数理解析研究所講究録
第793巻 1992年 225-237

ベキ零リー群の almost free action について

国際基督教大　山川あい子 (Aiko Yamakawa)

§1. 背景

多様体及び作用はすべて C^∞-多様体、C^∞-作用とする。

リー群 G の多様体 M への almost free action（即ち、イソトロピー群がすべて0次元の作用）は、M 上に各軌道を葉とする葉層構造を実現する。特に、G が連結巾零リー群のとき、その葉層構造を nilfoliation、可解リー群のとき、solvfoliation とよぶことにする。nilfoliation に関しては次の結果がある。

<G. Hector、E. Ghys、Y. Moriyama : Topology vol.28, 1989>

G を連結巾零リー群、M を（コンパクト）閉多様体とし、$\mathcal{F}$ を G の M 上の almost free action によって定まる余次元1 nilfoliation とする。このとき

(1) M は多様体として、S^1 上のファイバー・バンドルとなる（そのファイバーを F とする）。

更に

(2) $\mathcal{F}$ のある葉 L が非自明なホロノミーを持てば、L は F と微分同相なコンパクト多様体となる。

(3) $\mathcal{F}$ がホロノミーを持たないならば

(i) ファイバー F はすべて $\mathcal{F}$ の葉（よって葉はコンパクト）、あるいは、

(ii) すべての葉が微分同相で、それらは各々 M で稠密となる。

この結果から、閉多様体上の余次元 1 *nilfoliation* には、非コンパクトな葉で非自明なホロノミーを持つものは存在しないことがわかる。ところが $\mathcal{F}$ が *solvfoliation* のときには、その様相が異なる。例えば、G が連結可解リー群で巾零でないもののうち最も簡単な 2 次元アファイン群 $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+ \right\}$ の場合でさえ、その *almost free action* によって閉多様体上に非自明なホロノミーを持つ非コンパクトな葉が存在する余次元 1 葉層構造を実現することができる。この *solvfoliation* については、<C. Camacho, A. L. Neto、"Geometric Theory of Foliations" VIII, §5. Birkhäuser> に詳しく述べられているので参照されたい。

この事実から推しても、もっと一般の巾零でない、連結可解

リー群Gに関しても、閉多様体上へのそのalmost free actionによって、非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元1葉層構造を実現し得るだろうと思われる。しかし、これらについては、今の所、ほとんど論じられていないようである。

そこで、我々は、次節において、ある簡単な可解リー群Gを対象として、非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元1葉層構造を実現するような、閉多様体上へのalmost free G-actionの一構成法を紹介する。そして第3節で、その方法を使った具体例をいくつか与えることにする。

§2. 非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元1葉層構造を実現する閉多様体上へのalmost free action

2.1 群Gを加法群$\mathbb{R}^l$と$\mathbb{R}^n$の半直積、即ち準同型写像$\psi_G : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n$によって定まる$\mathbb{R}^l$の$\mathbb{R}^n$による分解するextensionとする。このとき$G = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$（集合として）の群演算は

$$(\mathbb{S}, \mathbb{X}) \cdot (\mathbb{t}, \mathbb{Y}) = (\mathbb{S}+\mathbb{t}, \mathbb{X} + \psi_G(\mathbb{S})(\mathbb{Y})),$$
$$(\mathbb{S}, \mathbb{X}), (\mathbb{t}, \mathbb{Y}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$$

で与えられ、ψ_Gはl個の可換な$n \times n$実行列A_i $(i=1, \dots, l)$

によって

$$\varphi_G((t_1,\dots,t_\ell)^t)=\exp\left(\sum_{i=1}^{\ell}t_iA_i\right),\quad (t_1,\dots,t_\ell)^t\in\mathbb{R}^\ell$$

と書きあらわされる。明らかにGは可解群で、次の補題が単純計算によって得られる。

補題 2.1　Gがベキ零リー群 $\Longleftrightarrow$ 各A_iがベキ零行列

2.2.　Gを各A_iが対角行列 $diag(\lambda_{1i},\lambda_{2i},\dots,\lambda_{ni})$で与えられる$\mathbb{R}^\ell$と$\mathbb{R}^n$の半直積とし、$\lambda$を$(k,i)$成分が$\lambda_{ki}$である$n\times\ell$行列とする。以下、このような$G$を$G=(\mathbb{R}^\ell,\mathbb{R}^n;\lambda)$と記すことにする。

$G=(\mathbb{R}^\ell,\mathbb{R}^n;\lambda)$に対し、次の条件Aを考える。

条件A：(1) $\alpha P=\lambda$ を満たす $n\times\ell$ 実行列 α と $\ell\times\ell$ 実正則行列 P が存在する。

(2) ℓ個の同時対角化可能な$(n+1)\times(n+1)$実行列$\tilde{A}_i$ $(i=1,\dots,\ell)$で、その対角形が $diag(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\dots,\alpha_{ni},-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki})$ となるものが存在する。α_{ki}はαの(k,i)成分。

(3) (2)の$\tilde{A}_i$は$\exp\tilde{A}_i$が行列式1の整数行列となる。

補題 2.2　$G=(\mathbb{R}^\ell,\mathbb{R}^n;\lambda)$が条件Aを満たすとき、$G$と同

型な部分群を含み、更に uniform discrete subgroup を含む $\mathbb{R}^l$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ の半直積で与えられるリー群 $\widetilde{G}$ が存在する。

(証明) 条件 A－(2)(3) より、準同型 $\psi: \mathbb{R}^l \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^{n+1}$ が $\psi((t_1,\cdots,t_l)^t) = \exp(\sum_{i=1}^{l} t_i \widetilde{A}_i)$ で与えられる $\mathbb{R}^l$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ の半直積を $\widetilde{G}$ とおくと、$\widetilde{G}$ は $\psi|_{\mathbb{Z}^l}: \mathbb{Z}^l \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}$ により定まる $\mathbb{Z}^l$ と $\mathbb{Z}^{n+1}$ の半直積を離散部分群として含む。この部分群を Γ と記せば、明らかに $\widetilde{G}/\Gamma$ は(コンパクト)閉多様体である。即ち Γ は $\widetilde{G}$ の uniform discrete subgroup となっている。実際、$\widetilde{G}/\Gamma$ は T^l 上のファイバー T^{n+1} のバンドルになっている。またこの $\widetilde{G}$ に対し、条件 A－(1), (2) によって G から $\widetilde{G}$ への単射準同型写像 $\varphi: G \to \widetilde{G}$ を

$$\varphi(s, x=(x_1,\cdots,x_n)^t) = (Ps, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k)$$

$$(s, x) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n, \quad v_k \in \mathbb{R}^{n+1}$$

によって与えることができる。ここで v_k $(k=1,\cdots,n)$ は行列 $\widetilde{A}_i$ の固有値 α_{ki} に対する単位固有ベクトルとする。

以下 $\widetilde{G}_\alpha$, Γ_α によって、$G=(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^n; \lambda)$ に対して補題 2.2 の証明中にある方法で、条件 A－(1) を満たす一組 α から構成された群 $\widetilde{G}$, Γ を表すものとする。また φ を通して G を $\widetilde{G}_\alpha$ の部分群とみなすと、G は $\widetilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ に G の $\widetilde{G}_\alpha$ への左移動

によって自然に作用するが、この作用をξ_Gと記す。即ち

$$
\begin{aligned}
&\xi_G\left((\mathbb{S},\mathbb{X}),(\mathbb{t},\mathbb{Y})\Gamma\right)\\
&=\left(\left(P\mathbb{S},\sum_{k=1}^{n}x_k\mathbb{V}_k\right)\cdot(\mathbb{t},\mathbb{Y})\right)\Gamma\\
&=\left(P\mathbb{S}+\mathbb{t},\ \sum_{k=1}^{n}x_k\mathbb{V}_k+\exp\left(\sum_{i=1}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{\ell}p_{ij}s_j\right)\tilde{A}_i\right)(\mathbb{Y})\right)\Gamma
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots(2.2)
$$

$$(\mathbb{S}=(s_1,\cdots,s_\ell)^t,\ \mathbb{X}=(x_1,\cdots,x_n)^t)\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^n$$

$$(\mathbb{t},\mathbb{Y})\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n+1}$$

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1\ell}\\ \vdots&&\vdots\\ p_{\ell 1}&\cdots&p_{\ell\ell}\end{bmatrix}\ ;\ \ell\times\ell\ \text{行列}$$

このξ_Gが almost free で各軌道が$\hat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$で余次元1となっていることは明らか。

2.3 2.2で構成した$\hat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$へのGの almost free action ξ_Gの様相を調べよう。$G=(\mathbb{R}^\ell,\mathbb{R}^n:\mathbb{A})$, $\hat{G}_\alpha$に対し条件Aの他に、更に次の条件Bを付加する。

<u>条件B</u>：$\tilde{A}_i$の固有値α_{ki} $(k=1,\cdots,n)$に対する固有ベクトル$\mathbb{V}_k$ $(k=1,\cdots,n)$で張られる$\mathbb{R}^{n+1}$の部分空間Wに直交するベクトルを$\mathbb{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_{n+1})^t$とするとき、$w_s/w_t$が無理数となるs, tが存在する。

補題2.3　Gが条件Aを満たし、$\widehat{G}_\alpha$が条件Bを満たすとき、(2.2)のξ_Gの各軌道は非コンパクト多様体で、$\widehat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$に稠密に埋め込まれている。

(証明)今$H=\mathbb{R}^n \triangleleft G$とおく。$\xi_G$をHに制限した作用による点$(0,Y)\Gamma_\alpha \in \widehat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$の軌道は(2.2)と条件Bより、$T^l$上の$T^{n+l}$ーバンドルである$\widehat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$のファイバー$T^{n+l}$に既に非コンパクト多様体として稠密に埋め込まれていることがわかる。実際条件Bの(ii)によって、それは$T^{k_1}\times\mathbb{R}^{k_2}$ ($k_1+k_2=n$, $k_2>0$)のタイプの多様体となっている。よって補題が成立する。

次にξ_Gによって実現される閉多様体$\widehat{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$上の余次元1葉層構造のホロノミーについて考察する。条件A, Bに更に次の条件Cを付け加える。

条件C：条件Aのαのある列の和$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}$は零ではない。

このとき今までの結果を加えて次の定理が得られる。

定理　$G=(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^n : \psi)$が条件A, B, Cを満たすとする。このと

き、非コンパクトな葉が非自明なホロノミーを持つ余次元1葉層構造を実現する、閉多様体上へのalmost free G-actionが存在する。

（証明）$\widetilde{G}_\alpha$, Γ_α を G に対し2.2で構成された群とすると、補題2.2より（2.2）で与えられる G の $\widetilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ 上へのalmost free action ξ_G が存在する。よって補題2.3より、この ξ_G によって実現される葉層構造が非自明なホロノミーを持つ葉を持つことが証明されればよい。点 $(0,\ u=\sum_{j=1}^{n+1} z_j v_j)\in\widetilde{G}_\alpha$ を一つ定め、G の元 $(s=(s_1,\dots,s_l)^t,\ 0)$ をとる。（v_j $(j=1,\dots,n+1)$ は $\widehat{A_i}$ の固有値 α_{ji} に対する固有ベクトルで、v_{n+1} は $-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}$ に対する固有ベクトルである。）
今、$Ps=(m_1,m_2,\dots,m_l)^t\in\mathbb{Z}^l$ とし、ξ_G' を ξ_G を誘導する G の $\widetilde{G}_\alpha$ への左移動とすると

$$\xi_G'\left((s,0),\ (0,\ u=\sum_{j=1}^{n+1} z_j v_j)\right)$$
$$=\Big((m_1,m_2,\dots,m_l)^t,\ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} z_j e^{\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_{ji}} v_j + z_{n+1} e^{\sum_{i=1}^{l} m_i\beta_i} v_{n+1}}_{\beta_i=-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}}\Big)$$

と書ける。よって

$$\sim\sim = \sum_{j=1}^{n+1} z_j v_j + \sum_{j=1}^{n} x_j v_j + (n_1,n_2,\dots,n_{n+1})^t \quad \cdots(2.3.1)$$

を満たす $x_j\in\mathbb{R}$, $n_j\in\mathbb{Z}$ が存在するとすると、点 $(0,u)\Gamma_\alpha\in\widetilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ を通る ξ_G によって定まる葉 L_u は非自明な基本

群を持つ。実際、$\pi_1(L_\omega,\omega)$ には、$\pi_1(T^l,\pi(\omega))\cong\mathbb{Z}^l$ で $\mathbb{Z}^l\ni(m_1,\dots,m_l)$ に対応する $\pi_1(T^l,\pi(\omega))$ の元 $[\sigma]$ の σ を $\tilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ に引き上げた loop σ_{L_ω} によって定まる 0 でない元 $[\sigma_{L_\omega}]$ がある。ここで π はバンドル $\tilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha\longrightarrow T^l$ の射影とする。またここで $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底 e_i $(i=1,\dots,n+1)$ が $\{v_j,\ j=1,\dots,n+1\}$ の一次結合として $e_i=\sum_{j=1}^{n+1}c_{ji}v_j$ とあらわされていたとすると、上の等式 (2.3.1) は行列を使い

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n+1,1} & \cdots & \cdots & c_{n+1,n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1\left(e^{\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_{1i}}-1\right)-x_1 \\ \vdots \\ z_n\left(e^{\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_{ni}}-1\right)-x_n \\ z_{n+1}\left(e^{\sum_{i=1}^{l}m_i\beta_i}-1\right) \end{bmatrix}$$

$$\cdots(2.3.2)$$

と書き変えられる。これより $e^{\sum_{i=1}^{l}m_i\beta_i}\neq 1$、即ち $\sum_{i=1}^{l}m_i\beta_i\neq 0$ ならば、(2.3.2) を満たす z_{n+1} は多くとも可算個しかないことがわかる。また

$$z_{n+1}=\frac{1}{e^{\sum_{i=1}^{l}m_i\beta_i}-1}\left(\sum_{j=1}^{n+1}c_{n+1,j}\,n_j\right)\qquad\cdots(2.3.3)$$

でありさえすれば、$z_1,\dots,z_n$ が (2.3.2) を満たすように $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ を選ぶことができる。これらの事より、$\sum_{i=1}^{l}m_i\beta_i\neq 0$ のとき、(2.3.3) を満たす z_{n+1} を持った点 $(0,\omega=\sum_{j=1}^{n+1}z_jv_j)\Gamma_\alpha$ を通る葉 L_ω は σ_{L_ω} に沿って非自明なホロノミーを持つことになる。実際、$R=\{\omega+yv_{n+1}\mid y\in\mathbb{R}\}$ とおくと L_ω の

ホロノミー写像 $h:\pi_1(L_\omega,\omega)\longrightarrow \mathrm{Diff}\,\mathbb{R}$ は

$$h([\sigma_{L_\omega}])(y)=e^{\sum_{i=1}^{l} m_i B_i}\,y \qquad (e^{\sum_{i=1}^{l} m_i B_i}\neq 1)$$

で与えられている。さてまた、条件Cより $B_j\neq 0$ となる j が存在することが保証されているから、$m_i=0$ $(i\neq j)$、$m_j=1$ とおけば $\sum_{i=1}^{l} m_i B_i\neq 0$ とすることができる。よって定理が導かれる。

注意：今 $G=(\mathbb{R}^l,\mathbb{R}^n;\lambda)$ が巾零リー群であるとすると、補題2.1より $\lambda=0$ となり、条件Aを満たす $\mathcal{A}$ もまた零行列となる。故に各 $\widetilde{A}_i$ も零行列で、このようなGに対しては条件B, Cは成立し得ない。上の定理で条件A, B, Cが成立するには必然的にGは巾零でない可解リー群でなければならないことになる。

§3 例

この節では§2の条件A, B, Cを満たす、従って§2の定理が成立する可解リー群 $G=(\mathbb{R}^l,\mathbb{R}^n;\lambda)$ の簡単な例をいくつか挙げる。

Gが $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n;\lambda,\ \mathrm{rank}\,\lambda=n)$ であるとき、条件A-(2),(3)、及び条件B, Cを満たす $n\times n$ 正則行列 $\mathcal{A}$ がとれ

れば、条件 A－(1) は $P=\alpha^{-1}\lambda$ とすることでいつでも成立する。

例 1　$G=\{\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1;\lambda=[1]\}$ とする。
$\alpha=\left[\log\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ とすると、$\hat{A}_1=\log\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ は固有値 $\log\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ を持ち、その固有ベクトルは $\left(1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^t$ で、互いに直交している。よって、この α を使い、G は条件 A, B, C を成立せしめる。それ故、§2 定理が成立する。
この G は 2次元アファイン群 $\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&e^t\end{pmatrix}\ \middle|\ x,t\in\mathbb{R}\right\}$ で、$G\underset{\xi_G}{\curvearrowright}\tilde{G}_\alpha/\Gamma_\alpha$ は、§1 で言及した C. Canacho, A.L. Neto の本にある例と G-同型である。

例 2　$G=(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2;\lambda,\ \mathrm{rank}\,\lambda=2)$ とする。
α,β,γ を $f(x)=x^3-3x+1=0$ の 3 根とすると 3次方程式の根の判別式 $D=9^2$ となり、α,β,γ は 3 実根で、β,γ は α の整係数多項式で書きあらわされることがわかる。よって $\mathbb{Q}(\alpha)$（$\{1,\alpha,\alpha^2\}$ が基底の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみる）の一次変換 $T(x)=\alpha x$, $T'(x)=\beta x$ の基底 $\{1,\alpha,\alpha^2\}$ に関する行列は可換で、行列式 $=-1$ の整数行列となる。
実際、その行列は $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&0&-3\\0&-1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$ となり

$\alpha = 2\cos\frac{2}{9}\pi$, $\beta = 2\cos\frac{4}{9}\pi$, $\gamma = \frac{-1}{\alpha\beta}$ となる。
また $v_1 = (1, \alpha^2, \alpha)^t$, $v_2 = (1, \beta^2, \beta)^t$, $v_3 = (1, \gamma^2, \gamma)^t$
ととると、

$$[v_1\ v_2\ v_3]^{-1} A^2 [v_1\ v_2\ v_3] = diag(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$$

$$[v_1\ v_2\ v_3]^{-1} B^2 [v_1\ v_2\ v_3] = diag(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)$$

となる。そこで

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \log\alpha^2 & \log\beta^2 \\ \log\beta^2 & \log\gamma^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \log A^2, \quad \tilde{A}_2 = \log B^2$$

とおけば、$\mathrm{rank}\,\mathcal{A} = 2$ となるどのような $\mathcal{A}$ に対しても条件A、B、C は成立し、よってこの G に対しても§2 の定理が成立する。ここで $\mathrm{rank}\,\mathcal{A} = 2$ で、$f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることに注意しておく。

例2の議論は $G = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathcal{A}, \mathrm{rank}\,\mathcal{A} = n)$ の場合にも拡張できるだろう。

例3　$G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2; \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \neq 0)$ とする。
$f(x) = x^3 + px^2 + qx - 1$ を整係数多項式で、$\mathbb{Q}$ 上既約で、正の3実根 α, β, γ をもつものとする。このとき、必然的に α, β, γ は異なり、すべて無理数となる。この $f(x)$ に対し、3×3 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -q \\ 0 & 1 & -p \end{bmatrix}$ とすると、

Aの行列式は1で、α, β, γを固有値とし、その固有ベクトルとして $(1, \alpha^2+p\alpha, \alpha)^t$, $(1, \beta^2+p\beta, \beta)^t$, $(1, \gamma^2+p\gamma, \gamma)^t$ がとれる。 よって $\lambda = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}$ であるとき、$\mathbb{\alpha} = \begin{bmatrix}\log\alpha \\ \log\beta\end{bmatrix}$、$\hat{A}_1 = \log A$ ととれば条件A, B, C が成立する。 故に $\lambda = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}$ となる正実数α, βを根にもつ$\mathbb{Q}$上既約な整係数多項式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx - 1$ が存在し得る $G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2; \mathbb{\lambda} = \begin{bmatrix}1 \\ \lambda\end{bmatrix})$ に対して §2 の定理は成立する。

例3の議論は $G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n; \mathbb{\lambda} = \begin{bmatrix}1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{bmatrix})$ なる群に対しても拡張できよう。

このようにして定理を満たすGの具体例はまだまだ挙げられるが、現在、$G = (\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^n; \mathbb{\lambda})$ のどのような$\mathbb{\lambda}$に対して条件A, B, C が成立するか、言いかえれば条件A, B, C を満たすl個の整数行列$\widetilde{A_i}$が存在し得るかを、もっと統一的に考察したいと考えている。 更には§2の議論を、より一般の可解群にも拡張したいと考えている。