数理解析研究所講究録
第794巻 1992年 38-49

A Characterization of Regulus Nets

大阪大学教養部　平峰　豊　(Yutaka Hiramine)

3次元射影空間 $PG(3,q)$ の中の絶対既約な2次曲面には，錐 $\mathcal{C}_3$，楕円型 $\mathcal{E}_3$，双曲型 $\mathcal{H}_3$ のちょうど三種類があることが知られている [4] が，このうち双曲型2次曲面 $x_1x_2+x_3x_4=0$ は Net 又は直交ラテン方陣の完備化の一意性に関係して興味深い性質をもつ。この $\mathcal{H}_3$ から得られる net ― regulus net ― は $SL(2,q)$ を認容する。(全自己同型群は中心積 $SL(2,q)*SL(2,q)$ を含む。) しかし，regulus net と同一の parameters をもち，$SL(2,q)$ を認容する nets は他にもいくつかある。これらは $SL(2,q)$ の $V(4r,p)$ $(q=p^r)$ 上の表現に対応している。以下ではこのことについて述べる。

$\mathcal{P}$ を有限集合 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{P}$ の部分集合のある族とする。結合構造 $N(\mathcal{P},\mathcal{L})$ が位数 n，次数 r の net であるとは，次の4条件が満たされることを言う：

(i) $\mathcal{L}=\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_r$ (disjoint union)，$r\geq 3$

(ii) $\mathcal{C}_i\ni l$，$\mathcal{C}_j\ni g \longrightarrow |l\cap g|=1$ $(\forall i\neq\forall j)$

(iii) $\forall P \in \mathcal{P}$, $\forall i$ $(1 \leq i \leq r)$ $\exists^1 l \in \mathcal{C}_i$ such that $P \in l$

(iv) $\exists g \in \mathcal{L}$, $|g| = n$.

($\mathcal{P}$の元を点、$\mathcal{L}$の元を直線と言う。)

上記4条件より次のことが容易に確かめられる。

- $|g| = n \quad \forall g \in \mathcal{L}$. $\quad \mathcal{P} = \bigcup_{l \in \mathcal{C}_i} l \quad (1 \leq \forall i \leq r)$
- $|\mathcal{C}_1| = \cdots = |\mathcal{C}_n| = n \quad |\mathcal{P}| = n^2$, $|\mathcal{L}| = nr$
- $n+1 \geq r$

$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$を略して$(n, r)$-netと呼ぶ。$d = n+1-r$を不足数と言うが、$d = 0$であることと$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$がアフィン平面であることとは同値である。各$\mathcal{C}_i$ $(1 \leq i \leq r)$を平行類と呼ぶ。$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$がcompletableであるとは、$\mathcal{L}$を含む$\mathcal{P}$の部分集合の族$\overline{\mathcal{L}}$があって(i.e. $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$) $N(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{L}})$が不足数0のnetつまり位数$n$のアフィン平面とできることを言う。$N(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{L}})$を$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$のcompletionと言う。($(n, r)$-netは位数$n$の$r-2$個の直交ラテン方陣と同値な概念である[1]から、netのcompletionは完備直交ラテン方陣の存在と同じことである。)
不足数が位数に比較してきわめて小さい時は常にcompletionが存在することが知られている。

定理 (R.H. Bruck [2]) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$とするとき$n > f(d-1)$ならば$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$はcompletionをもつ。

一方、completion の一意性については次が知られている。

定理 (R.H. Bruck) $d < \sqrt{n}+1$ ならば、completion は高々1通りしか存在しない。([2])

T.G. Ostrom は $d = \sqrt{n}+1$ の時に関して次を示した。

定理 (T.G. Ostrom [8]) $d = \sqrt{n}+1$ の時は高々2通りの completion が存在する。

(このときの d を臨界的であるという。)

(n,r)-net $N(\mathcal{P},\mathcal{L})$ の不足数 d が臨界的で、2通りの completion $N \cup N_1$ 及び $N \cup N_2$ をもつとする。(各 N_i は (n,d)-net で $d = \sqrt{n}+1$) このとき N_2 の任意の直線 l に対して net N_1 を l に制限したもの $l|N_1$ (つまり点集合は l, 直線集合は N_1 の各直線と l との空でない共通部分の全体をとる。) は $(\sqrt{n}, \sqrt{n}+1)$-net となることが容易に分かる。アフィン平面 $l|N_1$ は次により完全に決定された。

定理 (O. Prohaska [9]) $l|N_1$ はデザルグ平面である。とくに n は素数の偶数巾でなければならない。

上の場合、完備化された net $N \cup N_1$ で N_1 の部分を N_2 に取り換えることにより他の完備な net $N \cup N_2$ が得られている。完備化の一意性が崩れる時すなわち不足数が臨界的な状態の時に生ずるこの2つの部分 nets N_1, N_2 のあり方は N を無視

しても有限幾何的にみて特殊であることが予想される。一般に (n, s)-net $M_1 (= M_1(\mathcal{P}, \mathcal{L}))$ が derivable であるとは，点集合 $\mathcal{P}$ の上に構成された (n, s)-net $M_2 (= M_2(\mathcal{P}, \mathcal{L}'))$ があって，
$\ell|_{M_1} \cong (s-1, s)$-net $(\forall \ell \in \mathcal{L}')$ が成りたつことを言う。
$(n = |\ell| = (s-1)^2$ であるから必然的に $s = \sqrt{n} + 1$ である。$)$ M_2 を M_1 の opposite net という。先の N_1 は derivable で，N_2 は N_1 の opposite net である。

derivable net の例として regulus net があるが，次にこれを定義する。$\mathcal{F}$ を３次元射影空間 $PG(3, q)$ の中の双曲型２次曲面 $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ とする。$\mathcal{F}$ は $(q+1)^2$ 個の点からなり，$2(q+1)$ 個の射影直線を含む。これらは次の条件をみたすような２組 $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ に分けることができる。([4])

(i) $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ は $\mathcal{F}$ に含まれる射影直線の全体。

(ii) $|\mathcal{R}| = |\mathcal{R}|' = q+1$，　$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \phi$.

(iii) $l_1, l_2 \in \mathcal{R}$ $(l_1 \neq l_2)$ ならば　$l_1 \cap l_2 = \phi$.

(iv) $l_1', l_2' \in \mathcal{R}'$ $(l_1' \neq l_2')$ ならば　$l_1' \cap l_2' = \phi$

(v) $l \in \mathcal{R}$, $l' \in \mathcal{R}'$ ならば，$|l \cap l'| = 1$

$\mathcal{R}$ を regulus，$\mathcal{R}'$ を opposite regulus という。
regulus net を定義するために $PG(3, q)$ と $V(4, q)$ を同一視して考える。従って上の条件 (iii) (iv) (v) は次のように言い換える

ことができる。

(iii)′ $\mathcal{R}$の異なる2直線は零ベクトルだけを共有する。

(iv)′ $\mathcal{R}'$の異なる2直線は零ベクトルだけを共有する。

(v) $\mathcal{R}$の直線と$\mathcal{R}'$の直線はq個のベクトルを共有する。

$(q^2, q+1)$-net $N_{\mathcal{R}}$を次のように定義する。

点集合 $\mathcal{P}$: $V(4, q)$のベクトル全体

直線集合 $\mathcal{L}$: $\mathcal{R}$の直線及びその translates 全体

(つまり $\mathcal{L} = \{l + v \mid l \in \mathcal{R},\ v \in V = V(4, q)\}$)

Incidence : 包含関係

$l \in \mathcal{R}$を含む平行類は$\{l + v \mid v \in V\}$となり$N_{\mathcal{R}}$が$(q^2, q+1)$-net であることが確かめられる。同様に$N_{\mathcal{R}'}$も定める。$N_{\mathcal{R}}$を regulus net という。$N_{\mathcal{R}}$は derivable で、$N_{\mathcal{R}'}$が$N_{\mathcal{R}}$の opposite net となることが上の(iii)′, (iv)′ (v)′より明らかである。($N_{\mathcal{R}}$は後半の例3の$\rho = 1$に同型。例3を参照)

derivable nets は上の regulus nets に限ることが、N.L. Johnson により示された。

定理(N.L. Johnson [5]) $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$を derivable net とすると、ある体$K$が存在して$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$は$K$上の3次元射影空間$\Sigma$の regulus から得られたものに同型である。さらに$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$の全自己同型群は$P\Gamma L(4, K)_W$ (global stabilizer) と同型である。(ここでWはΣのある射影直線とする。)

この定理は derivable net の位数は $n=p^{2m}$ (pは素数)の形であることを示している。また自己同型群として次の群と同型な群を含むことも分かる。

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \,\middle|\, \det A \det B = 1,\ \underset{\text{(modulo scalars)}}{A, B \in GL(2,q)},\ C \in M(2,q) \right\}$$

$$\left(\geq GL(2,q) \cdot E_{q^4} \rhd E_{q^4} \right)$$

$M(2,q)$は$K(=GF(q))$上の2×2行列全体

Regulus nets の群論的特徴付け.

derivable net と同じ parameters $\{n, r(=\sqrt{n}+1)\}$ をもつ net を考えると、上に述べた N.L. Johnson の定理により $n=p^{2m}$, $r=p^m+1$ の形をしていなければならないが、このような net は位数 $n(=p^{2m})$ を与えたとき非常に多く存在する。なぜなら位数 n のアフィン平面(これ自体がすでに非常に多く存在することが分かっている)を一つとり、その $n+1$ 個の平行類のうち、$\sqrt{n}+1$ 個を任意に選べば $(n, \sqrt{n}+1)$-net が得られるからである。従って特徴付けを得るには derivable net の他の性質を考える必要がある。N.L. Johnson の定理により、derivable net は regulus net であり、その自己同型群は $PSL(4,q)_W$ を含んでいた。N.L. Johnson は regulus net をこの性質に注目して特徴付けた。

定理 (N.L. Johnson [6]). Nを$(q^2, q+1)$-netとする。

このとき，Nが regulus net であるための必要十分条件は，$\mathrm{Aut}\,N \geq PSL(4,q)_W$ が成りたつことである。ここでWは $V(4,q)$ のある2次元部分空間である。

[6] においてすでに指摘されているように，$SL(2,q)$ を認容する $(q^2, q+1)$-net には，Hering により構成されたものが知られている。これは2変数 x,y の3次同次式上引きおこされる $SL(2,q)$ の4次の既約表現 $\mathfrak{N}_3$ と関係しているのであるが，これを含むように次のような条件を考える。

(☆) $N(=N(\mathcal{P},\mathcal{L}))$ は $(q^2, q+1)$-net で次の条件を満たす自己同型群 X を認容すると仮定する。($q=p^r$, p=素数)

(a) X は位数 q^4 の正規部分群 T をもつ。

(b) one point stabilizer X_0 $(0\in\mathcal{P})$ は $GL(2,q)$ に同型で $X_0 \cap T = 1$ である。

(a)において T はアーベル群とは限らないが，実際には次を証明できる。

補題　T は elementary abelian p-group である。

従って T を $GF(p)$ 上のベクトル空間とみることができて $X_0 \leq GL(4r,p)$ である。$G = X_0$ $(\cong GL(2,q))$，$H=G'$ $\cong SL(2,q)$ とおく。また，N の平行類を $\mathcal{C}_0, \cdots, \mathcal{C}_q$

とおけば、$X(=GT)$ は $\Omega=\{\mathscr{C}_0,\cdots,\mathscr{C}_q\}$ の置換を引きおこす。$H^{\Omega}=1$ の時は [6] によって N は regulus net となるので、$H^{\Omega}\neq 1$ としてよい。Dickson による $SL(2,q)$ の部分群に関する結果([10] 参照)より, (i) H^{Ω} が可移でなくて $q\in\{2,3,5,7,9,11\}$ 又は (ii) H^{Ω} が可移　のいずれかが起る。

(i) の場合について考える。$q=2$ では 次数 $=q+1=3$ となるので、明らかに regulus net だけである。また $q=7,9,11$ の時は起りえないことも示すことができる。しかし、$q\in\{3,5\}$ の時は regulus でない $(q^2,q+1)$-net が実際にただ一つずつ存在することが示される。この例を具体的に書くために記号を次のように定める。

$V=V(2m,K)$　　K : 体 とする。$V=V(m,K)\times V(m,K)$ とみる.

- $(x=0)\overset{\mathrm{def}}{=}\{(0,y)\mid y\in V(m,K)\}$ (0 は $V(m,K)$ の零ベクトル)
- $(y=xM)\overset{\mathrm{def}}{=}\{(x,y)\mid y=xM,\ x\in V(m,K)\}$ $(M\in M(m,K))$
- $\mathscr{L}_0=\{(x=0)\}\cup\{(y=xM)\mid M\in\mathscr{S}\}$ $(\mathscr{S}\subset GL(m,K)\cup O)$

　に対して　$\mathscr{L}=\{l+v\mid l\in\mathscr{L}_0,\ v\in V\}$, $\mathscr{P}=V$

　とおけば

$$N(\mathscr{P},\mathscr{L}) \text{ が net} \iff \det(M_1-M_2)\neq 0 \quad \forall M_1 \underset{(\neq)}{,} M_2\in\mathscr{S}$$

(上が成りたつ時 $N(\mathscr{P},\mathscr{L})$ は $(|K|^m,|\mathscr{S}|+1)$-net で, $\mathscr{L}_0$ は $\mathscr{L}$ の直線で零ベクトルを含むもの全体となっている。)

例1. $q=3$, $K=GF(3)$, $V=V(2,K)$, $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}\right\}$

点集合 $\mathcal{P} = V\times V$

直線集合 $\mathcal{L}=\{l+v \mid l\in\mathcal{L}_0,\ v\in V\times V\}$

ただし $\mathcal{L}_0=\{(x=0)\}\cup\{(y=xM)\mid M\in\mathcal{S}\}$

この時 $N(\mathcal{P},\mathcal{L})$ は $(9,4)$-net で regulus net と同型でなく次の群 G を認容する。 $(G\cong GL(2,3))$

$$G=\left\langle x,y,t \;\middle|\; x=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ t=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&2\\1&0&0&0\\0&2&0&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$x^3=y^3=1,\ (xy)^2=-1,\quad t^2=1,\ x^t=y,\ y^t=x$$

例2. $q=5$, $K=GF(5)$, $V=V(2,K)$

$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&4\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{L}_0=\{(x=0)\}\cup\{(y=xM)\mid M\in\mathcal{S}\}$

点集合 $\mathcal{P} = V\times V$

直線集合 $\mathcal{L}=\{l+v \mid l\in\mathcal{L}_0,\ v\in V\times V\}$

この時 $N(\mathcal{P},\mathcal{L})$ は $(25,6)$-net で regulus net と同型でなく、次の群 G を認容する。 $(G\cong GL(2,5))$

$$G=\left\langle d,t,e,f,s \;\middle|\; d=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{pmatrix},\ t=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\4&0&0&3\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix},\right.$$
$$\left. e=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&3&0&0\\0&0&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&3&0\end{pmatrix},\ s=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&2&3\\0&0&0&3\\0&0&3&2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\langle d,t\rangle\cong Q_8$, $\langle d,t,e\rangle\langle s\rangle\cong SL(2,5)$

記号: 以下では例1, 例2の net をそれぞれ $NR(3)$, $NR(5)$ と書く。

(ii)の場合については H^{Ω} が可移で、$HT \triangleright T$ より、$T^{\Omega}=1$ となるので、この net は $V(4r,p)$ 上に上の例1や例2のような方法（点集合を $V(4r,p)$ とみて，直線集合は $\mathcal{L}_0$ をもとにして構成する）で得られるものと同型になる。次数が $4r$ 以下の既約な $GF(p)SL(2,p^r)$-加群は分かっている (cf. [3]) ので $V(4r,p)$ の $GF(p)SL(2,p^r)$-加群としての既約成分で起りうるものが限られてくる。このことをもとにして (ii)の場合も net を完全に分類できる。

例3　$K=GF(q)$，$q=p^r$（pは素数）　$V=V(2,q)$

$$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{\rho} \end{pmatrix} \,\middle|\, k\in K\right\} \qquad \mathcal{L}_0=\{(x=0)\}\cup\{(y=xM)\mid M\in\mathcal{S}\}$$

（ρ は K の自己同型）　　　（$x,y\in V$）

点集合　$\mathcal{P}=V\times V$

直線集合　$\mathcal{L}=\{l+v \mid l\in\mathcal{L}_0,\ v\in V\times V\}$

この時 $N(\mathcal{P},\mathcal{L})$ は $\rho\neq 1$ ならば $(q^2,q+1)$-net で non-regulus かつ $GL(2,q)$ を認容する。この net を near regulus net と呼ぶことにする。（$\rho=1$ の時は regulus net になっている。）

例4　$K=GF(q)$，$q=p^r$（pは素数で　$p\geq 5$）

$V=V(2,K)$　　$U_\infty=\langle(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle\leq V\times V$

$U_k=\langle(k^3,k^2,k,1),(3k^2,2k,k,1)\rangle\leq V\times V$，　$k\in K$

$\mathcal{L}_0 = \{ U_k \mid k \in K \cup \{\infty\} \}$

点集合，直線集合を例3と同様に定めれば $(q^2, q+1)$-net を得てこれは non-regulus かつ $GL(2,q)$ を認容する。この net の completion の一つに Hering plane がある([7])。この net を Hering net と呼ぶことにする。

定理 (☆) をみたす net は次のいずれかである。

(i) regulus net, (ii) near regulus net, (iii) Hering net, (iv) $NR(3)$, (v) $NR(5)$.

Remark： (ii) の場合 $H(\cong SL(2,q))$ は N を定義しているベクトル空間上完全可約，(iii) の場合 H は 2変数 x, y の3次の同次式上に $SL(2,q)$ が引き起す表現と同じもの，(iv) は $SL(2,3)$ の $V(4,3)$ への完全可約でない表現で $Z(SL(2,3))$ が $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ として作用しているもの，(v) は $SL(2,5)$ の $V(4,5)$ への完全可約でない表現で $Z(SL(2,5))$ が $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ として作用しているものである。

文献

[1] Beth-Jungnickel-Lenz, Design Theory, Cambridge University Press, 1986

[2] R.H. Bruck, Finite nets II, Uniqueness and embedding,

Pacific J. Math. 13, 421–457 (1963)

[3] D. A. Foulser and N. L. Johnson, The translation planes of order q^2 that admit $SL(2,q)$ as a collineation group. I Eeven Order, J. Alg. 86, 385–406 (1984)

[4] Hirschfeld, Projective Geometries over finite fields, Oxford University Press, 1979.

[5] N. L. Johnson, Derivable nets and 3-dimensional projective spaces II - the structure, Arch. Math. 55, 94–104 (1990)

[6] ————, A group theoretic characterization of finite derivable nets, J. Geometry, 40, 95–104 (1991)

[7] H. Lüneburg, Translation Planes, Springer-Verlag, 1980

[8] T. G. Ostrom, Nets with critical deficiency, Pacific J. Math. 14, 1381–1387 (1964)

[9] O. Prohaska, Endliche ableitbare affine Ebenen, Geom. Dedicata, 1, 6–17 (1972)

[10] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer, 1967