数理解析研究所講究録
第 793 巻 1992 年 120-125

同変 K 理論の表現スペクトラムについて

京大数理研[1]　島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)

序

G は有限群であるとし，$KO_G(X)$ および $\mathrm{Sph}_G(X)$ によって，有限 G-CW 複体 X 上の実 G ベクトル束および球面状 G フィブレイションの安定同値類のなすグロタンディック群を表す.

筆者は，[9] および [10] において，これらの函手 $KO_G(-)$, $\mathrm{Sph}_G(-)$ を表現する G 同変スペクトラム kO_G, kF_G を構成し，さらに同変 J 準同型 $J_G : KO_G(X) \to \mathrm{Sph}_G(X)$ は，G スペクトラムの写像 $kO_G \to kF_G$ によって誘導されることを示した. とくに，$KO_G(-)$ および $\mathrm{Sph}_G(-)$ は任意の G 同変束に対するトランスファーを持ち，それらは J 準同型と可換である.（西田 [8] 参照）

本稿では，先に述べた kO_G が周期的 KO_G 理論を表現するスペクトラムの (-1) 連結被覆になっていること，したがって，kO_G に付随したトランスファーは Bott 周期性をもちいて定義される（通常の意味での）トランスファーと一致することを示そう.

また，以上の結果の応用として，Adams 予想の同変版が一次元および二次元の場合の結果（Hauschild-Waner [4]）から容易に導き出せることも示そう.

1　同変 K 理論の表現スペクトラムの構成

本節では，次の定理を証明する.

定理 1 実同変 K 理論 $KO_G(-)$ を表現する周期的 G スペクトラム KO_G，および G スペクトラムの写像 $l_G : kO_G \to KO_G$ が存在し，この l_G は kO_G と KO_G の (-1) 連結被覆との同値を誘導する.

まず最初に kO_G の構成法（[9], [11]）を復習しておく. 実直交群 O_n を唯一つの対象を持ち，射の合成は群の演算で定義され，さらに自明な G 作用を持つ G 圏とみなす. このとき，

[1]現在は，岡山大学理学部所属

直和$\coprod_n O_n$は Whitney 和とテンソル積に関して 'bipermutative category' の構造を持つ．したがって，[11] の定理 A により，E_∞ 同変環スペクトラム

$$kO_G = E_G\left(\coprod_{n\geq 0} O_n\right) \in GS\mathcal{A}$$

が定義される．ただし，V は十分大きい（すなわち，G の任意の実既約表現を部分表現として含む）$8n$ 次元スピン G 加群とし，インデックス集合として $\mathcal{A} = \{V^n; n \geq 0\}$ をとる．以下，簡単のために $kO_G = \{E_n\}$ と書き，また構造写像を $\varepsilon : E_n \wedge SV \to E_{n+1}$ で表す．とくに，$E_0 = \mathrm{Colim}\,\Omega^{V^\infty} E_n$ は kO_G に付随した同変無限ループ空間である．

論文 [9] の第 3 節に示したように，n 次元 G ベクトル束の分類空間の良いモデル $BO_n(G)$ を選ぶと，直和$\coprod_n BO_n(G)$ は G モノイドの構造を持ち，その（ホモロジー論的）群完備化は E_0 と同値である．したがって，任意の G-CW 複体 X に対して，

$$KO_G(X) = [X_+, E_0]^G = [\Sigma^\infty X_+, kO_G]^G$$

が成り立つ．

さて，この kO_G の積構造を用いて周期的 G スペクトラム KO_G を構成しよう．[11] で述べたように，kO_G の環構造は E_∞ オペラード $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_j\}$ の作用

$$\xi_j : \mathcal{C}_j{}^+ \wedge E_{n_1} \wedge \cdots \wedge E_{n_j} \to E_{n_1+\cdots+n_j};\quad j \geq 0,\ n_1,\ \cdots,\ n_j \geq 0$$

で記述される．ただし，各 $\mathcal{C}_j = |\mathrm{Cat}(EG, E\Sigma_j)|$ は EG から $E\Sigma_j$ への函手とその自然変換のなす圏の分類空間である（一般に，A が群であるとき，その各元を対象とし，元の対を射とする圏を EA で表す）．いま，1 を値とする定数函手 $EG \to E\Sigma_2$ を ι_2 と書き，

$$\mu(x \wedge y) = \xi_2(\iota_2 \wedge x \wedge y)$$

で定義される E_0 の積を μ と書く．μ は結合的，かつホモトピー可換である．

さて，$KO_G(SV)$ における Bott 類を表す G 写像 $b : SV \to E_0$ を選び，それを用いて G プリスペクトラム $D = \{D_n\} \in G\mathcal{PA}$ を次のように構成しよう．各整数 $n \geq 0$ に対し，$D_n = E_0$ とおき，構造写像を

$$\delta = \mu(1 \wedge b) : D_n \wedge SV \to E_0 \wedge E_0 \to E_0 = D_{n+1}$$

で定義する．Bott の周期性定理 [1] により，δ の随伴 $E_0 \to \Omega^V E_0$ によって誘導される準同型 $KO_G(X) \to KO_G(X \times SV)$ は同型である．したがって，D は Ω-G プリスペクトラムで

あり，また，このことから D，および，それに付随する G スペクトラム KO_G が周期的 KO_G 理論を表現することがわかる．

次に，[11] の定理 2.4 の証明で用いた議論を応用して，G スペクトラムの写像

$$l_G : kO_G \to KO_G$$

を構成しよう．

G ベクトル空間 $V^m \oplus V^n$ $(m,\ n \geq 0)$ から成るインデックス集合を $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ で表し，G プリスペクトラム $X = \{X_{m,n}\} \in G\mathcal{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{A})$ を次のように定義する．任意の整数の組 $m,\ n \geq 0$ に対し

$$X_{m,n} = E_n$$

とおき，G 写像 $\chi' \colon X_{m,n} \wedge SV \to X_{m+1,n}$ および $\chi'' \colon X_{m,n} \wedge SV \to X_{m,n+1}$ をそれぞれ

$$\chi'(x \wedge v) = \xi_2(\iota_2 \wedge x \wedge b(v)), \quad \chi''(x \wedge v) = \epsilon(x \wedge v)$$

で定義する（ただし，ϵ は kO_G の構造写像）．

オペラード作用の性質（[11] の定義 1.2）により，次の図式

$$\begin{array}{ccc}
X_{m,n} \wedge SV \wedge SV & \xrightarrow{\chi' \wedge 1} & X_{m+1,n} \wedge SV \\
{\scriptstyle (\chi'' \wedge 1)(1 \wedge T)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \chi''} \\
X_{m,n+1} \wedge SV & \xrightarrow{\chi'} & X_{m+1,n+1}
\end{array}$$

（ただし，T は $u \wedge v$ を $v \wedge u$ にうつす $SV \wedge SV$ の自己変換）は可換である．したがって，$X = \{X_{m,n}\}$ は χ' および χ'' の合成で定義される構造写像に関して G プリスペクトラムとなる．

$V^\infty = \mathrm{Colim} V^n$ とし，その $V^\infty \oplus V^\infty$ の第 1 成分および第 2 成分への埋め込みによって誘導される $G\mathcal{P}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{A})$ から $G\mathcal{P}\mathcal{A}$ への函手を i^*, j^* と書く．また，G プリスペクトラムを G スペクトラムに変換する函手を L で表す．X が次の性質を持つことは容易に確かめられる．

1. $Li^*X = kO_G$, $Lj^*X = KO_G$.

2. 自然な写像 $Lj^*X \to j^*LX$ は G 同値である．

さらに，安定ホモトピー圏においては G 同値 $i^*LX \simeq j^*LX$ が存在する（[6, Chapter II] の定理 1.7）ので，G スペクトラムの写像 $l_G : kO_G \to KO_G$ が次の合成で定義できる．

$$kO_G = Li^*X \to i^*LX \cong j^*LX \cong Lj^*X = KO_G.$$

定義から，l_G は任意の部分群 H と整数 $n \geq 0$ に対して，同型 $\pi_n^H kO_G \cong \pi_n^H KO_G$ を誘導し，したがって，kO_G が KO_G の (-1) 連結被覆に同値となることが証明される．

2 同変 Adams 予想の証明

本節では，McClure [7] にしたがって，同変 Adams 予想を定式化し，その証明を与える．

以下，X は有限 G-CW 複体，p は素数であるとする．$\mathrm{Sph}_G(X)_{(p)}$ の「安定 p 同値」による剰余群を $\mathrm{Sph}_G^{(p)}(X)$ と書き，次の合成を $J_G^{(p)}$ で表す．

$$KO_G(X)_{(p)} \longrightarrow \mathrm{Sph}_G(X)_{(p)} \longrightarrow \mathrm{Sph}_G^{(p)}(X).$$

定理 2 k は素数 p および G の位数と互いに素であるような整数とする．$KO_G(X)_{(p)}$ の各元 x に対し，$J_G^{(p)}(\psi^k x - x) = 0$ が成り立つ．

ここで与える証明は，橋本 [3] による Adams 予想の証明を一般化したものである．（西田 [8] および河野 [5] も参照されたい）

始めに，x は奇数次元の G ベクトル束の類であると仮定して一般性を失わないことを注意しておく．ξ を G 空間 X 上の $2m+1$ 次元実 G ベクトル束とし，それに付随する G-O_{2m+1} 主束の全空間を E で表す．簡単のために O_{2m+1} を L と書き，K は L の閉部分群であるとする．任意の K ベクトル空間 V に対して，G ベクトル束 $E \times_K V \to E/K$ を対応させる準同型 $RO(K) \to KO_G(E/K)$ を α で表し，また

$$\pi_! : KO_G(E/K) \to KO_G(X), \quad \pi_! : \mathrm{Sph}_G(E/K) \to \mathrm{Sph}_G(X)$$

は，射影 $\pi : E/K \to E/L = X$ に対するトランスファーとする．前節の定理 1 により KO_G 理論における $\pi_!$ は，Bott 周期性を用いて定義される（通常の意味の）トランスファーと一致する．さらに，J_G は G スペクトラムの写像で誘導されるので，トランスファーと可換である．したがって，[3] の定理 8 の証明と同様，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccc} RO(K)_{(p)} & \xrightarrow{\alpha} & KO_G(E/K)_{(p)} & \xrightarrow{J_G^{(p)}} & \mathrm{Sph}_G^{(p)}(E/K) \\ {\scriptstyle \mathrm{ind}_K^L}\downarrow & & {\scriptstyle \pi_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_!} \\ RO(L)_{(p)} & \xrightarrow{\alpha} & KO_G(X)_{(p)} & \xrightarrow{J_G^{(p)}} & \mathrm{Sph}_G^{(p)}(X) \end{array}$$

さて，$L = O_{2m+1}$ の恒等表現を ι で表し，また，部分群 K として $O_2 \times O_{2m-1}$ をとろう．橋本は，[3] の命題 5 において

$$\iota = \mathrm{ind}_K^L \mu + \nu$$

となる L の 1 次元表現 ν および K の 2 次元表現 μ を構成した．一方，Hauschild–Waner [4] の結果により，定理 2 は 1 次元および 2 次元の G ベクトル束に対しては成立する．したがっ

て，

$$
\begin{aligned}
J_G^{(p)}(\psi^k - 1)(\xi) &= J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\alpha(\iota) \\
&= J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\alpha(\mathrm{ind}_K^L \mu) + J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\alpha(\nu) \\
&= J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\pi_! \alpha(\mu) + J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\alpha(\nu) \\
&= \pi_! J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\alpha(\mu) + J_G^{(p)}(\psi^k - 1)\alpha(\nu) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり，定理2が一般的に成立することが証明される．

（以上）

参考文献

[1] M. F. Atiyah. Bott periodicity and the index of elliptic operators. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, Vol. 19, pp. 113–140, 1968.

[2] Z. Fiedorowicz, H. Hauschild, and J. P. May. Equivariant algebraic K-theory. In R. Keith Dennis, editor, *Algebraic K-Theory*, volume 967 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 23–80. Springer-Verlag, 1982.

[3] S. Hashimoto. The transfer map in the KR_G-theory. *Osaka J. Math.*, Vol. 18, pp. 501–507, 1981.

[4] H. Hauschild and S. Waner. The equivariant Dold theorem mod k and the Adams conjecture. *Illinois J. Math.*, Vol. 27, pp. 52–66, 1983.

[5] A. Kono. On the order of certain elements of $J(X)$ and the adams conjecture. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 17, pp. 557–564, 1981.

[6] G. Lewis, J. P. May, and M. Steinberger. *Equivariant Stable Homotopy Theory*, volume 1213 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1986.

[7] J. E. McClure. On the groups $JO_G X$. I. *Math. Z.*, Vol. 183, pp. 229–253, 1983.

[8] G. Nishida. The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology theories. *J. Math, Kyoto Univ.*, Vol. 18, pp. 435–451, 1978.

[9] K. Shimakawa. Infinite loop G-spaces associated to monoidal G-graded categories. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, Vol. 25, pp. 239–262, 1989.

10] K. Shimakawa. Mackey systems of monoidal categories and G-spectra. Preprint 688, RIMS, Kyoto University, 1990.

11] K. Shimakawa. An E_∞ ring G-spectrum representing the equivariant algebraic K-theory of a bipermutative G-category. Preprint 758, RIMS, Kyoto University, 1991.