数理解析研究所講究録
第 794 巻 1992 年 105-116

Character sheaves and almost characters of finite Chevalley groups

東京理科大 理工　庄司俊明 (Toshiaki SHOJI)

1. 序

有限体 $\boldsymbol{F}_q$ 上定義された reductive な連結代数群を G、対応する Frobenius 写像を $F: G \to G$ とする。G の F- 固定点全体のなす有限群 G^F の（$\boldsymbol{C}$- 表現の）既約指標を決定する問題は、既に１９５５年に J. A. Green が $GL_n(\boldsymbol{F}_q)$ の場合を解決していたが、一般の群に対しては１９８０年代に G. Lusztig により全ての G^F の既約指標の分類とその次数の決定がなされた。しかし G^F の指標値の完全な決定、すなわち指標表の決定は $GL_n(\boldsymbol{F}_q)$ と、いくつかの rank の小さな群の場合を除いて、一般にはまだ未解決である。

既約指標の分類を完成した後、Lusztig はこの問題への一般的なアプローチとして、つまり指標表決定への統一的なアルゴリズムを与えるものとして、character sheaf の理論 ([6]) を構築した。Character sheaves は G に付随したある種の simple perverse sheaf の集合であり、Frobenius 写像 F の作用を持つ。F- 不変な character sheaf A から自然な方法で（A の特性関数として）G^F の類関数 χ_A が得られる。[6] での主要な結果は、この様にして得られた χ_A 達が G^F の類関数の空間 $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底をなし、更にこれらの χ_A の値を決定するための一般的なアルゴリズムが存在するというものである。一方それとは別に G^F の既約指標の分類の過程で、Lusztig は Deligne-Lusztig の virtual な G^F- 加群 $R_T^G(\theta)$ と密接な関係を持つ $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底（G^F の almost character と呼ばれる）を構成している（[4]）。Almost character は G^F の既約指標の分類 (parametrization) を用いて、既約指標の線形結合として形式的に定義され、その定義の仕方から、G^F の既約指標と almost character 達の間の変換行列は具体的な形で与えられる。従って G^F の指標表の決定は、G^F の almost character 達の決定と同値である。所で Lusztig はこの almost character 達と、上に述べた character sheaf の特性関数達がスカラー倍を除いて一致することを予想として述べている。この予想が証明されたとしても、まだスカラーを決定する問題が依然として残るのだがそれさえうまく処理できれば、前に述べた事と合わせて、G^F の既約指標を計算するための一般的なアルゴリズムが得られることになる。本稿では、いくつかの群について Lusztig

の予想が成立する事を報告したい。特に $G^F = SO_{2n+1}(\boldsymbol{F}_q)$, q: 奇数の場合には予想が成立し、又、スカラーの部分も決定できる。従ってこの場合、G^F の指標表が求められることになる。

以下では順次 G^F の almost character と character sheaf について説明し Lusztig の予想を定式化した後、主要結果について述べる。以後 $\boldsymbol{F}_q$ の標数 p と異なる素数 l を固定し表現は全て $\bar{\boldsymbol{Q}}_l$ （l- 進数体 $\boldsymbol{Q}_l$ の代数的閉包、$\boldsymbol{C}$ と同型）上で考えることにする。

2. Almost characters

T を G の F-stable な maximal torus、$\theta \in \hat{T}^F = \mathrm{Hom}(T^F, \bar{\boldsymbol{Q}}_l^*)$ を T^F の linear character とする。(T, θ) の組に対し、Deligne-Lusztig の virtual G^F- 加群 $R_T^G(\theta)$ が l- 進 cohomology 群を用いて構成される。$R_T^G(\theta)$ の重要な性質の一つにその直交関係がある。一方 G^F の unipotent 元 u に対し、

$$Q_T^G(u) = \mathrm{Tr}(u, R_T^G(\theta))$$

とおいて得られる G^F- 不変な関数 $Q_T^G : G_{\mathrm{uni}}^F \to \bar{\boldsymbol{Q}}_l$ （G_{uni}^F は G^F の unipotent 元の集合）を G^F の Green 関数という。Green 関数 Q_T^G は θ の取り方によらない。$R_T^G(\theta)$ の指標の値は次の指標公式により、G よりも rank の小さいいくつかの reductive 群の Green 関数により表される。$g = su = us$ を $g \in G^F$ の Jordan 分解（s: 半単純、u: unipotent）とすると、

$$\mathrm{Tr}(su, R_T^G(\theta)) = |Z_G^0(s)^F|^{-1} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T^F}} Q_{xTx^{-1}}^{Z_G^0(s)}(u)\theta(x^{-1}sx) \quad . \tag{2.1}$$

p 及び q が共に十分大きい時、Green 関数を計算するアルゴリズムが存在する。実際、例外群に対しては Green 関数が具体的に計算されている。（注 §3 参照。）

次に G^F の almost character を定義するために G^F の既約指標の parametrization について復習しておく。G^* を G の $\boldsymbol{F}_q$ 上定義された dual group とする。T^* を T の F-stable な dual torus で、$T^* \subset G^*$ なるものとすると、同型 $\hat{T}^F \simeq (T^*)^F$ により $\theta \in \hat{T}^F$ に対応して $(T^*)^F$ の（従って $(G^*)^F$）の元 s が定まる。G^* の F-stable な semisimple class $\{s\}$ に対し、$\mathcal{E}(G^F, \{s\})$ を $R_{T_1}^G(\theta_1)$ 達の分解に表れる G^F の既約指標の集合とする。但し (T_1, θ_1) は θ_1 に対応する $s_1 \in (T_1^*)^F$ が class $\{s\}$ に含まれる様な全ての組を動くものとする。$\hat{G}^F$ を G^F の既約指標全体の

集合とすると、$\hat{G}^F$ は

$$\hat{G}^F = \coprod_{\{s\}} \mathcal{E}(G^F, \{s\}) \qquad \text{(disjoint union)} \tag{2.2}$$

と分解する。但し $\{s\}$ は G^* の全ての F-stable な semisimple class を動く。特に $s = 1$ の場合、$\mathcal{E}(G^F, \{1\})$ の元を unipotent character と言う。

$\mathcal{E}(G^F, \{s\})$ の parametrization は Lusztig [4] によりよく分かっている。今簡単のため G を中心が連結、$\boldsymbol{F}_q$ 上 split な群（つまり、G^F は有限 Chevalley 群）とし、G^F の unipotent character について考える。$\mathcal{E}(G^F, \{1\})$ は、G の Weyl 群 W により定まるある集合 $X(W)$ を parameter set として持つ。$X(W)$ は family と呼ばれるいくつかの部分集合に分解され、各 family $\mathcal{F}$ はある有限群 Γ により次の様に定義される。

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Gamma = \{(y, \sigma) | y \in \Gamma, \sigma \in Z_\Gamma(y)^\wedge\}/\text{conjugate}.$$

G の中心が連結の場合 Γ としては、対称群 S_3、S_4、S_5 と $(\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^m$ の形の群のみが表れる。いま pairing $\{,\} : X(W) \times X(W) \to \bar{\boldsymbol{Q}}_l$ を $(y, \sigma) \in \mathcal{F}, (z, \tau) \in \mathcal{F}'$ に対し、$\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ の時

$$\{(y, \sigma), (z, \tau)\} = \sum_{\substack{g \in \Gamma \\ ygzg^{-1} = gzg^{-1}y}} |Z_\Gamma(y)|^{-1} |Z_\Gamma(z)|^{-1} \mathrm{Tr}(g^{-1}y^{-1}g, \tau) \mathrm{Tr}(gzg^{-1}, \sigma) \tag{2.3}$$

で定め、又 $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$ の時は、$\{(y, \sigma), (z, \tau)\} = 0$ として定義する。定義より行列 $\{x, x'\}$、$(x, x' \in X(W))$ はユニタリーかつエルミートになることが分かる。

$x \in X(W)$ に対応する G^F の unipotent character を ρ_x と表すことにする。さて $x \in X(W)$ に対し G^F の 類関数 R_x を

$$R_x = \sum_{x' \in X(W)} \{x, x'\} \rho_x \tag{2.4}$$

により定義する。（注 E_8 の場合は、少し符合の修正を要する。）pairing $\{,\}$ のユニタリー性より、R_x 達は $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底になる。R_x 達は次の様な意味で $R_T^G(\theta)$ と密接に関係している。前述の parametrization で $W^\wedge \hookrightarrow X(W)$ となる自然な埋め込みがある。$E \in W^\wedge$ に対し、対応する $X(W)$ の元を x_E と表すと R_{x_E} は $\theta = 1$ とおいて

$$R_{x_E} = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \mathrm{Tr}(w, E) R_{T_w}^G(1) \tag{2.5}$$

と表される。但し T_w は maximal F-split torus T_0 より w で twist して得られる G の F-stable な maximal torus である。$R^G_{T_w}(1)$ を全ての $w \in W$ で考える事と、R_{x_E} を全ての $E \in W^\wedge$ で考える事は同値だから、(2.4) と (2.5) を合わせて $R^G_{T_w}(1)$ の既約指標への分解が得られるわけである。上の定義は一般の $\mathcal{E}(G^F, \{s\})$ の場合にも然るべく拡張され、得られた R_x 達を $\mathcal{E}(G^F, \{s\})$ に属する G^F の almost character と言う。G^F の almost character 達は 全体として $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底をなす。

所で対応 $\theta \mapsto R^G_T(\theta)$ を線形に拡張して $R^G_T : C(T^F/\sim) \to C(G^F/\sim)$ を得るが、より一般に（必ずしも F-stable ではない）G の parabolic 部分群 P の F-stable な Levi 部分群 L に対して $R^G_L : C(L^F/\sim) \to C(G^F/\sim)$ が定義される。この R^G_L を twisted induction と言う。twisted induction R^G_L により L^F の一般指標は G^F の 一般指標に移される。P が F-stable な場合には、R^G_L は普通の Harish-Chandra induction に一致してしまう。twisted induction R^G_L の既約指標への分解は一般にはまだ分かっていないが、G の中心が連結の場合には浅井 [1]、著者 [12]、[13] により記述されている。例えば簡単な場合は次の様になる。今 G^F の almost character R_x が cuspidal とは G と異なる全ての Levi 部分群 L に対して、R_x が R^G_L の像と直交する事を言う。さて L_0 を G の F-stable な parabolic 部分群 P の F-stable Levi 部分群とし、L_w を $w \in N_G(L_0)/L_0$ で twist して得られる F-stable な Levi 部分群とする。更に F は $N_G(L_0)/L_0$ に自明に作用するとしておく。R_0 を L_0^F の $\mathcal{E}(L_0^F, \{1\})$ に属する cuspidal almost character とする。この時 L_w^F の cuspidal almost character $R_{0,w}$ が R_0 により一意的に定まり、

$$R^G_{L_w}(R_{0,w}) = \sum_{E \in (N_G(L_0)/L_0)^\wedge} \mathrm{Tr}(w, E) R_E \tag{2.6}$$

と表される。但し R_E は埋め込み $(N_G(L_0)/L_0)^\wedge \hookrightarrow X(W)$ によって定まる G^F の almost character である。一般の場合は上の式を少し変形した形で得られる。

3. Character sheaves

Character sheaf は G^F の表現論をできるだけ $\boldsymbol{F}_q$-structure に無関係に、しかも $\boldsymbol{C}$ 上の代数群に対しても意味を持つ様に構成するための幾何学的理論として Lusztig [6] により導入され、詳しく調べられた。character sheaf の理論により G^F の指標理論は全ての $\boldsymbol{F}_q$ に対して統一的に（q の“多項式”として）展開できる。以下に、character sheaf の主要な性質を述

べておく。$\mathcal{D}G$ を G の l- 進層のなす導来圏とする。$\mathcal{D}G$ の対象 K は l- 進層のなす複体で、その i 番目の cohomology sheaf を $\mathcal{H}^iK$、$x \in G$ での stalk を $\mathcal{H}^i_xK$ と表す。$\mathcal{M}G$ を G の perverse sheaf のなす $\mathcal{D}G$ の full subcategory とする。$\mathcal{M}G$ は Noether 的 かつ Artin 的なアーベル圏であり、又 $\mathcal{M}G$ には（G の共役の作用に関して）G- 同変な perverse sheaf の概念も定義される。character sheaf は G のある種の G- 同変な simple perverse sheaf の集合として次の様に定義される。T を G の maximal torus、$B = UT$ を T を含む G の Borel 部分群（U は B の unipotent radical）とする。$w \in W$ の代表元 $\dot{w} \in N_G(T)$ を一つ固定して次の図式を考える。

$$T \xleftarrow{\alpha} \{(g, xB) \in G \times G/B \,|\, x^{-1}gx \in B\dot{w}B\} \xrightarrow{\pi} G$$

ここで、α は (g, xB) に対し $x^{-1}gx \in B\dot{w}B = U\dot{w}TU$ の T-part を取る写像、π は第一成分への射影である。

さて $\mathcal{S}(T)$ を T の tame local system $\mathcal{L}$（即ち、ある $n; (n,p) = 1$ に対して $\mathcal{L}^{\otimes n} \simeq \bar{\boldsymbol{Q}}_l$ (constant sheaf) となる階数 1 の local system）全体の集合とする。$w^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$（$w^*\mathcal{L}$ は $w: T \to T$ による $\mathcal{L}$ の逆像）となる $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$ に対し $K_{\dot{w}} = \pi_! \alpha^* \mathcal{L} \in \mathcal{D}G$ を考える。$K_{\dot{w}}$ 自身は G の perverse sheaf ではないので、$K_{\dot{w}}$ の i–th perverse cohomology ${}^pH^i(K_{\dot{w}}) \in \mathcal{M}G$ を取り i、$\dot{w}$ を動かした時 ${}^pH^i(K_{\dot{w}})$ に含まれる simple perverse sheaf の集合を $\hat{G}_{\mathcal{L}}$ とする。$\hat{G} = \bigcup \hat{G}_{\mathcal{L}}$ $(\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T))$ とおき、$\hat{G}$ の元を character sheaf と呼ぶ。$\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ が W の作用で同じ軌道に属さなければ $\hat{G}_{\mathcal{L}}$ と $\hat{G}_{\mathcal{L}'}$ は disjoint である。

次に G に $\boldsymbol{F}_q$–structure を入れて考える。$F: G \to G$ による K の逆像 F^*K が K と同型になる時 $K \in \mathcal{D}G$ は F-stable であると言う。F-stable な $K \in \mathcal{D}G$ に対し、同型写像 $\varphi: F^*K \simeq K$ を一つ固定する。φ は cohomology sheaf 上に同型 $F^*\mathcal{H}^iK \simeq \mathcal{H}^iK$ を導き、従って各点 $x \in G^F$ の stalk 上に線形写像 $\varphi_x : \mathcal{H}^i_xK \simeq \mathcal{H}^i_xK$ を誘導する。K の特性関数 $\chi_{K,\varphi}: G^F \to \bar{\boldsymbol{Q}}_l$ を

$$\chi_{K,\varphi}(x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\varphi_x, \mathcal{H}^i_xK)$$

により定義する。K が G- 同変な perverse sheaf の時は $\chi_{K,\varphi}$ は G^F の類関数になる。

$$\hat{G}_F = \{A \in \hat{G} | F^*A \simeq A\}$$

を G の F-stable な character sheaf とする。Lusztig の結果を述べるために次の定義を用意する。素数 p が reductive 群 G に対して almost good とは G の各単純成分 H について H

が古典群ならば p は任意、H が例外群ならば p は H に対して good となることを言う。

さて character sheaf に関する基本的な結果は次の Lusztig の定理（[6]）である。

定理 3.1 (Lusztig). p は G に関して *almost good* と仮定する。この時

(i) *Character sheaf* $\hat{G}$ は完全に分類される。

(ii) $A \in \hat{G}_F$ に対し $\varphi_A : F^*A \simeq A$ を適当に定めると $\{\chi_{A,\varphi_A} | A \in \hat{G}_F\}$ は $C(G^F/\sim)$ の正規直交基底となる。（注 A は $\mathcal{M}G$ の *simple object* なので φ_A はスカラー倍を除いて一意的に定まる。）

(iii) 各 χ_{A,φ_A} は計算可能である。

G^F の almost character との比較でもう少し character sheaf の性質について述べる。character sheaf $\hat{G}$ には cuspidal な既約指標の類似物として cuspidal character sheaf の概念が定義でき、又以下の様に Harish-Chandra induction の類似物として G の parabolic 部分群 P とその Levi 部分群 L に対し induction ind_P^G が定義される。次の図式を考える。

$$L \xleftarrow{\alpha} V_1 \xrightarrow{\beta} V_2 \xrightarrow{\pi} G\,.$$

ここに

$$V_1 = \{(g,x) \in G \times G \mid x^{-1}gx \in P\},$$
$$V_2 = \{(g,xP) \in G \times G/P \mid x^{-1}gx \in P\},$$

α は $(g,x) \mapsto x^{-1}gx \in P$ の L への射影、β は $(g,x) \mapsto (g,xP)$、π は第一成分への射影である。

今、L の L- 同変な perverse sheaf K_0 に対し $\alpha^*K_0 \simeq \beta^*K_1$ (up to shift) となる $K_1 \in \mathcal{M}V_2$ が一意的に取れる。$K = \pi_!K_1$ とおくと $K \in \mathcal{M}G$ となる。$K = \mathrm{ind}_P^G K_0$ を K_0 より誘導された複体と言う。ind_P^G により functor $(\mathcal{M}L)_L \to \mathcal{D}G$ が定義されるが $((\mathcal{M}L)_L$ は L の L- 同変な perverse sheaf の圏を表す）$A \in \hat{L}$ ならば $\mathrm{ind}_P^G A$ は G の semisimple な perverse sheaf となり、その単純成分は全て $\hat{G}$ に含まれる事が分かる。又 $A \in \hat{L}$ が cuspidal の場合は、$K = \mathrm{ind}_P^G A$ の endomorphism algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{M}G}K$ は $N_G(L)/L$ の適当な部分群 $\mathcal{W}$ の twisted な群環 $\bar{\boldsymbol{Q}}_l[\mathcal{W}]_t$ と同型になる。G の中心が連結な場合には twisting は消えて $\mathrm{End}_{\mathcal{M}G}K \simeq \bar{\boldsymbol{Q}}_l[\mathcal{W}]$ となる事も分かる。次に $\boldsymbol{F}_q$-structure を考える。L を F-stable な Levi

部分群、$A \in \hat{L}_F$ とし、$\varphi_A : F^*A \simeq A$ を固定すると $K = \mathrm{ind}_P^G A$ は F-stable になり $\varphi : F^*K \simeq K$ が誘導される。従って $\chi_{A,\varphi_A} \mapsto \chi_{K,\varphi}$ により、写像 $C(L^F/\sim) \to C(G^F/\sim)$ が定まる。前述の induction の定義からこれを導くためには P も F-stable でないと困るのだが、実は $A \in \hat{L}$ が cuspidal の場合は P が F-stable でなくても良い事が分かっている。特に $L = T$、$\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ (F-stable な tame local system) の場合には標準的な $\varphi_0 : F^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ として単位元 e での stalk $\mathcal{L}_e$ 上で φ_0 が恒等写像になるものが取れる。$\mathcal{L}$ を shift して得られる $\mathcal{L}[\dim T] \in \mathcal{D}T$ は、T の (cuspidal な) character sheaf であり、induction により $K_{\mathcal{L},T} = \mathrm{ind}_B^G(\mathcal{L}[\dim T])$ が定義できる。(B は T を含む必ずしも F-stable ではない Borel 部分群。) $\varphi_0 : F^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ より G^F の類関数 $\chi_{K_{\mathcal{L},T}}$ が導かれる。(φ も標準的に決まるので省略して表す。) $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ は対応 $\mathcal{L} \mapsto \chi_{\varphi_0,\mathcal{L}}$ により $\hat{T}^F$ と同一視でき、従って $\chi_{K_{\mathcal{L},T}}$ は §2 の $R_T^G(\theta)$ に対応するべきものである。

今 G^F の unipotent 元 u に対し

$$\tilde{Q}_T^G(u) = \chi_{K_{\mathcal{L},T}}(u)$$

とおき G^F-不変な関数 $\tilde{Q}_T^G : G_{\mathrm{uni}}^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ を定義する。$\tilde{Q}_T^G$ を character sheaf に付随した Green 関数と言う。実際 $\chi_{K_{\mathcal{L},T}}$ は $\tilde{Q}_T^G$ に関して (2.1) と同様の指標公式を持つ。一方この Green 関数 $\tilde{Q}_T^G$ は Weyl 群の既約指標と unipotent な共役類の間の密接な関係を記述する Springer 対応を利用する事により計算できる。([6]、[11]、[15]。) §2 で Green 関数 Q_T^G が p、q が十分大きい時計算可能と言ったのは、その場合 Kazhdan と Springer の結果により Q_T^G と $\tilde{Q}_T^G$ が (スカラー倍を除いて、§4 参照) 一致するという事情による。

$\tilde{Q}_T^G$ が分かれば指標公式により $\chi_{K_{\mathcal{L},T}}$ は計算できる。これにより $\mathrm{ind}_B^G(\mathcal{L}[\dim T])$ に含まれる $A \in \hat{G}_F$ の特性関数 χ_{A,φ_A} が計算できる。より一般に L の cuspidal character sheaf $A_0 \in \hat{L}_F$ に対し $K = \mathrm{ind}_P^G A_0$ の特性関数 $\chi_{K,\varphi}$ は generalized Green 関数を使って (2.1) を一般化した形で表す事ができる。 generalized Green 関数も計算可能であり ([6]) 、従って K に含まれる全ての $A \in \hat{G}_F$ の特性関数も計算できる事になる。($A \in \hat{G}_F$ が cuspidal の場合に帰着し、この場合は簡単に分かる。)

4. 主要結果

以下では G の中心が連結と仮定する。この場合に Lusztig の予想を次の様に定式化する。前に述べた様に $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ に対し $\chi_{\varphi_0,\mathcal{L}} \in \hat{T}^F$ は G^* の F-stable semisimple class $\{s\}$ を定

め、この対応で $\mathcal{S}(T)^F$ の W-orbit は G^* の F-stable semisimple class と 1 対 1 に対応する。又 $\hat{G}_{\mathcal{L}}$ は F の作用で保たれる。$(\hat{G}_{\mathcal{L}})_F$ に含まれる F-stable な character sheaf を $(\hat{G}_{\mathcal{L}})_F$ と表し $\mathcal{E}(G^F,\{s\})$ に属する almost character の parameter set を $X(G,\{s\})$ と表す。この時

予想 (Lusztig) $s \in G^{*F}$ と $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ が上の意味で対応しているとする。この時自然な対応 $X(G,\{s\}) \simeq (\hat{G}_{\mathcal{L}})_F$ が存在し

$$\chi_{A_x,\varphi_x} = \xi_x R_x \qquad (x \in X(G,\{s\})) \tag{4.1}$$

が成立する。但し A_x は $x \in X(G,\{s\})$ に対応する $(\hat{G}_{\mathcal{L}})_F$ の元、φ_x は適当な同形 $F^*A_x \simeq A_x$、$\xi_x \in \bar{\boldsymbol{Q}}_l^*$ は φ_x の取り方によって定まる絶対値 1 の数である。

さて我々の結果は次の通りである。

定理 4.1. G は任意の連結な *reductive* 群とし、p は G に関して *almost good* とする。この時

$$Q_T^G = (-1)^{\dim T} \tilde{Q}_T^G.$$

定理 4.2. p は *almost good*、G は中心が連結で、A_n、B_n、C_n、F_4、G_2 のいずれかの型であるとする。この時 *Lusztig* の予想が成立する。

序で述べた様に G^F の指標表を決定するためには Lusztig の予想が解決したとしても依然としてスカラー ξ_x に関する問題が残るのだが、次の場合には各 $A_x \in (\hat{G}_{\mathcal{L}})_F$ に対して ξ_x を具体的に決めることができる。

定理 4.3. $G^F = SO_{2n+1}(\boldsymbol{F}_q)$、$p$: 奇数とする。この時 $\varphi_x : F^*A_x \simeq A_x$ を標準的にとる事により $\xi_x = 1$ とできる。従って G^F の指標表が決定できる。

以下に証明の概略を説明する。出発点は Lusztig ([8]) による次の定理である。

定理 4.4 (Lusztig). G を任意の連結な *reductive* 群（中心は不連結でも良い）とする。この時

(i) もし q が十分大きければ（任意の p に対して）

$$Q_T^G = (-1)^{\dim T} \tilde{Q}_T^G.$$

(ii) p は *almost good*、 q は十分大きいと仮定する。 L を F-*stable* な *Levi* 部分群、 $A \in \hat{L}_F$ を *cuspidal* な *character sheaf* とし、 $\varphi_0 : F^* \simeq A$ を固定する。 $K = \mathrm{ind}_P^G A$、 $\varphi : F^*K \simeq K$ に対し

$$\chi_{K,\varphi} = (-1)^c R_L^G(\chi_{A,\varphi_0})$$

が成り立つ。但し $c = \dim \operatorname{supp} A$ である。

定理 4.1 は定理 4.4 の (i) を使ってある種の specialization を実行する事により得られる。定理 4.2 については次に述べる様な character sheaf の twisted induction の概念が必要になる。§2 の始めに述べた character sheaf の定義では、induction ind_B^G における B の役割が BwB で置き換えられている。同様の事が ind_P^G に対しても成立し、induction の定義において P を double coset PwP で置き換えた induction ind_{PwP}^G が定義できる。但し、$w \in N_G(L)/L$ で $\dot{w} \in N_G(L)$ が $\dot{w}(B \cap L) = B \cap L$ となるものを取るものとする。ind_P^G の場合と違って $A \in \hat{L}$ に対して $K = \mathrm{ind}_{PwP}^G A \in \mathcal{D}G$ は必ずしも $\mathcal{M}G$ の元とはならないが、character sheaf の定義の場合と同様 ${}^pH^iK$ の各単純成分はすべて $\hat{G}$ に含まれる事が示される。但しこの場合 $\hat{L}$ は §3 に定義した意味の character sheaf ではなく、L の w で twist した意味の共役作用、$l : x \mapsto \dot{w}^{-1}l\dot{w} \cdot x \cdot l^{-1}, L \to L$ に関する character sheaf $\hat{L}^{\dot{w}}$ になる。今 $\dot{w}$ が導く L の graph automorphism を τ とすると、これは L と $<\tau>$ との半直積でできる不連結群 $L<\tau>$ に関する [7] の意味での character sheaf $\hat{L}^\tau$ と本質的に同じものである。従って L が自明な graph automorphism しか持たなければ $\hat{L}^{\dot{w}}$ の構造は $\hat{L}$ に帰着する。定理 4.2 で扱うのはこの場合である。さて $\boldsymbol{F}_q$-structure を考えると ind_P^G は F-stable な Levi 部分群 $L = L_w$ からの twisted induction R_L^G に対応し、それは又 [1]、[12]、[13] で記述された様に十分大きい拡大体 $\boldsymbol{F}_{q^m}$ における Harish-Chandra induction $\mathrm{Ind}_{P^{F^m}}^{G^{F^m}} \delta$ （δ は L^{F^m} の cuspidal な指標）の指標を、対応する Hecke 環の元 T_w と Frobenius map F で twist したもの（Shintani descent identity）として記述される。一方 P が F-stable の場合 $\mathrm{ind}_{PwP}^G A$ の特性関数は G^F における Harish-Chandra induction $\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} \delta_1$ （δ_1 は L^F のある指標）の指標を、対応する Hecke 環の元 T_w で twist した trace に関係している事が分かる。特に $\delta \in \mathcal{E}(L^F, \{s\})$ を L^F の cuspidal な既約指標とすると、$\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} \delta$ に含まれる G^F の既約指標 ρ は

$$\rho = \sum_A c_A \chi_{A,\varphi_A} \tag{4.2}$$

と表される。ここに $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ を $s \in G^*$ に対応する tame local system とすると、A は $(\hat{G}_{\mathcal{L}})_F$ の元を動く。

さて定理 4.2 について考える。G を定理の仮定を満たす古典群とする。最初に q を定理 4.4 が成立する様に十分大きくとると、rank に関する帰納法と (2.6) による R_L^G の分解、$\mathrm{End}_{\mathcal{M}G}(\mathrm{ind}_P^G A_0)$ の記述などを使って cuspidal でない $A \in \hat{G}_{\mathcal{L}}$ に対しては定理の成立する事が示される。古典群の場合各 $\hat{G}_{\mathcal{L}}$ は高々一つの cuspidal sheaf しか含まないので、もう一つ R_x と χ_{A_x,φ_x} とをつなげる関係式があれば良いがそれは (4.2) により与えられる。次に任意の q について考える。(4.2) において F を F^m で置き換えた式を考えると適当な parametrization のもとで (4.2) における c_A は q の有理式 $c_A(q)$ で表される事が分かる。$q \gg 0$ の場合既に示した事により (4.2) は ρ の almost character への分解を与えるので各係数 c_A は q に無関係な定数である。これより $c_A(q)$ は任意の q に対して定数になる事が分かり、(4.2) は ρ の χ_{A,φ_A} への分解を与える事になる。$\mathcal{E}(G^F, \{s\})$ は高々一つの cuspidal な既約指標しか含まないので、もう一つ関係式があれば良い。それはこの場合、定理 4.1 により $R_T^G(\theta)$ と $\chi_{K_{\mathcal{L},T}}$ を比較して得られる。

例外群の場合 $\hat{G}_{\mathcal{L}}$ に含まれる cuspidal sheaf の個数が多いので、($\mathcal{L} = \bar{Q}_l$ の場合、F_4 で 7 個、G_2 で 4 個）上の方法は適用できない。代わりに、以下の様に G^F の twisting operator を利用する。$x \in G^F$ に対し、Lang の定理により、$x = \alpha^{-1}F(\alpha)$ となる $\alpha \in G$ が取れ、$\hat{x} = F(\alpha)\alpha^{-1}$ とおくと $\hat{x} \in G^F$ となる。対応 $x \mapsto \hat{x}$ は G^F の共役類の間の全単射を引き起こし、それから誘導される線形写像 $t_1^* : C(G^F/\sim) \to C(G^F/\sim)$ を G^F の twisting operator と言う。twisting operator は [1]、[13]、[14] により次の性質を持つ事が知られている。

定理 4.5. *G を中心が連結な reductive 群とする。その時 G^F の almost character R_x は t_1^* の固有関数になる。*

特に G^F が例外群の場合、[1] により R_x、($x \in X(G^F, \{1\})$ に対応する固有値は全て決定されている。例えば $G = F_4$ の場合 cuspidal な almost character は 7 個あり、それらはの t_1^* での固有値は、1、1、-1、θ、θ^2、i、$-i$ で与えられる。但し、θ は 1 の原始 3 乗根、$i = \sqrt{-1}$ である。一方 G の character sheaf に関しても次の定理が成立する。

定理 4.6. *G を任意の reductive 群、$A \in \hat{G}_F$ とする。この時 χ_{A,φ_A} は t_1^* の固有関数になる。A が cuspidal の場合には χ_{A,φ_A} の固有値は簡単に計算できる。*

定理 4.5 と定理 4.6 により cuspidal character sheaf A の特性関数に関して多くの情報が得られる。例えば $G = F_4$ の場合、定理 4.5 の結果より $C(G^F/\sim)$ における θ、θ^2、i、$-i$ に対する t_1^* の固有空間は 1 次元である事が分かる。従って、対応する χ_{A,φ_A} は一意的に定まる。これらの事実と以前の方法を組み合わせる事により、F_4、G_2 の場合に定理 4.2 が確かめられる。

注意 (i). 上記の方法は G が他の型、D_n、E_6、E_7、E_8 の場合にも基本的には成立すると思われる。しかしこの場合、character sheaf の twisted induction を使う部分で不連結群 $G<\tau>$ の character sheaf を扱う事が避けられず、従って又、$G<\tau>^F$ に関する almost character の理論が必要になる。$G<\tau>$ の character sheaf の理論は [7] で展開され、又、$G<\tau>^F$ の Deligne-Lusztig 理論についても Digne-Michel [2] で研究が開始されている。これらの理論が整備されれば、G の中心が連結の場合残りの群に対しても同様の結果が得られると思われる。

(ii). 最近 Lusztig は短い論文 [10] で、川中 [3] の generalized Gelfand-Greav 表現をに関する理論を一般化した 彼の unipotent support の理論 [9] を使って（従って Lie 環の議論を使う）p、q が共に十分大きい時、任意の reductive 群 G の cuspidal character sheaf に関して (4.1) が成立する事を示した。R_L^G の分解が完全にできればこれから予想が従う。

最後に p が almost good でない場合の character sheaf について述べておく。[6] で character sheaf は任意の標数について定義されているが、以下の様な基本的な性質が p が almost good でない場合は証明されていない。$(\Sigma,\mathcal{E})$ を Levi 部分群 L の cuspidal pair（定義は [5] 参照）とし、cuspidal complex $\mathrm{IC}(\Sigma,\mathcal{E})[\dim\Sigma]$ を ind_P^G で誘導し、分解して得られる simple perverse sheaf を admissible complex と言う。上の様にして、全ての L の cuspidal pair から得られる admissible complex 全体の集合を $\mathcal{A}(G)$ と表す。$\hat{G}\subset\mathcal{A}(G)$ であるが、p が almost good の時、両者は一致するというのが [6] の主要な結果である。又、G の cuspidal complex $A=\mathrm{IC}(\Sigma,\mathcal{E})[\dim\Sigma]$ は $\bar{\Sigma}$ に support を持つが、A の $\bar{\Sigma}-\Sigma$ への制限が 0 の時 A を clean な cuspidal complex と言う。G の任意の Levi 部分群の cuspidal complex が clean の時、G は clean であると言う。G が clean である事が $\hat{G}$ の特性関数 χ_{A,φ_A} 達の直交性の根拠を与える。p が almost good の時は G が clean になる事が知られている。p が bad の時証明できないのは、その議論が unipotent elements に support を持つ cuspidal character sheaf が唯一つなら有効であるが、二つ以上あるとうまくいかないという事情に基ずく。(p : bad の時は実際二つ以上になる。) しかしこの点を、G^F の twisting operator を使って切り抜ける事ができ、次の結果が得られる。

定理 4.7. G を F_4 又は G_2、$p=2$ 又は $p=3$ とする。この時

(i) $\mathcal{A}(G)=\hat{G}$.

(ii) G が F_4 型、$p=2$ の場合を除き G は *clean* になる。この時 p :*good* の時と同様に、$\hat{G}$ は分類できる。特に、$\hat{G}_F$ の特性関数に関して予想が成立する。

(iii) G が F_4 型、$p=2$ とする。この時 $\hat{G}$ の(可能性としては)唯一つの例外 A_0 を除いて 全ての *cuspidal character sheaf* は *clean* になる。($G\neq L$ となる L が *clean* になる事は分かっている。) この時 $A_0=\mathrm{IC}(C,\mathcal{E})[\dim C]$, C は $F_4(a_2)$ 型の G の *unipotent class* である。χ_{A_0} の直交性は保証されないが、χ_{A_0} を $\chi'_{A_0}=\chi_{A_0}|C$ (C への制限) で置き換え、残りの χ_A はそのままにして得られる関数系は G^F の *almost character* 達とスカラー倍を除いて一致する。(但し *parametrization* には少し不定性がある。)

References

1. Asai, T., The unpotent class functions of exceptional groups over finite fields, Comm. Algebra 12 (1984), 2279 – 2857.
2. Digne, F. and Michel, J., Groupes reductifs non connexes, preprint.
3. Kawanaka, N., Shintani lifting and Gelfand-Greav representations, in "The Arcata conference on Representations of finite groups," Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 47–1, pp. 147–163. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1987.
4. Lusztig, G., "Characters of Reductive groups over a Finite field," Ann. of Math. Studies, Vol.107, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.
5. Lusztig, G., Intersection cohomology complex on a reductive group, Invent. Math. 75 (1984), 205–272.
6. Lusztig, G., Character sheaves, I Adv. in Math. 56 (1985), 193–237, II Adv. in Math. 57 (1985), 226–265, III, Adv. in Math. 57 (1985), 266–315, IV, Adv. in Math. 59 (1986), 1–63, V, Adv. in Math. 61 (1986), 103–155.
7. Lusztig, L., Introduction to character sheaves, in "The Arcata conference on Representations of finite groups,", Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 47-1, pp.165–179. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1987.
8. Lusztig, G., Green functions and character sheaves, Annals of Mathematics, 131 (1990), 355–408.
9. Lusztig, G., Unipotent support for irreducible representations, preprint.
10. Lusztig, G., Remarks on computing irreducible characters, preprint.
11. Shoji, T., Green polynomials of classical groups, Invent. Math. 74, (1983), 237–267.
12. Shoji, T., Some generalization of Asai's result for classical groups, in "Algebraic groups and related topics," Advanced Studies in Pure Math. Vol 6, pp.207–229, Kinokuniya and North-Holland, 1985.
13. Shoji, T., Shintani descent for exceptional groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 34 (1987), 599–653.
14. Shoji, T., Shintani descent for Algebraic groups over a finite field, I, J. Algebra, 145 (1992), 468–524.
15. Beynon, W.M. and Spaltenstein, N., Green functions of finite Chevalley groups of type E_n (n = 6,7,8), J. Algebra 88 (1984), 584–614.