数理解析研究所講究録
第 793 巻 1992 年 133-148

同変有限性障害の作用の制限における消滅

九州大学理学部　角　俊雄 (TOSHIO SUMI)

G をコンパクトリー群とする。同変有限性障害は今までに少なくとも 4 種類の方法で定義された。代数的なアプローチは Baglivo [3], tom Dieck [21], Iizuka [9], および Andrzejewski [2] によってなされた。これらは Wall の定義のアイデアによる。Lück [12] は幾何学的に同変有限性障害を定義した。これは $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ の元がすべてある基本群の同型を誘導する写像による有限性障害の像として実現されることが要因であるように思われる (cf. [6,22])。また Ferry [8] と Kwasik [11] は (同変) Whitehead torsion を用いて定義した。Bass-Heller-Swan 準同型 [4] が代数的に定義された有限性障害を Ferry が定義した有限性障害に写す関係にある。また、コントロールド K- 理論を用いても定義されている。

$F \to E \xrightarrow{p} B$ を finitely dominated な空間 B 上の fibration としよう。E の有限性障害がいつ消滅するかを問題にする。Anderson [1] は unorientable S^3-fibration $E \to B$ で E の有限性障害が消えない例を構成した。さらに、Pedersen と Tayler [18] は $p_* \circ p^*$ がどうなるかを与え、この応用として unorientable S^1-fibration $E \to B$ で E の有限性障害が零でない例が数多くあることを示した。更に、S^1-fibration の transfer は Munkholm, Pedersen 及び Ranicki [15,16] 達により研究されている。

そこで $S^1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ を orientable S^1-fibration と仮定しよう。このとき Ehrlich [7] は $\pi_1(i)$ の像が交換子群 $[\pi_1(E), \pi_1(E)]$ と自明に交わるときには transfer p^* は零写像となることを示した。Lück によって、finitely dominated 空間をファイバーに持つ untwisted fibration について同様の結果が成り立つことが示された。そこで自然に orientable S^1-fibration $X \to B$ で X の有限性障害が自明でないものがあるかという疑問が起こる。fibre が連結である orientable fibratioin p から引き起こされる transfer $p^*\colon \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(B)]) \to \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ は完全系列 $\pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(B)$ で決まる事が知られている (cf. [7,17])。G が連結の場合には、fibre に G を持つ orientable fibration の基本群の列である有限表示をもつ群の中心拡大 $A \to K \to H$ はある principal G-fibration の基本群の列として実現される。よって我々は principal G-fibration $X \to B$ のみの transfer を考察すればよい。X は自然な自由 G- 作用をもち、$B = X/G$ となっている。そこで、同変有限性障害と restriction を考えることになる。得られた結果は、orientable S^1-fibration $X \to B$ で X の有限性障害が自明でないものはないということである。

1 分解定理

まず最初に同変有限性障害を定義しよう。G をコンパクトリー群とする。BG を分類空間、$G \to EG \to BG$ を universal principal G-bundle とする。G-空間 X が finitely G-dominated であるとは、$r \circ s \underset{G}{\simeq} id_X$ をみたす 有限 G-CW 複体 Z、section $s: X \to Z$ と retraction $r: Z \to X$ があることである。Lück は同変有限性障害 $w^G(X)$ を以下のように幾何学的に定義した。

定義. (cf. [12]) G-写像 $f_0: Y_0 \to X$ と $f_4: Y_4 \to X$ が同値 $(f_0 \sim f_4)$ であるとは、以下の可換図式があることである。

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, hook] \arrow[drr, "f_0"'] & Y_1 \arrow[r, "\underset{G}{\simeq}"] \arrow[dr, "f_1"] & Y_2 \arrow[d, "f_2"] & Y_3 \arrow[l, "\underset{G}{\simeq}"'] \arrow[dl, "f_3"'] & Y_4 \arrow[l, hook'] \arrow[dll, "f_4"] \\
 & & X & &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

ただし、(Y_1, Y_0) と (Y_3, Y_4) は 有限 G-CW-pair で、$Y_1 \to Y_2$ と $Y_3 \to Y_2$ は G-ホモトピー同値である。'$\sim$' は同値関係になる。

$Wa^G(X)$ は Y が finitely G-dominated である G-写像 $f: Y \to X$ の同値類の集合で、特に X が finitely G-dominated のとき $w^G(X)$ を id_X の同値類として定める。これは、

$$[f: Y \to X] + [g: Z \to X] = [f \amalg g: Y \amalg Z \to X]$$

を和とする可換群になる。

$Wa^G(X)$ と同じようにして、群 $Wa^G_H(X)$ を定義する。

定義. $Wa^G_H(X)$ を Y が 軌道型 (H) のみを持つ finitely G-dominated な G-CW 複体 から X への G-写像の同値類のなす群とする。ここで、同値関係は次で入れる。Y_0 と Y_4 を軌道型 (H) のみを持つ finitely G-dominated な G-CW 複体とする。G-写像 $f_0: Y_0 \to X$ と $f_4: Y_4 \to X$ が同値であるとは、軌道型 (H) のみを持つ finitely G-dominated な空間 Y_i と G-写像 $f_i: Y_i \to X$ $(i = 1, 2, 3)$ があって、Y_1 (resp. Y_3) は Y_0 (resp. Y_4) に有限個の type (H) の G-cell を attach してできており、また $j_1: Y_1 \to Y_2$ と $j_2: Y_3 \to Y_2$ は G-ホモトピー同値であるような可換図式 (1.1) が存在することである。

定義. X、Y および B を G-CW 複体とする。G-写像 $f: X \to B$ と $g: Y \to B$ が同値である $(f \approx g)$ とは $f \underset{G}{\simeq} h \circ g$ を満たす G-ホモトピー同値写像 $h: X \to Y$ があるときにいう。H を G の閉部分群とする。この時、$\pi_0(G, B)$ と $\pi_0(G, H, B)$ を次で定義する。

$$\pi_0(G, B) := \{x:\ G/H \to B \quad G\text{-map} \mid H \leq G\}/_{\approx}$$

$$\pi_0(G, H, B) := \{x:\ G/H \to B \quad G\text{-map}\}/_{\approx}$$

$\amalg_{(H)} \pi_0(G, H, B) = \pi_0(G, B)$ が成り立つことは簡単に分かる。$x \in \pi_0(G, H, X)$ に対し、X^H の $x(1H)$ を含む連結成分を $X^H(x)$ で表して、$\pi_0(X^H)$ の上の WH-作用に関する

isotropy subgroup を $IX^H(x)$ と書くことにする。$X^H(x)$ は x の代表元のとり方に依存するが、これらはすべて作用を込めて同相である。また、$X^{>H}(x) = X^H(x) \cap X^{>H}$ とおく。

ϕ_H を次の合成準同型写像とする。

$$
\begin{array}{ll}
\oplus_{\pi_0(G,H,X)} \tilde{K}_0(Z[\pi_1(E(IX^H(x)) \times_{IX^H(x)} X^H(x))]) & \xrightarrow{(1)} \\
\oplus_{\pi_0(G,H,X)} Wa^{\{1\}}(E(IX^H(x)) \times_{IX^H(x)} X^H(x)) & \xrightarrow{(2)} \\
\oplus_{\pi_0(G,H,X)} Wa^{IX^H(x)}(E(IX^H(x)) \times X^H(x)) & \xrightarrow{(3)} \\
\oplus_{\pi_0(G,H,X)} Wa^{IX^H(x)}(X^H(x)) & \xrightarrow{(4)} \\
Wa^{WH}(X^H) & \xrightarrow{(5)} \\
Wa^{NH}(X^H) & \xrightarrow{(6)} \\
Wa^G(G \times_{NH} X^H) & \xrightarrow{(7)} \\
Wa^G(X) &
\end{array}
\tag{1.2}
$$

ここで、これらの写像は次のとおりである。(1) は同型写像 $[f] \mapsto f_*(w^{\{1\}}(Y))$ の逆写像である (cf. [12, 定理 5.2])。pullback が写像 (2) を誘導する。これもまた同型である。写像 (5) は WH- 作用を NH- 作用と思うことから引き起こされるものである。$NH \to G \times_{NH} NH = G$ による induction が (6) を定義する。準同型 (3) と (7) は自然な写像 $E(IX^H(x)) \times X^H(x) \to X^H(x)$ と $G \times_{NH} X^H \to GX^H \to X$ からそれぞれ誘導される写像である。

定理 1.3. ([12, 定理 5.5])

$$
\sum_{(H)} \phi_H \colon \oplus_{\pi_0(G,X)} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(EIX^H(x) \times_{IX^H(x)} X^H(x))]) \to Wa^G(X)
$$

は同型写像である。

C_* を $(E(IX^H(x)) \widetilde{\times_{IX^H(x)} X^H(x)}, p^{-1}(E(IX^H(x)) \times_{IX^H(x)} V_x^{>H}))$ の特異チェイン複体とする。ただし、$p \colon E(IX^H(x)) \widetilde{\times_{IX^H(x)}} X^H(x) \to E(IX^H(x)) \times_{IX^H(x)} V_x^{>H}$ は universal covering からの射影を表す。X が finitely G-dominated であれば、複体 C_* とチェインホモトピー同値な $\mathbb{Z}[\pi_1(E(IX^H(x)) \times_{IX^H(x)} X^H(x))]$-module の複体 P_* で、各 P_i は有限生成で射影的なものが存在する。$W(x,H)$ を $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(E(IX^H(x)) \times_{IX^H(x)} X^H(x))])$ の元 $\sum_i (-1)^i [P_i]$ で定義する。もちろん、これは P_* のとり方に依存しない。この時、同型写像 $\sum_{(H)} \phi_H$ は $\big(W(x)\big)$ を $w^G(X)$ へ写す。Iizuka [9] は $W(X^H(x), \{1\})$ が零であることと、$X^H(x)$ が type $\{1\}$ の cell は有限であるような $IX^H(x)$-CW 複体と $IX^H(x)$- ホモトピー同値になることとが同値であることを示した。

上の定理の証明と同様にして、次の定理が得られる。

定理 1.4. G- 空間 X に対し、G- 写像をそれ自身に写すことが引き起こす準同型

$$
\Phi \colon \oplus_{(H)} Wa_H^G(X) \to Wa^G(X)
$$

は同型である。

最後に、 restriction を定義する。K を G の閉部分群とする。G-作用を K-作用に制限することから引き起こされる準同型写像を

$$\mathrm{Res}_K^G(X)\colon Wa^G(X) \to Wa^K(X)$$

で表す。これを restriction という。コンパクト可換群 G とその閉部分群 K に対し、

$$\begin{array}{ccc} \oplus_H Wa_H^G(X) & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & Wa^G(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \oplus \mathrm{Res}_K^G} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_K^G} \\ \oplus_H \mathrm{Res}_K^G Wa_H^G(X) & \xrightarrow{\mathrm{Res}\circ\Phi} & \mathrm{Res}_K^G(X) Wa^G(X) \end{array} \tag{1.5}$$

は可換である。

2 自由 G-空間の covering 作用

Bredon [5] および Illman [10] は、G-空間の universal covering の作用を考察した。この節では、自由 G-空間の regular covering の作用について考察しよう。

連結な S^1-空間 X の作用の $S^1 \times \{x_0\}$ への制限を $\nu\colon S^1 \to X$ で表す。

補題 2.1. G を連結なリー群、X を連結な G-空間とする。このとき、G の元 g が引き起こす基本群の同型写像 $g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, gx_0)$ は、G での道から誘導される x_0 から gx_0 への道による *conjugation* である。

証明. ρ を G での 1 から g への道とする。$\pi_1(X)$ の元 $\alpha\colon S^1 \to X$ に対し、$\nu(s,t) = \rho(t)\cdot\alpha(s)$ で $\nu(\alpha)\colon S^1 \times I \to X$ を定義すると、これは $g\alpha$ と $\rho\circ\alpha\circ\rho^{-1}$ との ∂I を止めたホモトピーを与えることが分かる。∎

命題 2.2. $G = S^1$、$T^n = G \times K$ (トーラス) とおく。X を、連結な自由 T^n-空間とする。$L = \mathrm{Im}\,\pi_1(\nu)$ とおき、$\pi_1(X) = L \times N$ と仮定する。$p\colon \tilde{X} \to X$ を N に関する *covering* とすると、$\tilde{X}$ は Γ-空間となる。ここで、$1 \to L \to \Gamma \xrightarrow{\pi} T^n \to 1$ は完全系列で、$\tilde{X}/L = X$ を満たす。更に次のことが成立する。

(1) $\pi_1(\nu)$ が単射のとき、$\tilde{G} = \mathbb{R}$、$|L|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = G$ を射影とし、そうでないとき $\tilde{G} = S^1$、$|L|\colon \tilde{G} \to \tilde{G}/L = G$ を degree $|L|$ の写像とする。このとき、$\Gamma = \tilde{G} \times K$ であり、$\pi = |L| \times id_K$ がなりたつ。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & = \!=\!=\!=\!= & \tilde{G} \times K \\ & \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle |L| \times id_K} & \\ & G \times K & \end{array}$$

(2) $\pi_1(\nu)$ が単射のとき、$\tilde{X}$ を K-空間と思ってできる T^n-写像 $h\colon G \times \mathrm{res}_K^G \tilde{X} \to X\colon (g, \tilde{x}) \mapsto g \cdot p(\tilde{x})$ は T^n-ホモトピー同値である。

(3) $\pi_1(\tilde{G} \to \tilde{X})$ は自明な準同型である。

証明. Γ を写像 $g: X \to X$ $(g \in G)$ を cover する同相写像 $\tilde{X} \to \tilde{X}$ のなす集合とする。

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "p"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Γ の位相は $\tilde{X}$ の相対位相をもつ $\Gamma \cdot \tilde{x}_0$ の位相で入れる。Γ から T^n への準同型は γ を g に写す写像で定義する。補題 2.1 により、これは全射である。$\tilde{X}$ の Deck 変換が、Γ の部分群 L を与える。この定義により、列 $1 \to L \to \Gamma \to G \to 1$ は完全である。このことから、(1) は明らか。
(2) $\pi_1(\tilde{X}) = \mathbb{Z} \oplus \pi_1(X)$ と 下の図が可換であることから、h はホモトピー群の同型を引き起こす。よって h は T^n- ホモトピー同値写像である。

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, hook'] \arrow[dr] & \\ G \times \tilde{X} \arrow[rr, "h"] & & X \end{tikzcd}$$

(3) $\pi_1(\nu)$ が単射のときは明らかなので、L は有限巡回群と仮定する。

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\tilde{G}) \arrow[rr, "\tilde{\nu}"] \arrow[dd, tail, "|L|"] & & \pi_1(\tilde{X}) \arrow[d, "\cong"] \\ & & N \arrow[d, hook] \\ \pi_1(G) \arrow[r, two heads] & L \arrow[r, hook] & \pi_1(X) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

図 (2.3) において、$\pi_1(\tilde{G}) \to L$ は零写像であるから、$\tilde{\nu}$ もそうである。∎

更に、次のことが言える。

命題 2.4. G をトーラス、X を *finitely* G-*dominated*、連結な自由 G- 空間とする。このとき、Q は $\pi_1(X)$ の商群、$\pi_1(Y)$ は有限生成可換群、および $Y/Q = X$ を満たす、連結な自由 $(Q \times G)$- 空間 Y が存在する。

証明. X の universal covering $\tilde{X}$ は自由 Γ- 空間である。ここで、Γ は、$1 \to \pi_1(X) \to \Gamma \to G \to 1$ がリー群の完全系列となるものである。$\pi_1(X)$ は離散位相を持っている。Γ の

連結成分からなる Γ のリー部分群を Γ_0 とかき、$P=\pi_1(X)\cap\Gamma_0$、$Q=\pi_1(X)/P$ とおく。この時、各行が完全である可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

がある。これから、$(*)\ 1\to Q\to\Gamma/P\xrightarrow{\pi}G\to 1$ は完全系列であることが分かる。Γ/P の単位元の連結成分 $(\Gamma/P)_0$ は Γ_0/P であるので、上の列 $(*)$ は分離する。γ_0、γ をそれぞれ Γ_0、Γ の元とする。π は $[\gamma_0,\gamma]$ を零に写すので、$[\gamma_0,\gamma]$ は Deck 変換の元を表している。Γ_0 は連結なので、単位元 1 から γ_0 への道がとれる。この道は、1 から $[\gamma_0,\gamma]$ への P での道を誘導し、よって、$[\gamma_0,\gamma]=1$ となる。これは、Γ_0 が中心 $Z(\Gamma)$ の部分群であることを示し、$\Gamma/P\cong Q\times G$ であることが分かる。$Y=\tilde{X}/P$ とおけば、Q が Γ_0 の部分群であることから $\pi_1(Y)=P$ は可換である。また P は Γ において正規だから、Y は自由 Γ/P-空間であり、$Y/Q=X$ を満たす。∎

3 ある自由 G-空間における消滅

この節では、主定理の特別な場合の証明を与える。X を次を満たす連結な S^1-空間とする。

$$\operatorname{Im}\pi_1(S^1\xrightarrow{\nu}X)\cap[\pi_1(X),\pi_1(X)]=\{1\} \tag{3.1}$$

この条件は $x_0\in X$ のとり方によらない。もし $H_1(\nu)$ が単射であれば、ある有限巡回群 L と、ある L-空間 Y があって、X は $S^1\times_L Y$ と S^1-ホモトピー同値になる (cf. [20])。

次の定理は、$\pi_1(S^1\to X)$ が単射でない場合の証明に役にたつ。

定理 3.2. G を連結なコンパクトリー群、K をリー群とし、$N=G\times K$ とおく。K-連結な $n\ (\le\infty)$ 次元自由 N-CW 複体 X に対し、$X\cup_N Z$ と $G\times(X/G)\cup_N Z$ が N-ホモトピー同値となる N-CW 複体 Z が存在する。更に、もし $\operatorname{Im}\pi_1(G\to X)=\{1\}$ $(0\le i<n)$ が成立していれば、$\operatorname{Im}\pi_i(G\to Z)=\{1\}$ $(0\le i<n)$ を満たす任意の自由 N-CW 複体 Z に対し、以下の可換図式を満たす写像がとれる。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X\cup_N Z \arrow[dr] & G\times(X/G)\cup_N Z \arrow[l, "\simeq_N"'] \arrow[d] & G\times(X/G) \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

証明. X の cell の次元 m による帰納法で証明する。まず $m=0$ のとき、0-skeleton X^0 は $N\times(X^0/N)$ に等しい。$\varphi\colon N\times\dot{e}^1\to X^0$ を X の接着写像とし、ψ を φ の $\{1\}\times\dot{e}^1$

への制限写像とする。$\psi(0) = (1, v)$ $(v \in X^0/N)$ と仮定してよい。$\psi(1) = (g, k, x) \in G \times K \times (X^0/N)$ とするとき、$\psi' \colon \dot{e}^1 \to N \times (X^0/N)$ を $\psi'(0) = \psi(0)$、$\psi'(1) = (1, k, x)$ で定義する。すると ψ と ψ' はホモトピックである。$\varphi' \colon N \times \dot{e}^1 \to X^0$ を ψ' の自然な拡張とすると、φ' は φ と N- ホモトピックになる。故に、次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[d] & G \times (X^1/G) \arrow[l, "\simeq_N"'] \arrow[dl, "pr_2"] \\
X^1/G &
\end{tikzcd}$$

帰納法の仮定として、N- ホモトピー同値写像 $h \colon X^m \cup_N Z \to G \times (X^m/G) \cup_N Z$ $(m \geq 1)$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
X^m \cup_N Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_2"'] & G \times (X^m/G) \cup_N Z \arrow[dl, "p_3"] \\
(X^m/G) \cup_K (Z/G) &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

が N- ホモトピー可換であるとする。ここで、p_2 と p_3 は自然な射影である。次の可換図式を考えよう。

$$\begin{tikzcd}
\pi_m(X^m) \arrow[rr, "p_{1*}"] \arrow[d, "j_{1*}"] & & \pi_m(X^m/G) \arrow[dl] \arrow[dd, "j_{2*}"] \\
\pi_m(X^m \cup_N Z) \arrow[r, "p_{2*}"] \arrow[d, "h_*"] & \pi_m((X^m/G) \cup_K (Z/G)) & \\
\pi_m(G \times (X^m/G) \cup_N Z) \arrow[ur, "p_{3*}"'] & & \pi_m(G \times (X^m/G)) \arrow[ll, "j_{3*}"]
\end{tikzcd}$$

$\varphi \colon N \times \dot{e}^{m+1} \to X^m$ を X の接着写像とする。p_{3*} が単射であるから、φ に関する $G \times (X^m/G) \cup_N Z$ の接着写像 $h \circ j_1 \circ \varphi$ は $j_3 \circ j_2 \circ p_1 \circ \varphi$ に取り替えることができる。このようにすれば、m を $m+1$ に変えたときの図 (3.3) を満たす N- ホモトピー同値写像 $X^{m+1} \cup_N Z \to G \times (X^{m+1}/G) \cup_N Z$ がとれる。∎

系 **3.4.** K をトーラス N の連結な閉部分群とする。連結な自由 N-CW 複体 Y が $\pi_1(K \to Y)$ を自明にすれば、$Y \cup_N Z$ と $K \times (Y/K) \cup_N Z$ を N- ホモトピー同値にする有限自由 N-CW 複体 Z が存在する。

証明. K はトーラスであるから、$\pi_i(K)=0\ (i\geq 2)$ を満たす。よって、Z を1-連結2次元自由有限 N-CW 複体とすればよい。∎

Y を $(K\times G_2)$-空間、$K\leq G_1$ とする。$G_1\times Y$ 上の $(G_1\times G_2)$-作用 $(g_1,g_2)\cdot(a,y)=(g_1a,g_2y)$ から誘導される作用により、$G_1\times_K Y$ は $(G_1\times G_2)$-空間となる。

補題 3.5. G を S^1 とし、X を図 *(3.1)* を満たす連結な自由 G-空間とする。このとき、$\operatorname{Im}\pi_1(G/L\xrightarrow{\bar{\nu}}X/L)$ を $\pi_1(X/L)$ の直和因子にもつ有限巡回群 L が存在する。

証明. $\pi_1(\nu)$ が単射のときは、既に [20, 補題 3.1] で示した。そこで、$K=\operatorname{Im}\pi_1(\nu)$ を有限とする。任意の有限巡回群 L に対し、以下の図は可換である。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \operatorname{Im}\pi_1(\bar{\nu}) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 1\\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & H_1(X/L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

L が $H_*(X)$ に自明に作用しているので第2行は完全系列であることが分かる。もちろん、第1行も完全なので、系列 $1\to \operatorname{Tor} H_1(X)\to \operatorname{Tor} H_1(X/L)\to L\to 1$ は完全である。L を位数 $|\operatorname{Tor} H_1(X)|$ の巡回群とすると、$\bar{K}=\operatorname{Im}\pi_1(\bar{\nu})$ は $\operatorname{Tor} H_1(X/L)$ の直和因子になり、$\pi_1(X/L)\to H_1(X/L)\to \bar{K}$ が splitting を与える。∎

定理 3.6. N をコンパクト可換リー群、G をその連結な閉部分群とする。X を、

$$\operatorname{Im}\pi_1(G\to X)\cap[\pi_1(X),\pi_1(X)]=\{1\}$$

を満たす *finitely* N*-dominated*、連結な自由 N-空間とする。このとき、$Wa^{G\times K}(X)$ において $[f]=w^{G\times K}(X)$ を満たす G の有限部分群 L、*finitely* $(L\times K)$*-dominated* な空間 Y および N-写像 $f\colon G\times_L Y\to X$ が存在する。

証明. $G=G_1\times\cdots\times G_n\ (G_i\cong S^1)$ と分解しておく。簡単のため、$N=G\times K$、$N_j=G_j\times\cdots\times G_n\times K\ (2\leq j\leq n)$、$N_{n+1}=K$ とする。L を G_1-空間 X に 補題 3.5 を適用して得られた部分群とする。$J=\operatorname{Im}\pi_1(\bar{\nu}\colon G_1/L\to X/L)$、$G'=G_1/L$ とおく。Y を J を Deck 変換群としてもつ covering とする。$\pi_1(\nu)$ が単射のときは、$\pi_1(\bar{\nu})$ も単射になり、命題 2.2 (1) によって、X と $G_1\times_L Y'$ とが N-ホモトピー同値となる $(L\times N_2)$-空間 Y' が見つかる。$\pi_1(\nu)$ は単射でないと仮定する。同じく 命題 2.2 より、Y は $\tilde{G}\times N_2$-空間である。$\pi_1(\tilde{G}\to Y)$ は自明であるから、次の可換図式を満たす適当な有限 N-CW 複体

Z と N- 写像がある。

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, hook] \arrow[ddr, equal] & \\
Y \cup_{\tilde{G}\times N_2} Z \arrow[dr] & \\
\tilde{G} \times (Y/\tilde{G}) \cup_{\tilde{G}\times N_2} Z \arrow[u, "\underset{\tilde{G}\times N_2}{\simeq}"] \arrow[r] & Y \\
\tilde{G} \times (Y/\tilde{G}) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\tilde{g}"'] &
\end{tikzcd}
$$

これを J で割ると、

$$
\begin{tikzcd}
X/L \arrow[d, hook] \arrow[ddr, equal] & \\
(X/L) \cup_{G'\times N_2} (Z/J) \arrow[dr] & \\
G' \times (X/G') \cup_{G'\times N_2} (Z/J) \arrow[u, "\underset{G'\times N_2}{\simeq}"] \arrow[r] & X/L \\
G' \times (X/G_1) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

が得られ、 $Wa^{N/L}(X/L)$ において $[id_{X/L}] = [g\colon G_1/L \times X/G_1 \to X/L]$ が成り立つ。射影 $X \to X/L$ に関する g の pullback の source は $G_1 \times_L X_1$ の形をしている。ここで、 X_1 は適当な $(L \times N_2)$- 空間である。

$$
\begin{tikzcd}
G_1 \times_L X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
G_1/L \times X/G_1 \arrow[r, "g"] & X/L
\end{tikzcd}
$$

よって、$Wa^N(X)$ において、$[id_X]=[f_1\colon G_1\times_L X_1\to X]$ が成立する。更に、$\pi_1(G_2\times\cdots\times G_n\to X_1)$ の像は $\pi_1(X_1)$ の交換子群と自明に交わっている。$L_1=L$ とおく。上の議論を $(L_1\times N_2)$- 空間 X_1 に適用すると、$L_2<G_2$、$(L_1\times L_2\times N_3)$- 空間 X_2 および $(L_1\times N_2)$- 写像 $f_2\colon G_2\times_{L_2}X_2\to X_1$ で $[id_{X_1}]=[f_2]\in Wa^{L_1\times N_2}(X_1)$ を満たすものを見つけることができる。$G_1\times_{L_1}(G_2\times_{L_2}X_2)=(G_1\times G_2)\times_{L_1\times L_2}Y_2$ であることに注意しよう。これを繰り返すと、

$$
\begin{aligned}
id_X &\sim f_1\colon G_1\times_{L_1}X_1\to X\\
id_{X_1} &\sim f_2\colon G_2\times_{L_2}X_2\to X_1\\
&\ \vdots\\
id_{X_{n-1}} &\sim f_n\colon G_n\times_{L_n}X_n\to X_{n-1}
\end{aligned}
$$

が得られる。簡単のため、$G'_j=G_1\times\cdots\times G_j$、$L'_j=L_1\times\cdots\times L_j$ とおくと

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\wr"] & X \\
G_1\times_{L_1}X_1 \arrow[ur, "f_1"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\wr"] & G_1\times_{L_1}X_1 \\
G'_2\times_{L'_2}X_2 \arrow[ur, "G_1\times_{L_1}f_2"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\wr"] & G'_2\times_{L'_2}X_2 \\
G'_3\times_{L'_3}X_3 \arrow[ur, "G'_2\times_{L'_2}f_3"'] & \\
\vdots & {} \\
G'_{n-1}\times_{L'_{n-1}}X_{n-1} \arrow[ur, "G'_{n-2}\times_{L'_{n-2}}f_{n-1}"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\wr"] & G'_{n-1}\times_{L'_{n-1}}X_{n-1} \\
G'_n\times_{L'_n}X_n \arrow[ur, "G'_{n-1}\times_{L'_{n-1}}f_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

が得られたことになる。従って、$L = L_1 \times \cdots \times L_n$、$Y = X_n$ とおけば、id_X は

$$(G'_{n-1} \times_{L'_{n-1}} f_n) \circ \cdots \circ (G'_1 \times_{L'_1} f_2) \circ f_1$$

と同値になる。∎

注意. 定理 3.6 の仮定のもとで、以下の図を可換にする、有限自由 G-CW 複体 Z、有限部分群 L および N- 写像が存在することになる。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, hook] \arrow[ddr, equal] & \\
X \cup_N (Z \times K) \arrow[dr] & \\
G \times_L Y \cup_N (Z \times K) \arrow[u, "\simeq_N"] \arrow[r] & X \\
G \times_L Y \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

系 **3.7.** $G = S^1$ とする。X を *(3.1)* を満たす G- 空間とすれば、

$$\mathrm{Res}^G_K(X) Wa^G_{\{1\}}(X) = \{0\}$$

が G の任意の真部分群 K について成り立つ。

証明. $\{X_k\}$ を X の連結成分のなす集合とする。$Wa^G_{\{1\}}(X) = \prod_k Wa^G_{\{1\}}(X_k)$ であるから、X は連結と仮定してよい。$f: Y \to X$ を $Wa^G_{\{1\}}(X)$ の元を代表する G- 写像とする。Y は連結と仮定できる。もし必要なら、有限個の自由 1-cell を Y に attach すればよい。$\mathrm{Im}\, \pi_1(G \to Y) \cap [\pi_1(Y), \pi_1(Y)]$ を kill するように自由 2-cell を 1 つ attach すれば、f はできた空間 Z から X への G- 写像へ拡張される。定理 3.6 と系 3.7 [19] を組み合せれば、同変有限性障害 $w^K(Z)$ は零であることが容易に分かる。よって、$Wa^K_{\{1\}}(X)$ において $[f] = [g] = 0$ を得る。∎

どんな G の閉部分群 K に対しても X^K が連結な場合に、X は G-0- 連結であるという。

系 **3.8.** (cf. [13]) $X^{T^n} \neq \emptyset$ である *finitely* T^n*-dominated*、T^n*-0-* 連結な空間 X に対し、$Wa^{\{1\}}(X)$ において $w^{\{1\}}(X) = [X^{T^n} \to X]$ が成り立つ。

証明. K を T^n の閉部分群とする。$(X^K)^{WK} \neq \emptyset$ だから、X^K 上の作用から誘導される準同型 $\pi_1(WK) \to \pi_1(X^K)$ は零写像になる。よって、$K \neq T^n$ ならば WK は S^1 を部分群にもつので、系 3.8 および命題 1.4 から示せる。∎

4 主定理

G をトーラス、K をその閉部分群とし、$\Psi(G:K)=\{H \leq G \mid KH=G\}$ とおく。
主定理は次である。

定理. G をトーラス、K をその閉部分群、そして X を G-空間とする。このとき

$$\Phi|: \oplus_{H\in\Psi(G:K)} \mathrm{Res}_K^G(X)Wa_H^G(X) \to \mathrm{Res}_K^G(X)Wa^G(X)$$

は全射である。特に、もし K が G の有限部分群であれば、

$$\mathrm{Res}_K^G(X)Wa^G(X) \cong Wa^{\{1\}}(X^G)$$

が成り立つ。

証明. X が唯1つの軌道型 (H) をもつ G-CW 複体ならば、$G\times_{NH}Y$ と X とが G-同相になる自由 WH-CW 複体 Y がある。よって、任意の $\Psi(G:K)$ に属さない元 H に対して、$\mathrm{Res}_{WH\cap KH/H}^{WH}(Y)Wa_{\{1\}}^{WH}(Y)$ が零であることを示せばよい。(H) が $\Psi(G:K)$ に属していないとすると、$S^1\cap KH\neq S^1$ を満たす G の部分群 S^1 が存在する。従って次のことを示すとよい。

補題. N をコンパクトリー群、K をその正規閉部分群とする。もし K に含まれない N の閉部分群 S^1 があれば、

$$\mathrm{Res}_K^N(X)Wa_{\{1\}}^G(X)=\{0\}$$

が成り立つ。

証明. $[Z\to X]$ を $Wa_{\{1\}}^N(X)$ の任意の元とする。仮定により、N/K は階数1以上で Z/K に自由に作用する。N/K の極大トーラスを G とすると、G-空間 Z/K に対して命題 2.4 における群 Q と $(G\times Q)$-空間 Y がある。Z/K が finitely G-dominated だから Y は finitely $(G\times Q)$-dominated になる。よって、定理 3.6 より、ある有限群 L と finitely $(L\times Q)$-dominated な空間 W および id_Y と同値である $(G\times Q)$-写像 $f: G\times_L W\to X$ が存在する。Q で割ると、$f/Q: G\times_L W/Q\to Z/K$ と $id_{Z/K}$ は同値になる。系 3.7 [19] により、$w^{\{1\}}(Z/K)=0$ を得る。射影 $p: Z\to Z/K$ はファイバーに K をもつ有限 CW 複体 Z/K 上の equivariant K-fibration であるから、$w^K(Z)=p^*(w^K(Z/K))=0$ がいえる。よって、$Wa^K(X)$ において $[Z\to X]=0$ が成り立つ。∎

系 4.1. *G を連結な次元をもつコンパクトリー群、B を finitely dominated な空間とする。任意の orientable G-fibration $E\to B$ に対し、E は有限 CW 複体のホモトピー型をもつ。*

任意の finitely S^1-dominated な自由 S^1-空間 X と有限巡回群 K に対し、transfer $p^*: Wa^{\{1\}}(X/S^1)\to Wa^K(X)$ は自明な写像である。更に finitely S^1-dominated な空間 X に対し、X^{S^1} の有限性障害は X のそれを決めることが分かる。

系 4.2. *G をコンパクトリー群、T を G の極大トーラスとする。$X^T=\emptyset$ である finitely G-dominated な空間 X は有限 CW 複体のホモトピー型をもつ。*

5 応用

系 4.2 より次の結果を得る。

定理 5.1. *G を rank >0 のコンパクトリー群とし、$E \to B$ を principal G-fibration で、B は finitely dominated とする。このとき、E は有限 CW 複体のホモトピー型をもつ。*

よって、次元をもつコンパクトリー群 G が自由に作用している finitely G-dominated な空間は有限 CW 複体のホモトピー型をもつ。従って、transfer $p^*\colon Wa^{\{1\}}(X/G) \to Wa^{\{1\}}(X)$ は自明である。

命題 5.2. *G を次元をもつコンパクトリー群、Z を軌道型はすべて有限群の共役類からなる有限 G-CW 複体とする。このとき、Z で G-dominate される G-空間はすべて有限 G-CW 複体のホモトピー型をもつ。*

例. $SO(3)$ の部分群の共役類、およびその正規化群は次のとおりである。(cf. [23])

$SO(3)$			
$O(2)$		$NO(2)$	$= O(2)$
$S^1 = SO(2)$		$NSO(2)$	$= O(2)$
$A(5)$	icosahedral	$NA(5)$	$= A(5)$
$S(4)$	octahedral	$NS(4)$	$= S(4)$
$A(4)$	tetrahedral	$NA(4)$	$= S(4)$
D_n $(n \geq 2)$	dihedral group of order $2n$	ND_n	$= \begin{cases} S(4) & \text{if} \quad n=2 \\ D_{2n} & \text{if} \quad n \neq 2 \end{cases}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \geq 1)$	cyclic group of order n	$N(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$= O(2)$ $(n \geq 2)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & SO(3) \arrow[dll, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drrr, dash] & & & \\
 & O(2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & A(5) \arrow[dr, dash] & & S(4) \arrow[dl, dash] \\
SO(2) \arrow[dr, dash] & & D_n \arrow[dl, dash] & & & A(4) & \\
 & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & & & & &
\end{tikzcd}
$$

X を唯 1 つの軌道型しかもたない finitely $SO(3)$-dominated な空間とすると、X は $SO(3) \times_{NH} X^H$ と $SO(3)$- 同相になる。H が $S(4)$ もしくは $A(5)$ の場合には、$NH = H$ であり、X は $SO(3)/H \times X^H$ と $SO(3)$- 同相になる。$SO(3)$ の任意の有限部分群 H に対して $SO(3)/H$ の Euler 標数は零であることに注意すると、巡回群でない有限部分群 H に対

し、Lal の定理 ([14]) を fibration $SO(3) \times_{NH} X^H \to SO(3)/NH$ に適用することにより、X は有限 CW 複体とホモトピー同値になることがわかる。H を巡回群または無限部分群とすると、$SO(3)/NH$ は可縮になる。$i: X^H \hookrightarrow SO(3) \times_{NH} X^H$ を包含写像とすると、

$$w^{\{1\}}(SO(3) \times_{NH} X^H) = i_* w^{\{1\}}(X^H)$$

が成り立つ。i_* は同型写像であることに注意しよう。$H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のときは、系 4.1 によって $w^{\{1\}}(X^H) = 0$ である。故に、$G = SO(3)$ のときには 系 4.2 は最良な条件を与えていることがわかる。

定理 5.3. 有限 CW 複体のホモトピー型をもたない *finitely dominated* な空間は自由 S^1-作用をもたない。

証明. X を finitely dominated、連結な空間で、有限 CW 複体のホモトピー型をもたないとする。$G = S^1$ とおく。X が自由 G-作用をもったと仮定しよう。X' を G-空間 X の G-CW 近似した G-CW 複体とする。可換図式

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, hook] \arrow[dr, equal] & \\
X' \cup_G Z \arrow[r] & X' \\
G \times_L Y \cup_G Z \arrow[u, "\simeq_G"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

を満たす有限 G-CW 複体 Z がある。作用を忘れると、X と X' はホモトピー同値である。よって、$G \times_L Y \cup_G Z$ は finitely dominated である。射影 $(G \times Y) \cup_{G \times L} (Z \times L) \to G \times_L Y \cup_G Z$ は有限 cover だから、$(G \times Y) \cup_{G \times L} (Z \times L)$ も finitely dominated になる。また明らかに、この空間は $Y = Y \cup_L (\{*\} \times L)$ を dominate するので、Y は finitely dominated となる。系 3.7 ([19]) を fibration $Y \to S^1 \times_L Y \to S^1/L$ に適用すると、$w^{\{1\}}(S^1 \times_L Y) = 0$ となり、$w^{\{1\}}(X) = 0$ が導かれ矛盾が起こる。∎

F と B を finitely dominated、連結な空間、$F \to E \to B$ を fibration とする。このとき、$p_* \circ p^*$ は $\chi(F)$ 倍の写像になっていることが知られている。我々は、F が次元をもつコンパクトリー群に対して、$p^* = 0$ を示した。そこで、F が有限群のときに p^* が $\chi(F)$ 倍になっているかを調べたいと思っている。$\pi_0(K) \to \pi_0(X)$ が全単射の時は、$w^{\{1\}}(X) = 0$ ならば $w^K(X) = 0$ であることはすぐに分かる。また、$p^* \circ p_*$ が $\chi(F)$ 倍になることが証明できる。K を有限巡回群とする。X が連結で、$H_1(S^1 \to S^1 \times_K X; \mathbb{Z})(1)$ が torsion を法にして生成元になっているときに、X を primitive な K-空間ということにしよう。K-空間 X が primitive ならば、K-作用は自由である。$D^G(X)$ を G-CW 複体のホモトピー型を持つ G-空間から X への G-写像の同値類からなる semigroup とする。このとき次のことがわかる。

命題 5.4. X が *primitive* な K-空間ならば、$D^{\{1\}}(X)$ において

$$[p: X \to X/K] = |K| \cdot [id_{X/K}: X/K \to X/K]$$

が成立する。更に $p_* \circ p^*: Wa^{\{1\}}(X/K) \to Wa^{\{1\}}(X/K)$ は $|K|$ 倍である。

証明. primitive であることから、$\pi_1(S^1 \times_K X) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(X/K)$ であることが示せる。よって S^1- ホモトピー同値写像 $h: S^1 \times X/K \to S^1 \times_K X$ が存在する。h の定義を思い出そう。X/K は $\pi_1(X/K) < \pi_1(S^1 \times_K X)$ に関する X の covering とホモトピー同値である。$\pi: X/K \to S^1 \times_K X$ を covering projection とすると、$h(g, y) = g \cdot \pi(y)$ となっていた。

$$\begin{tikzcd}
 & S^1 \times X/K \arrow[dr, "h"] & \\
X/K \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook, "\pi"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & S^1 \times_K X \arrow[dl, "p_2"] \\
 & S^1/K \times X/K &
\end{tikzcd}$$

よって、$p_2 \circ h(g, y) = p_2(g \cdot \pi(y)) = g \cdot p_2 \circ \pi(y) = g \cdot j(y) = (g, y)$ を得る。

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times X/K \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & S^1 \times_K X \arrow[d, "p_2"] \\
 & S^1/K \times X/K
\end{tikzcd}$$

従って、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_K^{S^1}([p]) &= [S^1 \times_K X \xrightarrow{p_2} S^1/K \times X/K] \\
&= [h \circ p_2] \\
&= \mathrm{Ind}_K^{S^1}([K \times X/K \to X/K])
\end{aligned}$$

となり、induction が同型であることより、$D^K(X/K)$ において

$$[p] = [K \times X/K \to X/K]$$

である。restriction を施すと

$$[p] = |K| \cdot [id_{X/K}] \quad \text{in } D^{\{1\}}(X/K)$$

が得られる。∎

References

1. D. R. Anderson, *The obstruction to the finiteness of the total space of a flat bundle*, Amer. J. Math. **95** (1973), 281–293.
2. P. Andrzejewski, *The equivariant Wall finiteness obstruction and Whitehead torsion*, Transformation groups, Proceedings Poznań 1985, Lecture Notes in Math. **1217** (1986), 11–25.
3. J. Baglivo, *An equivariant Wall obstruction theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **256** (1978), 305–324.
4. H. Bass, A. Heller, and R. G. Swan, *The Whitehead group of a polynomial extension*, Publ. Math. IHES. **22** (1964), 545–563.
5. G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press New York, 1972.
6. C. B. de Lyra, *On a conjecture on homotopy*, An. Acad. Brasil Ciénc. **37** (1965), 167–184.
7. K. Ehrlich, *Fibrations and a transfer map in algebraic K-theory*, J. Pure Appl. Algebra **14** (1979), 131–136.
8. S. C. Ferry, *A simple homotopy approach to the finiteness obstruction*, Proc. Dubrovnik Conf. on Shape Theory 1981, Lecture Notes in Math. **870** (1981), 73–81.
9. K. Iizuka, *Finiteness condition for G-CW complexes*, Japan. J. Math. **10** (1984), 55–69.
10. S. Illman, *Actions of compact Lie groups and the equivariant Whitehead group*, Osaka J. Math. **23** (1986), 881–927.
11. S. Kwasik, *On equivariant finiteness*, Compositio Math. **49** (1983), 363–372.
12. W. Lück, *The geometric finiteness obstruction*, Proc. London Math. Soc. **54** (1987), 367–384.
13. ———, *Transformation groups and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math. 1408, Springer-Verlag, 1989.
14. V. J. Lal, *Wall obstruction of a fibration*, Invent. Math. **6** (1968), 67–77.
15. H. J. Munkholm and E. K. Pedersen, *Transfers in algebraic K- and L-theory induced by S^1-bundles*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **2** (1982), 451–460.
16. H. J. Munkholm and A. A. Ranicki, *The projective class group transfer induced by an S^1-bundles*, Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **2** (1982), 461–484.
17. E. K. Pedersen, *Universal geometric examples for transfer maps in algebraic K- and L-theory*, J. Pure. Appl. Algebra **22** (1981), 179–192.
18. E. K. Pedersen and L. R. Tayler, *The Wall finiteness obstruction for a fibration*, Amer. J. Math. **100** (1978), 887–896.
19. T. Sumi, *Finiteness obstructions of equivariant fibrations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **27** (1991), 627–637.
20. ———, *$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-finiteness for certain S^1-spaces* (to appear).
21. T. tom Dieck, *Über projektive Moduln und Endlichkeitshindernisse bei Transformationsgruppen*, Manuscripta Math. **34** (1981), 135–155.
22. C. T. C. Wall, *Finiteness conditions for CW complexes*, Ann. of Math. **81** (1965), 56–69.
23. J. A. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill series in higher mathematics, McGraw-Hill, 1967.