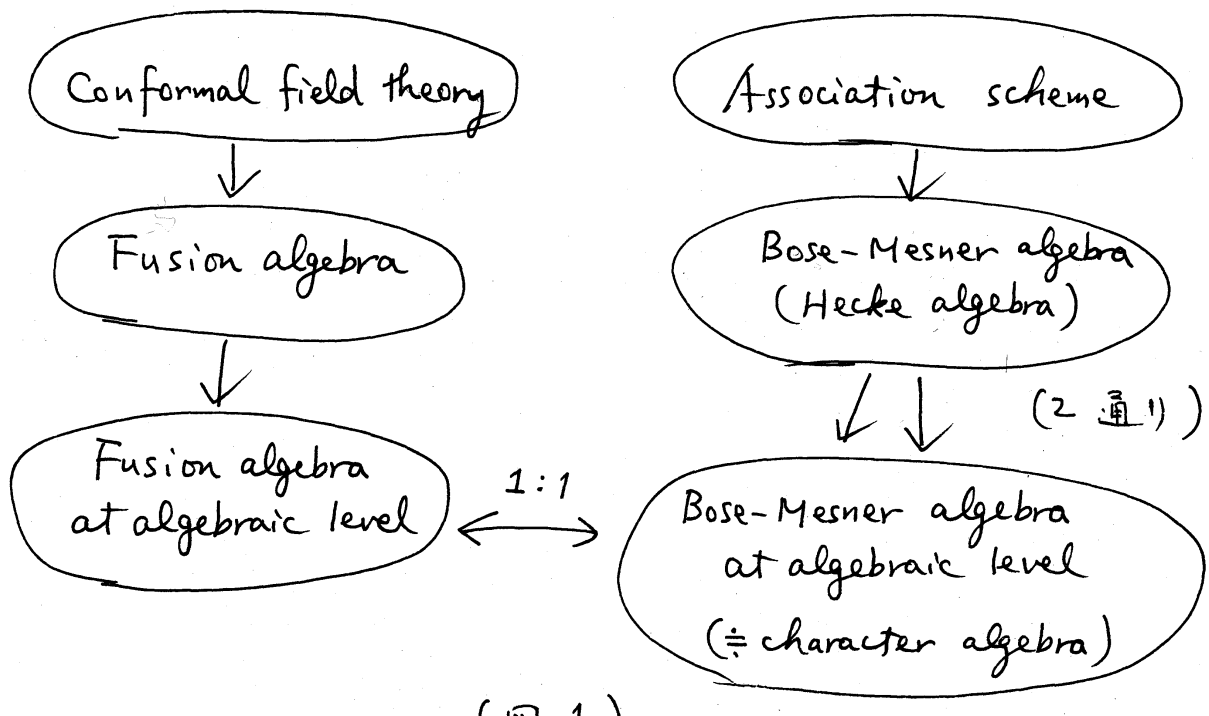
数理解析研究所講究録
第794巻 1992年 91-104

Association schemes and fusion algebras

九大・理 坂内英一 (Eiichi Bannai)

§1. 図1の解説.

先ず次の図1を見ていただこう。



(図 1)

Conformal field theory (物理数学における共形場理論) に対応して、fusion algebra (または Verlinde algebra) とよばれる可換結合的な(複素数体上の)有限次代数が存在する。Fusion algebra は Virasoro algebra, chiral algebra 等の表現と関係して出て来て、物理的実体にもとづいている。ここで物理的

実体の存在を忘れて、純代数的な概念として、fusion algebra at algebraic level というものを次のように定義する。この公理化が最善のものであるかは議論の余地はあるであろう。

<u>定義</u>（Fusion algebra at algebraic level）

不定元 $x_0, x_1, \cdots, x_d$ を basis とし乗法

$$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^{k} x_k$$

により定義される可換・結合的な $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ で次の条件 (i)〜(iv) をみたすものを fusion algebra at alg. level とよぶ。

(i) $N_{ij}^{k} \in \mathbb{R}$, $N_{ij}^{k} \geqq 0$,

(ii) $\exists$ bijection $\wedge : \{0, 1, \cdots, d\} \longrightarrow \{0, 1, \cdots, d\}$ satisfying

(a) $\hat{\hat{i}} = i$

(b) $N_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = N_{ij}^{k}$

(c) if we define $N_{ijk} = N_{ij}^{\hat{k}}$, then N_{ijk} is symmetric in i, j, k (for $\forall i, j, k$),

(iii) $N_{0j}^{k} = \delta_{jk}$ (i.e., $x_0 = \text{identity}$) for $\forall i, j$,

(iv) $\exists$ a linear rep. of $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ with $x_i \longmapsto \sqrt{k_i}$ with $k_i > 0$ for all i.

（注：物理における fusion algebra では (i)′ $N_{ij}^{k} \in \mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ が基本的である。(i) より強い (i)′ をみたすものを integral な

fusion algebra at alg. level とよぶことにする。)

例1. G = any finite group

$\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_d$ = all the irreducible characters of G

$\chi_i \otimes \chi_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^k \chi_k \quad (N_{ij}^k \in \mathbb{N})$ とする。

この時、$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^k x_k$ とおくと、$\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ は integral な fusion algebra at alg. level である。

(注: $\chi_{\hat{i}} = \overline{\chi_i}$ ($\overline{\ }$ は complex conjugate),

$N_{ijk} = N_{ij}^{\hat{k}} = (\chi_i \otimes \chi_j, \chi_{\hat{k}})$

$= (\chi_i \otimes \chi_j \otimes \chi_k, \chi_0)$ となり N_{ijk} は i, j, k に関して symmetric, $\sqrt{k_i} = \chi_i(1)$ となる。)

例2. 他の興味深い例としては Lusztig [7] (および [4] 参照) によるもので、任意の有限群 G に対して、G の共役類とその代表元の中心化群の既約指標の組を basis として (乗法をうまく定義して) integral な fusion algebra (at alg. level) が出来る。(特別な群 G に対してのこの fusion algebra の Fourier 変換が有限 Chevalley 群の既約指標の決定の最後の部分に本質的に使われている。)

Association scheme $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ はここでは常に可換なもののみを考える。([2] 参照。) A_i を関係 R_i に対する adjacency 行列とすれば

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} A_k$$

であり、$\mathfrak{A}=\langle A_0, A_1, \cdots, A_d\rangle$ を $\mathfrak{X}$ の Bose-Mesner algebra とよぶ。(Bose-Mesner algebra は association scheme とよばれる組合せ論的実体の存在のもとに存在するが、その組合せ論的実体を無視して純代数的な概念として見たものを次に述べる。

<u>定義.</u> (Bose-Mesner algebra at algebraic level)

不定元 $x_0, x_1, \cdots, x_d$ を basis とし、乗法

$$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} x_k$$

により定義される可換・結合的な $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathfrak{A}=\langle x_0, x_1, \cdots, x_d\rangle$ が次の条件 (i) ~ (iv) をみたす時、Bose-Mesner algebra at alg. level とよぶ。

(i) $p_{ij}^{k} \in \mathbb{R}$, $p_{ij}^{k} \geqq 0$,

(ii) $\exists$ bijection $\hat{\ }: \{0,1,\cdots,d\} \longrightarrow \{0,1,\cdots,d\}$ satisfying

(a) $\hat{\hat{i}} = i$,

(b) $p_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = p_{ij}^{k}$,

(iii) $p_{0j}^{k} = \delta_{jk}$ (i.e., $x_0 =$ identity)

(iv) $p_{ij}^{0} = \delta_{i\hat{j}}\, k_i$ with $k_i > 0$ (for $\forall i$) であり、

map $x_i \longmapsto k_i$ $(i=0,1,\cdots,d)$ は $\mathfrak{A}=\langle x_0,x_1,\cdots,x_d\rangle$ の一次の (i.e., linear な) 表現を与える。

(注: この概念は本質的に、Y. Kawada [5] (1942) (cf. [2, §2.5]) によって <u>character algebra</u> と呼ばれるものである。character algebra では $p_{ij}^k \in \mathbb{R}$ のみを仮定し、$p_{ij}^k \geq 0$ は仮定しない。従って、Bose-Mesner algebra at alg. level は character algebra with non-negative type とも言えるものである。)

<u>例 3.</u> association scheme から (Bose-Mesner algebra を通じて) 2通りの方法で Bose-Mesner algebra at alg. level が定義される。すなわち、$\mathfrak{A}=\langle A_0, A_1, \cdots, A_d\rangle$ を可換 assoc. scheme $\mathfrak{X}=(X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ の Bose-Mesner algebra とし、
$A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$, $E_0, E_1, \cdots, E_d$ を $\mathfrak{A}$ の primitive idempotents とし、

$$(|X| E_i)\circ(|X| E_j) = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k (|X| E_k)$$

($\circ$ は Hadamard 積) とすると、

(a) $x_i \cdot x_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k x_k$ は Bose-Mesner algebra (at algebraic level) である。

(b) $x_i \cdot x_j = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k x_k$ も Bose-Mesner algebra (at algebraic level) である。($m_i = \operatorname{rank} E_i$ が B-M alg. at alg. level の定義の k_i に対応する。)

以上で、初めに書いた図1に出て来る言葉の定義が全て終ったわけであるが、最後に fusion alg. at alg. level と Bose-Mesner alg. at alg. level の間に自然な 1:1 の対応が存在することを示す。

定理A. There exists a one to one correspondence between {fusion algebras at alg. level} and {Bose-Mesner algebras at alg. level}.

(証明) $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$, $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} x_k$ を B-M alg. at alg. level とする。この時、

$$N_{ij}^{k} = \sqrt{\frac{k_k}{k_i k_j}}\, p_{ij}^{k}$$

と定義し、(新らしい不定元 $x_0, x_1, \cdots, x_d$) に対して $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^{k} x_k$ と定義したものは fusion algebra at alg. level になる。

逆に、$p_{ij}^{k} = \sqrt{\frac{k_i k_j}{k_k}}\, N_{ij}^{k}$ とおくことにより、fusion alg. at alg. level から B-M alg at alg. level が出来る。

[もちろんこの対応により、integral という性質は保たれない。どの association scheme (又は B-M alg. at alg. level) から integral な fusion alg. が出来るかは、またどの fusion algebra に対して対応する association scheme が存在するかは、興味ある問題である。]

この対応の一つの具体例は次で与えられる。

例 4. $G=$ any finite group

$\mathfrak{X}(G)=$ group association scheme for G,

すなわち，$C_0=\{1\}, C_1, \cdots, C_d$ を G の共役類全体とし，$X=G$，

$(x,y)\in R_i \Longleftrightarrow yx^{-1}\in C_i$ と定義すると $\mathfrak{X}(G)$ は可換な

association scheme となる。(B-M algebra of $\mathfrak{X} \cong Z(\mathbb{C}G)$。)

この B-M alg. の E_i は χ_i (Gの既約指標) と対応する。

この時 $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^{k} x_k$ で定義される (例 3 の (b) の)

B-M alg. at alg. level と例 1 で述べた fusion alg. at

alg. level が定理Aの 1:1 対応により対応する。

§2. 行列 S の対称性と Verlinde の公式

物理に表われる fusion algebra に対しては，次のことが成り立つことが良く知られている。

$N_i \overset{\text{def}}{=} (N_{ij}^{k})_{\substack{0\le j\le d\\ 0\le k\le d}}$ とおく時，$\exists\, S=(S_i^j)$ satisfying

$$S^{-1}N_i S = \begin{pmatrix} \lambda_i^{(0)} & & & O \\ & \lambda_i^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_i^{(d)} \end{pmatrix}$$

with $\lambda_i^{(j)} = \dfrac{S_i^j}{S_0^j}$ (for $\forall i$)

(注：このような行列 S は任意の fusion alg. at alg. level に対しても存在することが容易に示される。)　また、

Verlinde の公式

$$\boxed{N_{ij}^{k} = \sum_{n=0}^{d} \frac{S_i^n S_j^n \overline{S_n^k}}{S_0^n}} \quad \text{(I)}$$

が成り立つことが Verlinde により示されている。

一方、可換な association scheme の B-M algebra に対しては次の式が成り立つことが良く知られている (cf. [2, Chap 2])。

$B_i = (p_{ij}^k)_{\substack{0 \le j \le d \\ 0 \le k \le d}}$ とおく時、$\exists P = (P_{ij})$ satisfying

$$P^{-1} B_i P = \begin{pmatrix} P_{0i} & & & 0 \\ & P_{1i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_{di} \end{pmatrix}. \quad (\text{for } {}^{\forall} i)$$

(注：このような行列 P は任意の B-M alg. at alg. level に対しても存在することが容易に示される。)　またこの時、

$$\boxed{p_{ij}^{k} = \frac{1}{|X| \cdot k_k} \cdot \sum_{\nu=0}^{d} P_{\nu i} P_{\nu j} \overline{P_{\nu k}}\, m_\nu} \quad \text{(II)}$$

が成り立つことが良く知られている (cf. [2], [5])。

定理Aの 1:1 対応により、fusion algebra at alg. level の行列 S と B-M alg. at alg level の行列 P とは関連している筈

である。事実、次が成り立つ。

<u>命題B.</u>

$$S=\frac{1}{\sqrt{|X|}}\begin{pmatrix}\sqrt{k_0} & & & 0\\ & \sqrt{k_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{k_d}\end{pmatrix} P \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k_0}} & & & 0\\ & \frac{1}{\sqrt{k_1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sqrt{k_d}}\end{pmatrix}$$

(ここで $|X|\overset{\mathrm{def}}{=}k_0+k_1+\cdots+k_d$).

定理Aの対応から(I)と(II)は対応するのではないかと初めは考えた。しかし、実際は、定理A(および命題B)の対応を用いて(II)から得られる式は

$$\boxed{N_{ij}^{k}=\sum_{n=0}^{d}\frac{S_i^n\,S_j^n\,\overline{S_k^n}}{S_0^n}\cdot\frac{m_n}{k_n}} \quad \text{——} \quad (\mathrm{I})'$$

であり、(I)と異なる。

更に次が成り立つ。

<u>定理C.</u> (1) $S=\text{unitary} \iff k_i=m_i$ (for $^\forall i$)

(2) $S={}^tS \iff P=\overline{Q}$ (Qの定義は[2]参照)

(注: $P=\overline{Q}$ をみたす assoc. scheme (又は B-M alg at alg level) を self-dual であるという。これは $p_{ij}^k=q_{ij}^k$ をみちびき、例3で出来た2つの B-M algs at alg. level が同じであることをいみする。)

(一般に $p_{ij}^k=q_{ij}^k$ が $P=\overline{Q}$ をみたすかは未解決である。)

従って、fusion alg. at alg. level の行列 S が何時 unitary, また(更にもっと強く)対称であるかは、association scheme (B-M

alg）の良く知られた概念で特徴づけられたわけである。一方 Verlinde は物理における fusion alg では（I）が成り立ち、従って S は常に unitary，更に常に symmetric になることを証明している。良く知られているように、self dual でない assoc. schemes はいくらでもある。このことは fusion alg. at alg level では公式（I）は一般に成り立たず、従って Verlinde の公式（I）の証明は物理的条件を用いた証明であることを示している。
［$S={}^tS$ ならばもちろん、公式（I）＝公式（I）′は成り立つ。この逆も成り立っていると思う。］

§3. Fusion algebras の新しい例を見い出そうとする試み

さて、我々は、定理 A の 1:1 対応を出発点として、association schemes を出発点として、B−M alg、B−M alg. at alg. level を経由して、新しい integral な fusion alg. at alg. level を作れないかということを考えた。事実色々の例が作れる。その中でも性質

(1) $S=$ unitary, and $S={}^tS$ （$S={}^tS \Longrightarrow S=$ unitary は成立つ）

をみたすものが特に見つけたいものである。（物理的には $S={}^tS$ が要請されていると思われるので。）また良い（物理における）fusion algebra が持つ modular invariance property と呼ばれる性質：$\exists T=$ diagonal 行列 s.t.

$$(ST)^3 = T^2 \quad (かつ\ S^4 = I)$$

を満たすものが見つかれば更に望ましい。

初めに、有限群Gに対する group association scheme $\mathfrak{X}(G)$ (例4) からそのようなものが見つからないかを考えた。G＝abel群の時はそのようなものが存在する(conformal field theory がその上に存在する)ことが知られているので、以下Gは非abelであることを仮定する。いくつかの実験で群Gの位数が小さい時 S＝unitary とならない (i.e., $\chi_i(1)^2 = m_i$ と $|C_i| = k_i$ が集合として一致するものが存在しない) ことが群論的に容易にわかり、$|G|=64$ が最初の候補者となった。位数64の群は Hall-Senior の1964年の表で完全に決定されており、表から $k_i = m_i\ (\forall i)$ をみたすのは #144－#153 と書かれている10個であることがわかった。更に $S = {}^tS$ か否かを調べるには、Gの指標表を計算し、更に共役類、既約指標をどのような順序に並べるかを考えなければならないが、この部分を当時大阪教育大にいた(現九大)宗政昭弘氏に頼んだ。事実、#144－#153 のいずれも integral なかつ $S = {}^tS$ となる fusion alg. at alg. level を与えることが、宗政氏により Cayley を用いることにより示された。(特に #153 は $Sz(8)$ のシロー2-群である。) これらの fusion algebra at alg. level

の上に conformal field theory が乗っているか否かはまだ未確定であるが、その際にそれが成り立っていることが望ましいと思われる modular invariance property はその10個のいずれに対しても成立し得ないことが坂内悦夫により計算で示された。($S={}^tS$ かつ modular invariance をともにみたす integral fusion algebra at alg. level はそれほど容易には見つからないようである。) この問題に関しては、宗政君になり、$S={}^tS$ をみたす integral fusion alg. at alg. level を与える assoc. schemes はいくつか構成されている。その大部分は modular invariance property をみたさないが、$(\mathbb{Z}_2)^6$ (更に大きい elementary abelian 2-group) の Schur ring として出来るもので modular invariance property をみたすものも存在する。(ただしそれらの例では $(ST)^3=S^2=T^2=I$)。この方向で物理が上に乗っているような fusion algebras at alg. level を association schemes から色々と作り出すことは、もっと追求に値すると思う。

最後に、integral な条件を除いて、fusion alg. at alg. level を考えると、$S={}^tS$ かつ modular invariance を持つものは色々存在する。Self-dual な assoc. scheme で一番典型的なものは Hamming scheme $H(d,q)$ であるが、これから出来る(必ずしも integral でない) fusion algebra at alg. level は $S={}^tS$

をみたし、かつ modular invariance もみたす。この部分は坂内悦子との共同研究であり、この報告集の彼女による記事を参照されたい。一般に self-dual な P- and Q-polynomial (symmetric) association schemes でもこのことが成り立つのではないかと期待しているが、今の所極く特別な場合しか証明出来ていない。

[なお、有限群 G に対する $\mathfrak{X}(G)$ において、対応する fusion algebra at alg. level が何時 integral になるか、何時 S が unitary になるか、何時 $S={}^tS$ が成り立つか、またそれらが成り立つ時、何時 modular invariance が成り立つかを考えることは、有限群の内部の問題としても(それ程易しい問題ではないが攻略が全く不可能でもないと思うので)興味深いのではないかと思う。

参考文献

1. E. Bannai and E. Bannai: Modular invariance of the character table of Hamming association scheme $H(d,q)$, preprint. (この報告集の中の坂内悦子の記事も参照)
2. E. Bannai and T. Ito: Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings, 1984.

3. R. Dijkgraaf and E. Verlinde: Modular invariance and the fusion algebra, Nucl. Phys. B. (Proc. suppl.) 5 (1988), 87-97.

4. R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde and H. Verlinde: The operator algebra of orbifold models, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 485-526.

5. Y. Kawada: Über den dualitätssatz der Charaktere nicht-commutativer Gruppen, Proc. Phys-Math. Soc. Japan (3) 24 (1942), 97-109.

6. T. Kohno: Fusion algebras and mapping class groups, 数理研講究録 768 代数的組合せ論 pp 60-66, 1991.

7. G. Lusztig: Leading coefficients of character values of Hecke algebras, Proc. Symp. Pure Math. 47 (1987), 253-262.

8. G. Moore and N. Seiberg: Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 177-254.

9. E. Verlinde: Fusion rules and modular transformations in 2 dimensional conformal field theories, Nucl. Phys. B. (FS 22), 300 (1988), 360-376.

(以上)