(L,p_L^{(k)},n,\hat{\delta}(\epsilon)) \arrow[d] \\
Wh(L_-\cup\hat{N},p^{(k)},n,\epsilon)\oplus Wh(L_+\cup\hat{N},p^{(k)},n,\epsilon) \arrow[r] & Wh(L,p_L^{(k)},n,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

この図式をたどって, 安定化写像

$$Wh(L,p_L^{(k)},n,\delta^L(\epsilon))\longrightarrow Wh(L,p_L^{(k)},n,\epsilon)$$

がすべての $k\geq 0$ に対して零写像であることが簡単に確かめられる. K の部分複体 L で $\sharp(L)\leq l$ をみたすものは有限個だから $\delta_l(\epsilon)$ を $\min\{\delta^L(\epsilon)|\sharp(L)\leq l\}$ とおくことが出来る. 以上で帰納法のステップが進行し, 定理が証明された. □

系 8.2. p_K を上と同じとする. 任意の $n\geq 0$ と $\epsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して

$$\widetilde{K}_0(K,p_K^{(k)},n,\delta)\longrightarrow \widetilde{K}_0(K,p_K^{(k)},n,\epsilon)$$

がすべての $k\geq 0$ に対し零射像となる.

証明: $n>0$ の時は 8.1 と 7.1. から直ちに示される. $n=0$ の場合は $n=1$ から得られる. □

次は Ferry [10, Cor.3.2] の代数版である.

系 **8.3.** X はヒルベルト立方体 I^∞ に埋め込まれた連結コンパクト ANR 距離空間とする. 任意の $n\geq 0$ と $\epsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して安定化写像

$$\widetilde{K}_0(X,1_X,n,\delta)\to\widetilde{K}_0(X,1_X,n,\epsilon)\quad,\quad Wh(X,1_X,n+1,\delta)\to Wh(X,1_X,n+1,\epsilon)$$

は共に零写像となる. 従ってある $\delta_{X,n}>0$ に対し,「制御を忘れる」アセンブリ写像

$$\widetilde{K}_0(X,1_X,n,\delta_{X,n})\to\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])\quad,\quad Wh(X,1_X,n+1,\delta_{X,n})\to Wh(\pi_1(X))$$

は共に零写像である.

証明: X に対しある近傍 U とレトラクション $r:U\to X$ が存在する. I^N の余次元 0 の PL 部分複体 K が存在して, U が $K\times I^{\infty-N}$ という形をしていると仮定しても一般性を失わない. (ヒルベルト立方体の因子である区間は, 先に行けば行くほどどんどん短くなっていくから.) $m=n+1$ とおく. U のコンパクト性から, r はある $\gamma>0$ に対して準同型写像

$$r_*\ :\ Wh(U,1_U,m,\gamma)\longrightarrow Wh(X,1_X,m,\epsilon)$$

を誘導する. $Wh(\mathbf{Z}^k)=0$ (Bass-Heller-Swan [2]) であるから$1_K:K\to K$ に対して 8.1 を適用できる. 従って, ある $\delta>0$ に対し準同型写像$Wh(K,1_K^{(k)},m,\delta)\to Wh(K,1_K^{(k)},m,\gamma)$ はすべての $k\geq 0$ で零写像となる. $r':U=K\times I^{\infty-N}\to K$ を射影, $i':K=K\times(0,0,\ldots)\to U$ を包含写像とする. これらは 7.2 により Wh での互いの逆写像を誘導する. 次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
Wh(X, 1_X^{(k)}, m, \delta) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & Wh(U, 1_U^{(k)}, m, \delta) \arrow[r, "r'_*", "\cong"'] \arrow[d] & Wh(K, 1_K^{(k)}, m, \delta) \arrow[d, "0"'] \\
Wh(X, 1_X^{(k)}, m, \epsilon) & Wh(U, 1_U^{(k)}, m, \gamma) \arrow[l, "r_*"] & Wh(K, 1_K^{(k)}, m, \gamma) \arrow[l, "\cong"', "i'_*"]
\end{tikzcd}
$$

ここで縦の写像は安定化写像である. ゆえに, 縦の写像はすべて零射像である.

さて $\epsilon = 1$, $k = 0$ そして $\delta_{X,n}$ を対応する δ とする. アセンブリ写像 $Wh(X, 1_X, n+1, \delta_X) \to Wh(\pi_1(X))$ は $Wh(X, 1_X, n+1, 1)$ を経由するので, やはり零射像である.

$\widetilde{K}_0$ の場合の主張（おそらくさらに小さい $\delta_{X,n}$ を必要とする）は上の $k = 1$ の場合と 7.1 から示される. □

次は Chapman [5, Theorem 1′] の代数版である.

系 8.4. $p_X : M \to X$ は連結かつ局所単連結な空間 M からI^∞ に埋め込まれた連結コンパクト ANR 距離空間 X への制御写像を固定する. 任意の $n \geq 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し,「制御を忘れる」アセンブリ写像

$$Wh(X, p_X, n+1, \delta) \longrightarrow Wh(\pi_1(M))$$

$$\widetilde{K}_0(X, p_X, n, \delta) \longrightarrow \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)])$$

の像は

$$(p_X)_* \ : \ Wh(\pi_1(M)) \longrightarrow Wh(\pi_1(X))$$

$$(p_X)_* \ : \ \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)]) \longrightarrow \widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$$

のそれぞれの核に入る.

証明: $\delta_{X,n}$ を 8.3 のようにとる. ホワイトヘッド群に関する主張は次の可換図式から明らかである.

$$\begin{tikzcd}
Wh(X, p_X, n+1, \delta_{X,n}) \arrow[r, "(p_X)_*"] \arrow[d] & Wh(X, 1_X, n+1, \delta_{X,n}) \arrow[d, "0"] \\
Wh(\pi_1(M)) \arrow[r, "(p_X)_*"'] & Wh(\pi_1(X))
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{K}_0$ の場合も同様. □

9. 制御 finiteness obstruction と制御捩れ.

この節では横断的 CW 複体と §3 および §4 の制御付きの群を用いて制御 finiteness obstruction と捩れを定義する. Chapman [6, §§5,7] は制御 finiteness obstruction と制御捩れを幾何的に定義される群の中に定義した. ここではそれとの関係については触れない.

まず「横断的」な CW 複体の理論を述べる. K を CW 複体とする. $K^{(k)}$ でその k 骨格を表す. 滑らかな（境界付き）k 次元多様体からの写像 $f:(M^k, \partial M) \to (K^{(k)}, K^{(k-1)})$ が k 胞体に対し横断的であるとは, K の各開 k 胞体 e^k に対し $f^{-1}(e^k)$ が M の中の有限個の閉 k 球体 B_i^k の内部の非交和であり, さらに k 球体 D^k への同相写像 $\psi_i : B_i^k \to D^k$ で各 i に対し $\theta_{e^k} \circ \psi_i = f|B_i^k$ となるものが存在することをいう. ここで $\theta_{e^k}; D^k \to K$ は閉 k 胞体 $\bar{e}^k$ の特性写像とする. 任意の連続写像 $f:(M^k, \partial M) \to (K^{(k)}, K^{(k-1)})$ は k 胞体に横断的な写像に rel ∂ でホモトピックである.

CW 複体 K が横断的であるとは, 各 k および各 $(k+1)$ 胞体に対し, その接着写像 $\varphi : S^k \to K^{(k)}$ が k 胞体に対し横断的であることをいう. 任意の有限 CW 複体は横断的な CW 複体に単純ホモトピー同値である. 横断的な CW 複体の細分 (Milnor [14]) も横断的である.

横断的な CW 複体の間の胞体写像 $f: K \to L$ が横断的であるとは, K の各胞

体 e^k に対し, 合成

$$(D^k, S^{k-1}) \xrightarrow{\ \theta\ } (K^{(k)}, K^{(k-1)}) \xrightarrow{\ f\ } (L^{(k)}, L^{(k-1)})$$

がk 胞体に対して横断的であることをいう. ここで θ は e^k の特性写像である. 任意の連続写像は横断的な胞体写像にホモトピックである.

横断的な胞体写像 $f : K \to L$ は鎖写像 $f_\% : f_\sharp C(K) \to C(L)$ を誘導する. ここで $C(-)$ は Quinn [17] の幾何加群の胞体的鎖複体を表す. また $f_\sharp(-)$ は$f_\sharp$ を幾何加群および境界幾何射に適用して得られた幾何加群鎖複体を表す. 例えば, $f_\sharp C_k(K)$ はK の k 胞体の中心の f による L での像によって生成される. $f_\%$ は以下の様にして定義される. 各 K の k 胞体に対し特性写像 $\theta : D^k \to K$ を考える. D^k の中で中心から出発して$f\theta$ による L の k 胞体 の逆像たちで終る半径に沿った道を作る. 各道には, その道の終点の近傍で $f\theta$ が向きを保つ時に $+1$, 向きを逆にするときに -1 の係数を与える. 鎖写像 $f_\%$ はこれらの道の L の中の像に, 割り当てられた係数をつけたものの和で定める. これが実際鎖写像になっていることは, 横断性の議論により容易に示すことができる.

二つの横断的な胞体写像 f, g がホモトピックのとき, 次の鎖ホモトピー可換な図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
f_\sharp C(K) \arrow[dr, "f_\%"] \arrow[dd, "\cong"'] & \\
\simeq & C(L) \\
g_\sharp C(K) \arrow[ur, "g_\%"'] &
\end{tikzcd}$$

縦の写像はホモトピーにより与えられる幾何的な同型写像である.

$f : K \to L$, $g : L \to M$ が共に横断的な胞体写像ならばその合成$gf : K \to M$

も横断的な胞体写像であり, $(gf)_{\%} \sim g_{\%} g_{\sharp}(f_{\%})$ が成り立つ.

以上の準備のもとで制御ホモトピー同値写像(Chapman [6, p.2]) の制御捩れを定義する.

K , L を n 次元横断的有限 CW 複体とし, L には距離空間 X への制御写像 $p_X : L \to X$ が与えられているとする. $p_X^{-1}(\epsilon)$ ホモトピー同値写像 $f : K \to L$ の捩れ$\tau(f) \in Wh(X, p_X, n+1, 108\epsilon)$ を定義する. (われわれの応用ではこの元の存在のみが重要なので, well-definedness に関しては一切考慮しない.) 必要ならば K および L を細分してX における各胞体の (K の場合は $p_X f$ による, また L の場合は p_X による) 像の直径が $\epsilon/10$ 以下とする. L は Quinn [17] の意味で "saturated" である. ゆえに f は横断的な $p_X^{-1}(2\epsilon)$ ホモトピー同値 $f' : K \to L$ に $p_X^{-1}(\epsilon)$ ホモトピックであり, 横断的な $p_X^{-1}(2\epsilon)$ ホモトピー逆写像 $g' : L \to K$ があるとしてよい. $f'_{\sharp}C(K)$ と $C(L)$ はともに自由 ϵ 鎖複体である. f' の誘導する 2ϵ 鎖写像

$$F \;=\; f'_{\%} \;:\; f'_{\sharp}C(K) \longrightarrow C(L)$$

と, 次の合成 4ϵ 鎖写像

$$G \;:\; C(L) \xrightarrow{\;\cong\;} f'_{\sharp}g'_{\sharp}C(L) \xrightarrow{f'_{\sharp}(g'_{\%})} f'_{\sharp}C(K)$$

を考える. ただし合成の最初の写像はホモトピー $1 \simeq f'g'$ の誘導する幾何的 2ϵ 同型写像である. このとき FG は $1 : C(L) \to C(L)$ に 4ϵ 鎖ホモトピックである. 一方 10ϵ 鎖ホモトピー $GF\lambda \simeq 1$ の存在も容易にわかる. ただし $\lambda : f'_{\sharp}C(K) \to f'_{\sharp}C(K)$ は次のホモトピーの誘導する 4ϵ 同型写像である.

$$f' \;=\; f'1_{L'} \;\simeq\; f'(g'f') \;=\; (f'g')f' \;\simeq\; 1_{L'}f' \;=\; f' \,.$$

ところがこのホモトピーは 2ϵ 鎖ホモトピー$f'_{\%}\lambda \simeq f'_{\%}$ を引き起こすので, 実は $GF \simeq_{6\epsilon} 1$ となる. よって F は 6ϵ 鎖同値写像でその捩れは $Wh(X, p_X, n+1, 54\epsilon)$

に定まる.「制御を忘れる」アセンブリ写像によるこの元の $Wh(\pi_1(X))$ における像は通常のホワイトヘッドの振れ $\tau(f)$ である.

次に制御された domination を持つ空間の制御 finiteness obstruction を定める.

K および M を n 次元横断的 CW 複体とし, $K \underset{u}{\overset{d}{\rightleftarrows}} M$ を制御写像 $p_X : M \to X$ に関する M の $p_X^{-1}(\epsilon)$ domination ($du \simeq 1 : M \to M$) で d, u 共に横断的とする. この時, $C(M)$ は $d_\sharp C(K)$ により 2ϵ dominate されている. 従って 3.1 により $(C(M), 1)$ は n 次元 $(2n+6)\epsilon$ 射影鎖複体に$(4n+8)\epsilon$ 鎖同値である. この複体の射影類が制御 finiteness obstruction $[M] \in \widetilde{K}_0(X, p_X, n, (2n+6)\epsilon)$ である. (または Lück-Ranicki [13] の instant finiteness obstruction の公式を, $ud \simeq (ud)^2 : K \to K$ により誘導される制御鎖ホモトピー idempotent に対して用いてもよい.) $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(M)])$ の中の, この元の制御を忘れるアセンブリ像は通常の Wall finiteness obstruction $[M]$ である.

10. 振れの位相不変性と有限性定理.

最終節では §8 のビートリス型定理と §9 の制御振れおよび制御 finiteness obstruction を用いて同相写像の振れが 0 であること, およびコンパクト ANR の finiteness obstruction が 0 であることの証明を与える.

定理 10.1. (振れの位相不変性)　有限 CW 複体の間の同相写像は単純である.

定理 10.2. (ボルスク予想)　コンパクト ANR 距離空間は有限多面体とホモトピー同値である.

これらは最初 Chapman [3] および West [24] によりそれぞれ証明された.

10.1 の証明: $f : K \to L$ を有限 CW 複体の間の同相写像とする. そのホワイトヘッドの振れ $\tau(f)$ が 0 であることを示す. L はヒルベルト立方体に埋め込

まれており, K と L は横断的であると仮定しても一般性を失わない. さらに, ホワイトヘッドの捩れは組合せ的に不変であるから(Whitehead [25], Milnor [14], Cohen [7]), K や L をその細分 K', L' でそれぞれ置き換えてもよい. f を横断的な胞体写像 f' で置き換える. §9 で見たように, ある $\delta > 0$ に対し $\mathcal{C}(f'_{\%})$ は $Wh(L', 1_{L'}, \delta) = Wh(L, 1_L, \delta)$ の元を定め, その元は制御を忘れるアセンブリ写像で $Wh(\pi_1 L)$ の中の捩れ $\tau(f)$ に移される. 十分細かい細分と十分近い近似 f' を選べば δ はいくらでも小さくできる. 従って 8.3 により $\tau(f)$ は 0 である. □

10.2 の証明: X はヒルベルト立方体の部分空間としても一般性を失わない. X はある近傍のレトラクトになっている. そのレトラクションを $r : V \to X$ とする. 十分大きい N を選べば, $K \times I^{\infty - N}$ の形をしたより小さい近傍 $U \subset V$ がとれる. ただし K は I^N の余次元 0 の PL 部分多様体である. $j : X \to K$ を次の合成で定める:

$$j \ : \ X \xrightarrow{\text{包含写像}} U \xrightarrow{\text{射影}} K\ .$$

また, $f : K \to X$ を次の合成とする:

$$f \ : \ K \ = \ K \times 0 \xrightarrow{\text{包含写像}} U \xrightarrow{r} X\ .$$

すると $f : K \to X$ は X の finite domination であり, ホモトピー : $k_t : 1_X \simeq fj$ がある. $p : K \to K$ を jf の横断的な胞体写像による近似とし, $h_t : jf \simeq p$ をそのホモトピーとする. $p_* : f_\sharp C(K) \to f_\sharp C(K)$ を次の合成で定める.

$$f_\sharp C(K) \xrightarrow{\cong} f_\sharp p_\sharp C(K) \xrightarrow{f_\sharp(p_{\%})} f_\sharp C(K)$$

但し最初の写像は次のホモトピーの誘導する幾何的同型写像である:

$$H_t \ : \ f \overset{k_t f}{\simeq} fjf \overset{f h_t}{\simeq} fp\ .$$

ホモトピー $K_t : p^2 \simeq jfjf \simeq jf \simeq p$ はp_*^2 と $p_*\lambda$ の間の鎖ホモトピーを誘導する. 但し $\lambda : f_\sharp C(K) \to f_\sharp C(K)$ はホモトピー:

$$f \simeq fp \overset{H_t p}{\simeq} fpp \overset{fK_t}{\simeq} fp \simeq f$$

の誘導する幾何的同型写像とする. もし N が十分大きかったら(すなわち $I^{\infty-N}$ が十分薄かったら), ホモトピー k_t の直径はいくらでも小さくできる. また, ホモトピー h_t の直径もいくらでも小さくできる. X は局所可縮だから, N を十分大きくとれば λ は恒等写像にホモトピック $(\sim)$ である. 従って p_* は鎖ホモトピー射影であるとしてよい. §9 のように, これはある $\delta > 0$ に対し$\widetilde{K}_0(X, 1_X, \delta)$ の元を定める. その元の制御を忘れるアセンブリ写像による $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi_1(X)])$ での像は X の通常の Wall finiteness obstruction である. δ は限りなく小さくできるので, 8.3 によりX の finiteness obstruction は 0 でなければならない. □

参考文献

[1] Bass, H.

Algebraic K-theory

Benjamin (1968)

[2] ――, Heller, A. , and Swan, R. G.

The Whitehead group of a polynomial extension

Publ. Math. I. H. E. S. **22**, 61–79 (1964)

[3] Chapman, T. A.

The topological invariance of Whitehead torsion

Amer. J. Math. **96**, 488–497 (1974)

[4] ―― *Homotopy conditions which detect simple homotopy equivalences*

Pac. J. Math. **80**, 13–46 (1979)

[5] *Invariance of torsion and the Borsuk conjecture*

Can. J. Math. **32**, 1333–1341 (1980)

[6] *Controlled Simple Homotopy Theory and Applications*

Springer Lecture Notes, vol. 1009 (1983)

[7] Cohen, M. M.

A Course in Simple-Homotopy Theory

Graduate Texts in Math. , vol. 10, Springer (1973)

[8] Connell, E. H. and Hollingsworth, J.

Geometric groups and Whitehead torsion

Trans. A. M. S. **140**, 161-181 (1969)

[9] Connolly, F. and Koźniewski, T.

Rigidity and crystallographic groups, I

Invent. Math. **99**, 25–48 (1990)

[10] Ferry, S.

The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR

Ann. of Math. **106**, 101–119 (1977)

[11] Hatcher, A. E.

Higher simple homotopy theory

Ann. of Math. **102**, 101–137 (1975)

[12] Higman, G.

The units of group rings

Proc. London Math. Soc. (2) 46, 231-248 (1940)

[13] Lück, W. and Ranicki, A.

Chain homotopy projections

J. of Alg. **120**, 361–391 (1989)

[14] Milnor, J.

Whitehead torsion

Bull. A. M. S. **72**, 358–426 (1966)

[15] Quinn, F. S.

Ends of Maps I.

Ann. of Math. **110**, 275–331 (1979)

[16] *Ends of Maps II.*

Invent. Math. **68**, 353–424 (1982)

[17] *Geometric algebra*

Proc. 1983 Rutgers Topology Conference, Springer Lecture Notes, vol. 1126, 182–198 (1985)

[18] Ranicki, A.

The algebraic theory of finiteness obstruction

Math. Scand. **57**, 105–126 (1985)

[19] *The algebraic theory of torsion I.*

Proc. 1983 Rutgers Topology Conference, Springer Lecture Notes, vol. 1126, 199–237 (1985)

[20] *Algebraic and geometric splittings of the K- and L-groups of polynomial extensions*

Proc. Symp. on Transformation Groups, Poznań 1985, Springer Lecture Notes, vol. 1217, 321–364 (1986)

[21] *Lower K- and L-theory*

Math. Gott. **25** (1990)

[22] , A. and Yamasaki, M.

Controlled K-theory

(準備中)

[23] Wall, C. T. C.

Finiteness conditions for CW complexes

Ann. of Math. **81**, 55–69 (1965)

[24] West, J. E.

Mapping Hilbert cube manifolds to ANRs

Ann. of Math. **106**, 1–18 (1977)

[25] Whitehead, J. H. C.

Simple homotopy types

Amer. J. Math. **72**, 1–57 (1950)

[26] Yamasaki, M.

L-groups of crystallographic groups

Invent. Math. **88**, 571–602 (1987)