数理解析研究所講究録
第 794 巻 1992 年 50-53


# Prime graph components of finite groups

筑波大学 飯寄信保
Nobuo Iiyori
筑波大学 八牧宏美
Hiroyoshi Yamaki

有限群 $G$ の prime graph $\Gamma(G)$ とは、

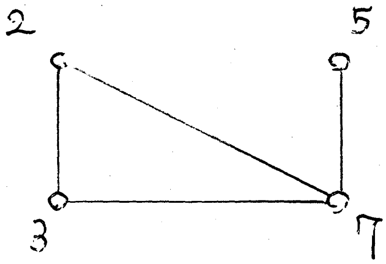
頂点集合 $V(\Gamma(G)) = \pi(G) = \{p \mid p = \text{prime},\ p \mid |G|\}$

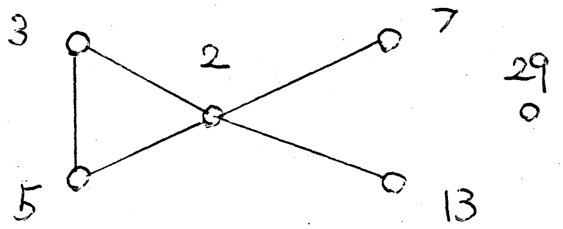
辺集合 $E(\Gamma(G))$, $pq \in E(\Gamma(G)) \Leftrightarrow$

$\exists g \in G$, order $g = pq$, $p \neq q$

で定義される graph のことである。$\nu(G)$ を $\Gamma(G)$ の連結成分の個数とする。

例 $G = Z_7 \times S_5$　　　$G = Ru$ Rudvalis 群




$\Gamma(Z_7 \times S_5)$　　　$\Gamma(Ru)$

$\nu(Z_7 \times S_5) = 1$　　　$\nu(Ru) = 2$

Prime graph は有限群論においていろいろと応用されてい

る。例えば Frobenius 予想 (i.e. 有限群Gとその位数を割る自然数eに対して群上の方程式 $x^e=1$ が丁度e個の解をもてば解集合は群となるであろうと云う予想) の検証にも有効に用いられている[I-Y, 1, 2, Y]。Thompson の予想[Sh]やいろいろな群の特徴づけ[B-Sh]にも応用されている。連結成分の個数 $\nu(G)$ に対してはいろいろな結果がある。$\pi_1$ は2を含む $\Gamma(G)$ の連結成分とする。

定理 1 (Gruenberg - Kegel)

$\nu(G)\geqq 2$ となる有限群Gは次の構造をもつ。

(1) Frobenius 群 又は 2-Frobenius 群.

(2) $G \rhd H \rhd K$ で $K$ は $\pi_1$ 群 $H/K$ は単純群

$G/H$ は $\pi_1$ 群

但し 2-Frobenius 群とは次の構造をもつ群Gのことである。

$1 \subset H \subset K \subset G$, $K$ は $H$ を核とする Frobenius 群

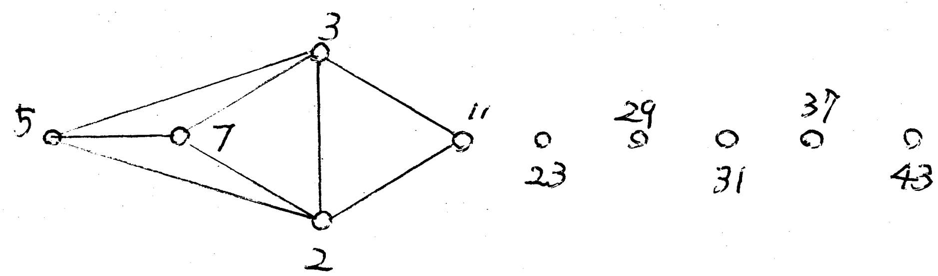
$G/H$ は $K/H$ を核とする Frobenius 群、なる部分群列をもつ。

定理1より $\nu(G)$ は単純群の分類に帰着される。従って[LW], [I-Y 3]の単純群Gについての $\nu(G)$ の分類を用いると、すべての有限群に対して成立する非常に一般的な結果が得られる。

定理 2

有限群Gに対して　$\nu(G) \leq 6$.

例　$G=J_4$；最大のJanko群




$\Gamma(J_4)$,　　$\nu(J_4)=6$.

注意 [W], [I-Y 3] では $\nu(G)$ばかりでなく $\pi(G)$の連結成分が完全に分類されている。

さて $\nu(G)\geq 2$ となる群は表現論など他の言葉で言い換えることができる。

定理 3 ([I], [W])

(1), (2), (3) は同値である。

(1) $\nu(G)\geq 2$

(2) Gは2-connected sharp character $\chi$ をもつ。すなわち $\chi(G^\#)=\{p, q\}$, $(\chi(1)-p, \chi(1)-q)=1$ かつ $|G|=(\chi(1)-p)(\chi(1)-q)$.

(3) Gは次の性質をもつHall部分群Hを含む。

(i) $C_G(x)\subseteq H$　, $x\in H^\#$,

(ii) $H\cap H^g = 1$ or $H$　, $g\in G$

References

[B-Sh] R. Brandl and W. Shi, Finite groups whose element orders are consecutive integers, J. Algebra 143 (1991), 388-400.

[I] N. Iiyori, Sharp characters and prime graphs of finite groups, To appear in J. Algebra.

[I-Y,1] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, Bull. Amer. Math. Soc. 25 (1991), 413-416.

[I-Y,2] ________, A conjecture of Frobenius and the simple groups of Lie type, III, J. Algebra 145 (1992), 329-332.

[I-Y,3] ________, Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic, To appear in J. Algebra.

[Sh] W. Shi and J. Bi, A characteristic property for each finite projective special linear group, Lecture Notes in Mathematics, 1456 (1990), 171-180, Springer.

[W] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups, J. Algebra 69 (1981), 487-513.

[Y] H. Yamaki, A conjecture of Frobenius and the simple groups of Lie type, I. Arch. Math. 42 (1984), 344-347, II. J. Algebra 96 (1985), 391-396.