数理解析研究所講究録
第 794 巻 1992 年 30-37

Amalgam method and its application

林　　誠　(Makoto Hayashi)
田中 康彦　(Yasuhiko Tanaka)

単純群の分類が完成して以後の有限群論の主要課題のひとつとして、分類定理の証明を簡易化するという問題があげられる。あの長く複雑な証明を、だれにでも理解できるようにしたいというのは、非常に自然な考えであると思われる。ここでは、Amalgam method と呼ばれる方法と、それが単純群の分類のどの部分にどのように応用されるかについて解説する。

まず、ことばの定義からはじめる。

定義．　群 G は偶数位数であるとする。

(1) 部分群 L が G の 2-局所部分群であるとは、ある単位群でない 2-部分群 T に対して、$L = N_G(T)$ となることである。

(2) 群 G が標数 2 型であるとは、G のすべての 2-局所部分群 L に対して、

$$C_L(O_2(L)) \subseteq O_2(L)$$

が成り立つことである。（ただし、$O_2(L)$ は、L の最大の正規 2-部分群をあらわす。）

例．　最も典型的な標数 2 型の群として、標数 2 の有限体上で定義された Lie 型の単純群があげられる。例えば、

$$G^* \cong PSL_{n+1}(q) \ \ (q = 2^m)$$

とする。（以後、中心は無視して、$G^* = SL_{n+1}(q)$ とみなす。）群 G^* の極大 2-局所部分群 M^* をとる。よく知られているように (Borel-Tits の定理)、M^* は G^* の極大放物型部分群になるので、特に、G^* のシロー 2-部分群 S^* を含む。共役により、

$$S^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると、

$$M^* = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \right\}$$

となる。行列の簡単な計算により、

$$O_2(M^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

であり、したがって、

$$C_M^*(O_2(M^*)) \subseteqq O_2(M^*)$$

となる。

単純群の分類定理の現在の証明は、標数 2 型の単純群とそれ以外の単純群とに分けて行われている。このように分けることは、有限群論における素数 2 の特殊性を考えれば自然なことと思われるので、われわれもこれを踏襲する。また、標数 2 型でない単純群に対しては、それらを扱うよい一般論が存在するので、ここではそれも認めることにする。したがって、われわれがこれから考察の対象とするのは、標数 2 型の単純群である。　上の例で述べたように、標数 2 の Lie 型の単純群は標数 2 型であるが、実はその逆がほぼ成立する。すなわち、

標数 2 型の単純群は、少数の例外を除けば標数 2 の Lie 型である。

われわれは、この命題を証明することを目標とする。

与えられた単純群が Lie 型であることを示す最も自然な方法は、BN 対を構成することである。われわれの場合でいえば、標数 2 型の単純群の中に標数 2 の分裂 BN 対を構成できればよいのであるが、例外の場合をも含めて扱うために、BN 対よりもやや弱い概念を定義する。

定義. 群 G は偶数位数であるとする。単位群と異なる G の 2-部分群 S と、S を含む G の部分群 $X_1, \cdot \cdot \cdot, X_n$ に対して、組 $(X_1, \cdot \cdot \cdot, X_n; S)$ が G の標数 2、階数 n の放物系であるとは、次の条件を満たすことである。

(a) $S \in \mathrm{Syl}_2(X_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$

(b) X_i $(1 \leqq i \leqq n)$ は S-既約（すなわち、X_i の S を含む極大部分群はただひとつ）

(c) $O_S(\langle X_1, \cdot \cdot \cdot, X_n \rangle) = 1$（すなわち、$S$ のどの単位群と異なる部分群もすべての $X_1, \cdot \cdot \cdot, X_n$ で正規部分群になることはない。）

(d) $C_{X_i}(O_2(X_i)) \subseteq O_2(X_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$

例. 標数 2、階数 n の Lie 型の単純群 G^* は、標数 2、階数 n の放物系をもつ。実際、$S^* \in \mathrm{Syl}_2(G^*)$、$B^* = N_{G^*}(S^*)$ とすれば、B^* は G^* の Borel 部分群であり、G^* の B^* を含む極小放物型部分群 $P_1^*, \cdot \cdot \cdot, P_n^*$ を取って、$X_i^* = O^{2'}(P_i^*)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおけば、組 $(X_1^*, \cdot \cdot \cdot, X_n^*; S^*)$ は G の標数 2、階数 n の放物系である。

前の例でいうと、

$$G^* \cong PSL_{n+1}(q) \quad (q = 2^m)$$

$$S^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathrm{Syl}_2(G^*)$$

$$B^* = N_{G^*}(S^*) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_i^* = \left\{ \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ (i \\ (i+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \right\}$$

$$X_i^* = \left\{ \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ (i \\ (i+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \right\}$$

である。

われわれは、標数 2 型の単純群 G を次のプログラムにしたがって分類することを目標とする。

(1) 群 G の放物系 $(X_1, \cdots, X_n; S)$ で、$S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ となるもの（さらに、付帯条件 (*) があってもよい）を見つける。

(2) 条件 (*) を満たす放物系の同型類を分類する。

(3) もし $(X_1, \cdots, X_n; S) \cong (X_1^*, \cdots, X_n^*; S^*)$ ならば、$G \cong G^*$ を示す。

このプログラムが、標数 2 型のすべての単純群に対してうまく実行できるかどうかについては、今のところよくわからない。しかし、例外の場合をも含めて標数 2 型の単純群を理解するのには、最も自然でかつ魅力的な方法であると思われる。 ここで、このプログラムが非常にうまく実行できた例を述べる。

例．　（五味、林、田中）標数２型の単純群 G で、そのすべての 2-局所部分群が可解群であるものの分類

(1) 群 G の標数 2、階数 2 の放物系 $(X_1, X_2; S)$ で、条件 (a), (b), (c), (d) とさらに付帯条件

$$\text{(e)}\quad S = [O_2(X_1), O^2(X_1)](O_2(X_1) \cap O_2(X_2))[O_2(X_2), O^2(X_2)]$$

を満たすものが存在する。（多少の例外が存在するが、それらは一般論により処理できる。）

(2) 条件 (a) - (e) を満たす放物系の同型類が分類できる。

(3) (2) の結果を使って、G が分類できる。

今後の目標は、同様の方法をもっと広いクラスの単純群の分類に応用することである。

ここで、放物系の分類に威力を発揮する Amalgam method について解説する。その場合、放物系がどの単純群（あるいは、もっと一般に有限群）に含まれているかはそれほど重要でないので、放物系の定義を次のように変更しておく。

定義．　単位群と異なる 2-群 S と、S と同型な部分群を含む群 $X_1, \cdots, X_n$（ただし、この同型により $S \subseteqq X_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とみなす）に対して、組 $(X_1, \cdots, X_n; S)$ が標数 2、階数 n の放物系であるとは、次の条件を満たすことである。

(a) $S \in \mathrm{Syl}_2(X_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$

(b) X_i $(1 \leqq i \leqq n)$ は S-既約（すなわち、X_i の S を含む極大部分群はただひとつ）

(c) $O_S(X_1, \cdots, X_n) = 1$（すなわち、$S$ のどの単位群と異なる部分群もすべての $X_1, \cdots, X_n$ で正規部分群になることはない。）

(d) $C_{X_i}(O_2(X_i)) \subseteqq O_2(X_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$

放物系の性質と、それから自然に得られる作用群をもつ幾何学的対象（例えばグラフなど）の幾何学的性質が互いに反映しあう。さらに、放物系の性質と、その作用群をもつ幾何学的対象に付随して得られる部分群束の群論的性質が互いに反映しあう。われわれは、放物系の分類に際して、そのような幾何学的対象や部分群束に着目する。

以後、標数 2、階数 2 の放物系の場合にやや詳しく説明する。 標数 2、階数 2 の放物系 $(X, Y; S)$ に対して、$G = X \underset{S}{*} Y$ （X と Y の S 上の融合積）とおき、X、Y、S をそれぞれ G の部分群とみなす。ここで、グラフ Γ を次のように定義する。グラフ Γ の頂点集合 $V(\Gamma)$ は、G における X と Y の右剰余類の全体であり、ふたつの頂点 $\alpha, \beta \in V(\Gamma)$ は、$\alpha \neq \beta$ かつ $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ のとき、かつそのときに限り結ばれるものとする。このとき、群 G はグラフ Γ に右から作用するが、その作用は Γ の辺集合上可移である。かってな $\xi \in V(\Gamma)$ に対して、ξ の G における固定部分群を G_ξ とかく。融合積の性質により、かってな隣接する頂点 $\xi, \eta \in V(\Gamma)$ に対して、同型

$$(X, Y; S) \cong (G_\xi, G_\eta; G_{\xi\eta})$$

が成り立つことに注意する。さらに、

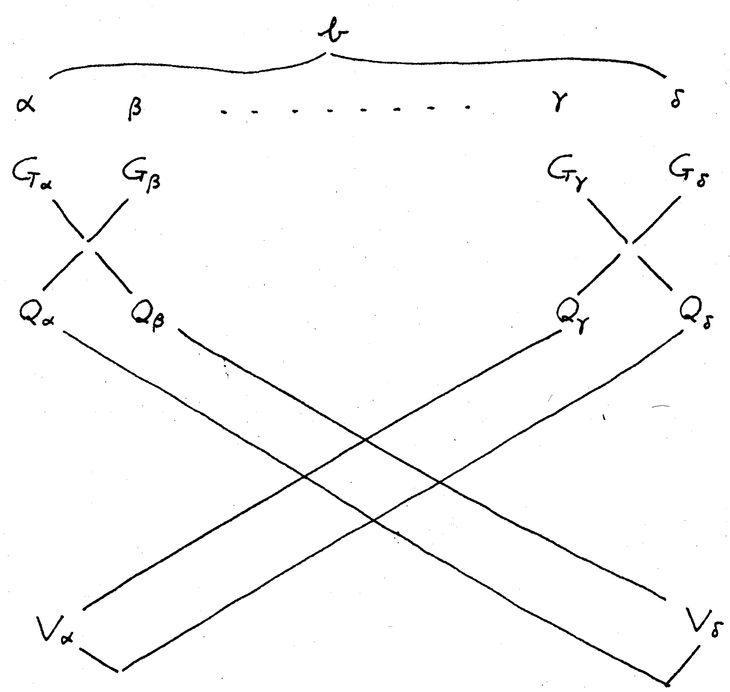
$$Q_\xi = O_2(G_\xi)$$
$$V_\xi = \langle \Omega_1(Z(G_{\xi\eta})) \mid d(\xi, \eta) = 1 \rangle$$

とおき、パラメータ b を

$$b = \min\{\mathrm{d}(\alpha, \delta) \mid V_\alpha \nleq Q_\delta\}$$

と定義する。

以後、簡単のために、b は偶数とする。 頂点 $\alpha, \delta \in V(\Gamma)$ を、$\mathrm{d}(\alpha, \delta) = b$ かつ $V_\alpha \nleq Q_\delta$ を満たすようにとり、次のような部分群束の絵をかいてみる。



条件 (b) より G_α は 2-既約な可解群であるから、b の最小性により、

$$Q_\alpha \in \mathrm{Syl}_2(C_{G_\alpha}(V_\alpha))$$

が成り立つ。同様に、

$$Q_\delta \in \mathrm{Syl}_2(C_{G_\delta}(V_\delta))$$

も成り立つ。したがって、条件

$$V_\alpha \nsubseteq Q_\delta$$
$$[V_\alpha, V_\delta] \neq 1$$
$$V_\delta \nsubseteq Q_\alpha$$

がすべて同値になる。対称性により、

$$|V_\alpha : V_\alpha \cap Q_\delta| \leqq |V_\delta : V_\delta \cap Q_\alpha|$$

と仮定すると、$\overline{G}_\alpha\ (= G_\alpha/C_{G_\alpha}(V_\alpha))$は、次の定理の仮定を満たす。

定理. 群 G は 2-既約で、$O_2(G) = 1$ とする。忠実な $GF(2)G$-加群 V と G の単位群と異なる基本可換 2-部分群 A で、次の条件を満たすものが存在すると仮定する。

$$|V : C_V(A)| \leqq |A|$$

このとき、G の $O^2(G)$ を含む正規部分群 N で、次の性質をもつものが存在する。

$N \cong SL_2(2^m) \times \cdots \times SL_2(2^m)$ $(m \geqq 1)$ または、

$\Sigma_{2m+1} \times \cdots \times \Sigma_{2m+1}$ $(m = 2^l \geqq 1)$ であり、

また、$[V, N]$ と A はそれぞれ自然なものである。

この定理を使って、次の定理が得られる。

定理. 標数 2、階数 2 の放物系 $(X, Y; S)$ においては、つねに $X \ntriangleright S \ntriangleleft Y$ が成り立つ。

次に、部分群 V_α と V_δ は、互いに他を正規化する可換部分群であるから、

$$[V_\alpha, V_\delta, V_\delta] \subseteq [V_\delta, V_\delta] = 1$$

である。つまり、部分群 V_δ は部分群 V_α 上に、"quadratic" に作用する。したがって、群 G_α は、部分群 V_α に含まれる主組成因子を $GF(2)G_\alpha$-加群とみることにより、次の定理

の仮定を満たす。

定理．　群 G は 2-既約で、$O_2(G)=1$ とする。また、$GF(2)G$-加群 V は、V_N（ただし、$N=O^2(G)$）が完全可約であり、G の 2-部分群 T で、$[V,T,T]=0$ かつ $V=\sum_{x\in N} C_V(T)^x$ となるものが存在すると仮定する。このとき、次が成り立つ。

$$V=\sum_{|T:U|\leqq 2^r} C_V(U)$$

ただし、$r=r(G)$ は、G の組成因子の同型類によって決まる自然数で、次のように定義する。

$$r(G)=\max\{\, r(L) \mid L \text{ は } G \text{ の組成因子 } \}$$

$$r(L)=\max\left\{ m(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ は } F^*(G)\cong L \text{ である有限群} \\ V \text{ は忠実な } GF(2)G\text{-加群} \\ A \text{ は } [V,A,A]=0 \text{ となる } G \text{ の基本可換 2-部分群} \end{array} \right\}$$

もし、G が可解群ならば、$r(G)=1$ であり、この事実が上で例にあげたすべての 2-局所部分群が可解群である標数 2 型の単純群の分類に重要な役割をはたしている。その証明を詳しく検討してみると、標数 2、階数 2 の放物系 $(X,Y;S)$ の分類に関しては、$r(X)$ と $r(Y)$ がともに小さければ、同様の方法が使えることがわかる。一方、$r(G)$ が大きい単純群 G は、多少の例外を除いて標数 2 の Lie 型であるので、結局、標数 2、階数 2 の放物系 $(X,Y;S)$ としては、知られている単純群の中に実在するもの以外にはほとんど存在しないことがわかる。