数理解析研究所講究録
第 794 巻 1992 年 54-60

On the covering relation in the Bruhat order

田川 裕之 (Hiroyuki Tagawa)

東京大学 理学部

序

Coxeter 系 (W,S) の任意の元 x,w に対して定義される Kazhdan-Lusztig polynomial $P_{x,w}\in\mathbb{Z}[q]$ (cf. Def.9) は 表現論 や Schubert varieties の幾何等に重要な役割を持っている。1987 年、M. Dyer は任意の $w\in W$ に対して $P_{e,w}$ の q の係数が $c^-(w)-g(w)$ で与えられることを示した (ただしここで $c^-(w) := \sharp\{y\in W; w$ covers y in the Bruhat order$\}$, $g(w) := \sharp\{s\in S; s\leq_B w\}$ とおき、$\leq_B$ は Bruhat order を意味するものとする)。また W を finite Weyl group とした時、$x\leq_B y\leq_B z$ を満たす $x,y,z\in W$ に対して $P_{x,z}-P_{y,z}$ の係数はすべて非負であると言うことが知られている (cf.[I])。これらのことより、 finite Weyl group の Kazhdan-Lusztig polynomial の中で q の係数の最大値は $c^-(w)-g(w)$ の最大値と一致する事がわかる。

本講の目的は W が対称群 $\mathfrak{S}_n$ の時に $c^-(w)-g(w)$ の最大値が $[n^2/4]-n+1$ となることを示すことである。そのために、$\mathfrak{S}_n$の各元に対してある半順序集合 (以下 poset と呼ぶ) を定義し、それらの関係等について調べる。

まず、$x\in\mathfrak{S}_n$ に対して poset P_x を定義する。

Definition 1. 自然数 n に対して、$[n] := \{1,2,\cdots,n\}$ とおき、$x\in\mathfrak{S}_n$ に対して poset $(P_x,\leq_{P_x})$ を次で定義する。

$P_x=\{\tilde{i};i\in[n]\}$ as a set, $\tilde{i}\leq_{P_x}\tilde{j}\Leftrightarrow i\geq j$ かつ $x(i)\leq x(j)$.

Example 2. $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_5$ とすると、$(P_x,\leq_{P_x})$ に対する Hasse diagram は次の様になる。

```
   ~   ~
   1   3
  / \ / \
 ~   ~   ~
 2   4   5
```

Remark. (i). $n\leq 5$ の時、任意の n 元 poset P に対して、$P_x\simeq P$ となる $x\in\mathfrak{S}_n$ が存在する (ただし $P\simeq Q$ は P から Q への全単射 f で次を満たすものが存在することを意味する: $x\leq_P y\Leftrightarrow f(x)\leq_Q f(y)$)。

(ii). $n\geq 6$ の時、上記のことは一般に成立しない。例えば、 $P_x\simeq B_3$ (boolean) となる様な $x\in\mathfrak{S}_8$ は存在しない。

(iii). $x,y\in\mathfrak{S}_n$ に対して、$P_x=P_y$ ならば $x=y$ であることが容易にわかる。

さらに記号を導入する。

Definition 3. poset P の元 x,y に対して y が x を cover する時 (i.e. $x<_P z\leq_P y$ ならば $z=y$)、$x\lessdot_P y$ と表す。

$x\in\mathfrak{S}_n$ に対して、

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$c^-(x) := \sharp\{y \in \mathfrak{S}_n; y \lessdot_B x\}$,

$G(x) := \{s \in \mathfrak{S}_n; s \leq_B x$ and $\ell(s) = 1\}$,

$g(x) := \sharp G(x)$

とおく ($\leq_B$ は (strong) Bruhat order を表し ℓ は length function を意味する (cf.[Hu]))。

さらに poset P に対して、

$h(P) := \sharp\{(x,y) \in P^2; y \lessdot_P x\}$

(i.e. $h(P)$ は P の Hasse diagram における edge の数),

$comp(P) :=\max\{k; {}^{\exists}P_1, P_2, \cdots, P_k$ non empty subposet of P

such that $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_k\}$

(i.e. $comp(P)$ は P の Hasse diagram における連結成分の数)

とおく、ここで $P \cap Q = \emptyset$ である poset P, Q に対して $P+Q$ は次で定義される poset である。$P+Q := P \cup Q$ as a set, $x \leq_{P+Q} y \Leftrightarrow$ (i) $x, y \in P$ かつ $x \leq_P y$ or (ii) $x, y \in Q$ かつ $x \leq_Q y$.

$comp(P) = 1$ の時、P を connected (poset) と呼ぶ。

この時、次の関係が成り立っている。

Proposition 4. $x \in \mathfrak{S}_n$ に対して

(i) $c^-(x)=h(P_x)$,

(ii) $g(x)=n\text{-}comp(P_x)$

である。

Proof of Prop.4-(i).

$C(x) := \{(i,j); i < j, x(i,j) \lessdot_B x\}$,

$H(x) := \{(\tilde{i},\tilde{j}) \in {P_x}^2; \tilde{j} \lessdot_s \tilde{i}\}$

とおく。

$C(x)$ から $H(x)$ への関数 η を

$\eta(i,j) := (\tilde{i},\tilde{j})$

で定義する、ここで (i,j) は i と j を交換する長さ 2 の巡回置換を表す。

この時、Bruhat order と $\leq_{P_x}$ の定義より次が成り立つ。

$(i,j) \in C(x)$

$\Longleftrightarrow i < j, x(i,j) \lessdot_B x$

$\Longleftrightarrow i < j, x(i) > x(j), x(k) \geq x(i)$ or $x(j) \geq x(k)$ for ${}^{\forall}k \in [i,j](:= \{i, i+1, \cdots, j\})$

$\Longleftrightarrow \tilde{j} <_s \tilde{i}, x(k) \geq x(i)$ or $x(j) \geq x(k)$ for ${}^{\forall}k \in [i,j]$

$\Longleftrightarrow \tilde{j} \lessdot_s \tilde{i}$

$\Longleftrightarrow (\tilde{i},\tilde{j}) \in H(x)$.

故に、η は全単射である。

従って、$\sharp C(x) = c^-(x)$, $\sharp H(x) = h(x)$ であるので $c^-(x) = h(x)$ となり成立する。 ∎

Remark. 任意の $x \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\ell(x) = \sharp\{(\tilde{i}, \tilde{j}) \in P_x^2; \tilde{j} <_s \tilde{i}\}$ であることは容易にわかる。

Prop.4-(ii) を証明する前に、次の Lem.5 を示す。

Lemma 5. $x \in \mathfrak{S}_n$ とする。
(i) P_x が *connected* ならば $g(x) = n-1$ である。
(ii) $P_x = P_1 + P_2$, P_1*:connected poset,*
$P_1 = \{\tilde{1} = \tilde{i_1}, \tilde{i_2}, \cdots, \widetilde{i_m}\}$ $(1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ *as a set* ならば
$P_1 = \{\tilde{1}, \tilde{2}, \cdots, \tilde{m}\}$ *as a set,* $x([m]) = [m]$ である。
(iii) $P_x = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$, 各 $i \in [k]$ に対して P_i*:connected poset,* $1 \leq m_i := \sharp P_i$,
$P_i = \{\widetilde{p_{i,1}}, \widetilde{p_{i,2}}, \cdots, \widetilde{p_{i,m_i}}\}$ $(p_{i,1} < p_{i,2} < \cdots < p_{i,m_i})$ *as a set* であり、さらに $p_{1,1} < p_{2,1} < \cdots < p_{k,1}$ を満たすとき

$$P_i = \{m_0 + m_1 + \widetilde{\cdots} + m_{i-1} + 1, m_0 + m_1 + \widetilde{\cdots} + m_{i-1} + 2, \cdots,$$
$$m_0 + m_1 + \widetilde{\cdots} + m_{i-1} + m_i\} \text{ as a set}$$ となり、

各 $i \in [k]$ に対して

$$x([m_0 + m_1 + \cdots + m_{i-1} + 1, m_0 + m_1 + \cdots + m_{i-1} + m_i])$$
$$=[m_0 + m_1 + \cdots + m_{i-1} + 1, m_0 + m_1 + \cdots + m_{i-1} + m_i]$$

が成立している (ただし $m_0 := 0$ とおく)。

Proof. (i). $g(x) \neq n-1$ と仮定し矛盾を導く。
この時、$s_1, s_2, \cdots, s_{k-1} \in G(x)$, $s_k \notin G(x)$ となる $k \in [n-1]$ が存在する (ここで、各 $i \in [n-1]$ に対して $s_i = (i, i+1)$ とおく)。
ここで $\tilde{r}$ と $\tilde{m}$ が比較可能であるような, $r \in [k]$, $m \in [n] \setminus [k]$ が存在したとすると、(a):$\tilde{r} <_s \tilde{m}$ もしくは (b):$\tilde{m} <_s \tilde{r}$ である。
(a) の時、$<_s$ の定義より $m < r$ となり これは $r \in [k]$, $m \in [n] \setminus [k]$ に矛盾。
(b) の時、$<_s$ の定義より $r < m$ かつ $w(m) < w(r)$ である。他方 $r \leq k$, $k+1 \leq m$, $s_k \notin G(x)$ より $w(r) \leq k < k+1 \leq w(m)$ となるので矛盾。
従って、$\{\tilde{1}, \tilde{2}, \cdots, \tilde{k}\}$ の任意の元は $\{\widetilde{k+1}, \widetilde{k+2}, \cdots, \tilde{n}\}$ の全ての元と比較不可能である。
これは P_x が connected であることに反する。
故に、$g(x) = n-1$ が成立する。
(ii). まず、$P_1 = \{\tilde{1}, \tilde{2}, \cdots, \tilde{m}\}$ as a set を示す。
$i_p = p$ for ${}^\forall p \in [k-1]$ かつ $i_k > k$ となるような $k \in [m]$ が存在したと仮定する。
この時、$\tilde{k} \notin P_1$ であるので、P_1 の任意の元は $\tilde{k}$ と比較不可能であることがわかる。
従って、$i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} < k < i_k < \cdots < i_m$ より任意の $p \in [k-1]$ と任意の $r \in [m] \setminus [k-1]$ に対して、$x(i_p) < x(k) < x(i_r)$ が成り立つ。

このことは、$\{\widetilde{i_1},\widetilde{i_2},\cdots,\widetilde{i_{k-1}}\}$ の任意の元は $\{\widetilde{i_k},\widetilde{i_{k+1}},\cdots,\widetilde{i_m}\}$ の全ての元と比較不可能であることを意味し、これは P_1 が connected であることに矛盾する。

次に、$x([m])=[m]$ を示す。

任意の $p\in[k-1]$ に対して $x(p)\leq m$ であり、$x(k)>m$ となるような $k\in[m]$ が存在したと仮定する。

この時、次が成立している。

$$\sharp\{\tilde{j};\tilde{j}\leq_{P_x}\tilde{k}\}\geq m-k+2.$$

他方、任意の $p\in[k-1]$ に対して $x(p)\leq m<x(k)$ であるので、

$$\tilde{1},\tilde{2},\cdots,\widetilde{k-1}\not\in\{\tilde{j};\tilde{j}\leq_{P_x}\tilde{k}\}.$$

故に、$P_x=P_1+P_2$, P_1:connected であることと $\tilde{k}\in P_1$ より、

$$P_1\supset\{\tilde{1},\tilde{2},\cdots,\widetilde{k-1}\}\bigsqcup\{\tilde{j};\tilde{j}\leq_{P_x}\tilde{k}\}\ \text{(disjoint union)}.$$

従って、$\sharp P_1\geq m+1$ となり $\sharp P_1=m$ に反する。

(iii) は (ii) を繰り返し用いることにより容易に示せる。 ∎

Proof of Prop.4-(ii). $P_x=P_1+P_2+\cdots+P_k$ とする (ただし各 $i\in[k]$ に対して P_i:connected poset, $\sharp P_i=m_i\geq 1$, $P_i=\{\widetilde{p_{i,1}},\widetilde{p_{i,2}},\cdots,\widetilde{p_{i,m_i}}\}$ $(p_{i,1}<p_{i,2}<\cdots<p_{i,m_i})$ とし、$p_{1,1}<p_{2,1}<\cdots<p_{k,1}$ を満たしているものとする)。

この時、Lem.5-(iii) より各 $i\in[k]$ に対して次を満たすような $x_i\in\mathfrak{S}_{m_i}$ が存在する。

$x\simeq(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{m_k}$ as a group かつ $P_i\simeq P_{x_i}$ as a poset.

故に、Lem.5-(i) より、

$$\begin{aligned}g(x)&=g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_k)\\&=(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_k-1)\\&=m_1+m_2+\cdots+m_k-k\\&=n-comp(P_x)\end{aligned}$$

となる。 ∎

以下、これらの数について評価する。

まず次のことがグラフ理論において知られている (cf.[Ha])。

Theorem (Turán) 三角形を持たない n 点グラフのもちうる線の最大個数は $[n^2/4]$ である ([ ] はガウス記号を表す)。

従って、次の不等式の成立は自明。

Corollary 6. 任意の n 元 *poset* P に対して、$h(P)\leq[n^2/4]$ である。

よって次が成立する。

Theorem A. $\max\{c^-(x); x \in \mathfrak{S}_n\} = [n^2/4]$

Proof. Prop.4-(i) と Cor.6 より、次のことが容易にわかる。

$$\begin{aligned}\max\{c^-(x); x \in \mathfrak{S}_n\} &= \max\{h(P_x); x \in \mathfrak{S}_n\}\\ &\le \max\{h(P); P : poset, \sharp P = n\}\\ &\le [n^2/4].\end{aligned}$$

また、$m := [n/2]$ とおき、$z \in \mathfrak{S}_n$ を

$$(z(1), z(2), \cdots, z(n)) := (m+1, m+2, \cdots, n, 1, 2, \cdots, m)$$

で定義すると、$c^-(z) = [n^2/4]$ となるので Theorem A が成立する。 ▮

さらに、次が成り立っている。

Proposition 7. 任意の n 元 *poset* P に対して、$h(P) - (n - comp(P)) \le [n^2/4] - n + 1$ である。

この Prop. は次の Lem.8 より容易に導ける。

Lemma 8. n 元 *poset* $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$ (各 $i \in [k]$ に対して P_i は空でない *connected poset* であり、$k \ge 2$ とする) に対して、

$$P' := P_1 \oplus P_2 + \cdots + P_k$$

とおく、ここで $P \cap Q = \emptyset$ である *poset* P, Q に対して $P \oplus Q$ は次のように定義される *poset* である。$P \oplus Q := P \cup Q$ *as a set,* $x \le_{P \oplus Q} y \Leftrightarrow$ *(i)* $x, y \in P$ かつ $x \le_P y$ *or (ii)* $x, y \in Q$ かつ $x \le_Q y$ *or (iii)* $x \in P$ かつ $y \in Q$.

この時、$h(P) - (n - comp(P)) \le h(P') - (n - comp(P'))$ である。

Proof. $P_1, P_2 \ne \emptyset$ より、$h(P_1 + P_2) + 1 \le h(P_1 \oplus P_2)$ である。
故に、$h(P) + 1 \le h(P')$ となる。
従って、$n - comp(P) = n - comp(P') - 1$ より Lemma が成立する。 ▮

Proof of Prop.7. $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$ とおく (各 $i \in [k]$ に対して P_i は空でない connected poset とする)。
この時、Lem.8 と Theorem A より

$$\begin{aligned}h(P) - (n - comp(P)) &= h(P_1 + P_2 + \cdots + P_k) - (n - k)\\ &\le h(P_1 \oplus P_2 + \cdots + P_k) - (n - k + 1)\\ &\le h(P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 + \cdots + P_k) - (n - k + 2)\\ &\le h(P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k) - (n - 1)\\ &\le [n^2/4] - n + 1.\end{aligned}$$ ▮

故に次の等式が成り立つ。

Theorem B. $\max\{c^-(x)-g(x); x\in\mathfrak{S}_n\}=[n^2/4]-n+1.$

Proof. Prop.4 と Prop.7 より、次が成立する。

$$\begin{aligned}\max\{c^-(x)-g(x); x\in\mathfrak{S}_n\} &= \max\{h(P_x)-(n-comp(P_x)); x\in\mathfrak{S}_n\}\\ &\le \max\{h(P)-(n-comp(P)); P: poset, \sharp P=n\}\\ &\le [n^2/4]-n+1.\end{aligned}$$

また Theorem A の証明で定義した $z\in\mathfrak{S}_n$ に対して次が容易にわかる。

$$c^-(z)-g(z)=[n^2/4]-n+1.$$

よって、Theorem B の成立が示された。 ∎

Definition 9. (W,S) を Coxeter 系とする。
$x,w\in W$ に対して、$P_{x,w}\in\mathbb{Z}[q]$ を次のように定義する。

$P_{x,w}=0$ if $x\not\leq_B w$,

$P_{x,w}=1$ if $x=w$.

$\ell(sw)<\ell(w)$ を満たす $s\in S$ を一つとり固定し、

$$\begin{cases} c:=0 & \text{if} \quad x<_B sx \\ c:=1 & \text{if} \quad sx<_B x \end{cases} \quad とおく。$$

この時、$P_{x,w}$ を $\ell(x)$ と $\ell(w)-\ell(x)$ に関して帰納的に次のように定義する。

$$P_{x,w}=q^{1-c}P_{sx,sw}+q^cP_{x,sw}-\sum_{z\prec sw, sz<_B z}\mu(z,sw)q^{(\ell(w)-\ell(z))/2}P_{x,z}.$$

ただしここで $z\prec sw$ は $z<_B sw$ かつ $degP_{z,sw}=(\ell(sw)-\ell(z)-1)/2$ であることを意味し、この時に限り $P_{z,sw}$ の $q^{(\ell(sw)-\ell(z)-1)/2}$ の係数として $\mu(z,sw)$ が定義されているものとする。

この多項式 $P_{x,w}$ は Kazhdan-Lusztig polynomial と呼ばれる。

ついに、主要結果を得ることができる。

Theorem C. $x,w\in\mathfrak{S}_n$ に対して、$P_{x,w}=\sum_{i\geq 0}p_i(x,w)q^i$ とおく。この時、
$\max\{p_1(x,w); x,w\in\mathfrak{S}_n\}=[n^2/4]-n+1$ である

Proof. まず、次のことが知られている。
任意の $w\in\mathfrak{S}_n$ に対して $p_1(e,w)=c^-(w)-g(w)$ である ([D])。
$x\leq_B y\leq_B z$ を満たす $x,y,z\in\mathfrak{S}_n$ に対して $P_{x,z}-P_{y,z}$ は非負係数を持つ ([I])。
故に、Theorem B より

$$\begin{aligned}\max\{p_1(x,w); x,w\in\mathfrak{S}_n\} &\le \max\{p_1(e,w); w\in\mathfrak{S}_n\}\\ &= \max\{c^-(w)-g(w); w\in\mathfrak{S}_n\}\\ &= [n^2/4]-n+1\end{aligned}$$

である。

特に、Theorem A の proof で定義した z に対して $p_1(e,z) = [n^2/4] - n + 1$ となるので Theorem C が成立する。 ∎

最後に、Theorem A から Theorem C が導かれるとの貴重な助言を頂いた Prof. Matthew Dyer に感謝する。

参考文献

[Ha] F. Harary, "Graph Theory," Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Hu] J. E. Humphreys, "Reflection groups and Coxeter Groups," Cambridge Univ. Press, 1990.

[I] R. S. Irving, *The socle filtration of a Verma module*, Ann. Scient. E'c. Norm. Sup. **21** (47-65), 1988.

[KL] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representation of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (165-184), 1979.

[S] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics Vol. I," Wadsworth & Brooks /Cole Mathematics Series, 1986.