数理解析研究所講究録
第794巻 1992年 137-148

On a problem of A.V. Ivanov

九州大学 理学部 生田卓也
Takuya IKUTA

§1.

1991年8月、モスクワ近郊で代数的組合せ論の国際シンポジウムが開かれた。会議中、ソビエト科学アカデミー教授A.V. Ivanov氏が次の問題を提出されたことを、会議に出席されていた九州大学理学部の坂内英一先生から教えていただいた。A.V. Ivanovの予想問題とは次のものである。

<u>A.V. Ivanov's conjecture</u>:

$\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ を有限集合 X 上の commutative association scheme とする。その時、各 $i\ne 0$ に対して、$\Gamma_i=(X,R_i)$ が strongly regular graph ならば、$\mathfrak{X}$ は amorphic であるか?

上に出てくる d をことを association scheme (以下、assoc. scheme と書くことにする) の class と呼ぶが、d が小さい場合に、仮定から assoc. scheme $\mathfrak{X}$ の 1st eigen-matrix P と呼ばれる行列がどうなっていて、そこからどういうことがわかるのかを述べていく。実際、行列 P を見ることに

より、class d が 4, 5, 6 の場合には、上の conjecture は正しいことがわかる。

定義など、詳しい説明が出来ない場合は、注釈に挙げる参考文献にあたっていただくことにして、さっそく話を進めていこう。

$\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を位数 n の有限集合 X 上の class d の <u>commutative assoc. scheme</u> とする（assoc. scheme の定義や、これから用いる記号の意味は[2]を参照してください）。$P=(p_j(i))$ を assoc. scheme $\mathfrak{X}$ の <u>1st eigenmatrix</u>, $Q=(q_j(i))$ を <u>2nd eigenmatrix</u> とする：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & k_1 \; k_2 \cdots k_d \\ 1 & \\ \vdots & P_0 \\ 1 & \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 1 & m_1 \; m_2 \cdots m_d \\ 1 & \\ \vdots & Q_0 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

P_0 も Q_0 も行とか列の適当な置換を除いて、各々 unique に定まることを注意しておく。また、

$$\frac{q_j(i)}{m_j}=\frac{\overline{p_i(j)}}{k_i}\quad \text{([2]の定理3.5 (i) 参照)} \quad \text{-----} (1)$$

がある。この式は簡単に見えるけれども、重要な役割を演じてくれる式である。

assoc. scheme $\mathfrak{X}$ があると、その subscheme（または fusion scheme）と呼ばれる概念がある。その定義の前に[3]に従って、1つだけ言葉を準備しておいた方が便利である。

$\{0,1,\cdots,d\}$ の分割 $\Lambda_0,\Lambda_1,\cdots,\Lambda_e$ が <u>admissible</u> で

であるとは、

$$\Lambda_0=\{0\},\ \Lambda_i\neq\phi\ \ (1\leq i\leq e)$$

$$\Lambda_i'=\Lambda_j \text{ for some } j\ \ (1\leq i, j\leq e)$$

ただし、$\Lambda_i'=\{\alpha';\alpha\in\Lambda_i\}$ で、$R_{\alpha'}=\{(x,y);(y,x)\in R_\alpha\}$。

<u>定義</u>　$R_{\Lambda_i}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda_i}R_\alpha$ とおいた時、$\tilde{\mathfrak{X}}=(X,\{R_{\Lambda_i}\}_{0\leq i\leq e})$ が assoc. scheme になる時、$\tilde{\mathfrak{X}}$ を assoc. scheme $\mathfrak{X}$ の <u>subscheme</u> と呼ぶ。更に、どんな admissible 分割に対しても、assoc. scheme $\mathfrak{X}$ の subscheme が出来る時に、元の assoc. scheme $\mathfrak{X}$ を <u>amorphic</u>(又は amorphous) と呼ぶことにする。

subscheme の存在については、次に述べる Bannai-Muzichuk criterion と呼ばれる非常に有用な補題がある。

<u>補題1</u> (Bannai-Muzichuk) ([1]を参照)

$\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を commutative assoc. scheme とする。$\{\Lambda_i\}_{0\leq i\leq e}$ を $\{0,1,\cdots,d\}$ の admissible 分割とする。この時、$\{\Lambda_i\}_{0\leq i\leq e}$ が subscheme $\tilde{\mathfrak{X}}=(X,\{R_{\Lambda_i}\}_{0\leq i\leq e})$ を作るための必要十分条件は、次の (*) を満たす $\{0,1,\cdots,d\}$ の admissible 分割 $\{\Delta_i\}_{0\leq i\leq e}$ が存在することである。

(*) $\begin{cases} \Delta_0=\{0\}. \\ \text{1st eigen matrix } P \text{ の } (\Delta_i,\Lambda_j) \text{ block が} \\ \text{constant row sum をもつ。} \end{cases}$

subscheme の存在については、P-行列の言葉だけで記述出来たけれども、P と Q の間には (1) 式があるわけだから、

上の (*) は次の (**) と書くこともできる。

$$(**)\begin{cases} \text{上の } \{\Lambda_i\}_{0\le i\le e},\ \{\Delta_i\}_{0\le i\le e} \text{ に対して. } Q \text{ の } (\Delta_j,\Lambda_i) \\ \text{block が constant row sum をもつ。} \end{cases}$$

更に次のことが Muzichuk により示されている。

系2 (Muzichuk)　assoc. scheme $\mathfrak{X}$ の subscheme $\tilde{\mathfrak{X}}$ が存在するなら. 2つの異なる admissible 分割 $\{\Lambda_i\}_{0\le i\le e}$, $\{\Lambda_i'\}_{0\le i\le e}$ に対して. 各々での各 block が constant row sum になるような. 共通の admissible 分割 $\{\Delta_i\}_{0\le i\le e}$ が存在することはない。

次に strongly regular graph の定義を述べ. それと assoc. scheme との関係を説明する。

定義：　graph $\Gamma=(X,R)$ が strongly regular graph であるとは. undirected, connected な graph で. 次の (☆) を満足するものである。

$$(☆)\qquad \#\{z\in X;\ x\sim z,\ z\sim y\}=\begin{cases} k & \text{if } x=y, \\ \lambda & \text{if } x\sim y, \\ \mu\ (>0) & \text{if } x\not\sim y. \end{cases}$$

ただし. ～ は adjacent な関係を表わすとする。

strongly regular graph の定義から. その diameter は2で. trivial relation $\{(x,x)\,;\,x\in X\}$ を R_0, adjacent な pair 全体を R_1, non-adjacent な pair 全体を R_2 とおくと. class 2 の symmetric assoc. scheme $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le 2})$ が出来る。assoc. scheme $\mathfrak{X}$ では. $\mu\ (=p_{11}^2)$ は必ず正とは限らないが. このギャップを最初から認めておけば. 逆に class 2 の symmetric assoc. scheme $\mathfrak{X}$

から、$i\neq 0$ である relation R_i に対して $\Gamma_i=(X,R_i)$ が strongly regular graph になる。すなわち、上の意味で:

$$\underset{(i\neq 0)}{\Gamma_i=(X,R_i)} \text{ が strongly regular graph}$$

$$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le 2}) \text{ が class 2 の symmetric assoc. scheme。}$$

§2.

この節では、A.V.Ivanov's conjecture について話を進めることにする。assoc. scheme $\mathfrak{X}$ が amorphic になるかどうかは、補題1より 1st eigenmatrix P または 2nd eigenmatrix Q の P_0, Q_0 の列の勝手な分割に対して、それらの block が constant row sum になる行の分割が得られればよいのであった。$\forall i\ (i\neq 0)$ に対して $\Gamma_i=(X,R_i)$ が strongly regular graph、すなわち、d class assoc. scheme $\mathfrak{X}$ で $\{R_0\}, \{R_i\}, X\times X-\{R_i\}$ $(i\in\{1,\cdots,d\})$ という分割で class 2 の symmetric subscheme が出来ることから、補題1より P_0 の各列には2種類の固有値しか並んでいないことがわかる。

$d=2$ の場合は最初から assoc. scheme $\mathfrak{X}$ は amorphic である。$d=3$ の場合は、P_0 の列の nontrivial な分割の仕方は $\{R_1\}, \{R_2, R_3\}$ という形をしたものしかあり得ない。だから、仮定から assoc. scheme $\mathfrak{X}$ は amorphic になっている。したがって、$d\geqq 4$ の場合が考察しなければいけない対象である。

次の記号は、P_0 の行が適当な置換を除いて unique

に定まることから便利である。それは $(i.j)$ type と書いたら、P_0の列で2つの固有値のうち、一方が i 個、他方が j 個並ぶ列を表わすとする。

$d=4$ の時、P_0 はどうなっているだろうか？各列には (1.3) type と (2.2) type しか現れない。(2.2) type が P_0 の列に4つ現れる時は、(2.2) type の異なる数が 3つしかないことと、系2から、この場合は最初から起きないことがわかる。したがって、次の4つの場合が考えられる。

(i) (1.3) type が 4つ P_0の列に現れる場合、

(ii) (1.3) type が P_0 に3つ、(2.2) type が P_0 に1つ現れる場合、

(iii) (1.3) type が P_0 に2つ、(2.2) type が P_0 に2つ現れる場合、

(iv) (1.3) type が P_0 に1つ、(2.2) type が P_0 に3つ現れる場合。

P_0の列には (1.3) type が必ず現れるので、

$$P_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ \beta & & & \\ \beta & & * & \\ \beta & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

とおいてよい。(i)の場合は系2から $\{R_1\}$, $\{R_2, R_3, R_4\}$ という分割と、$\{R_2\}$, $\{R_1, R_3, R_4\}$ という分割に対して、同じ行分割をもつことはない。だから R_1 と R_2 で (1.3) type が同じ配置で並ぶことはない。このことは、他の色々な場合でも同じ状況にある。(i)の場合は、P-行列は次の形になっている。

$$P=\begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & \alpha & \gamma & \varepsilon & \eta \\ 1 & \beta & \delta & \varepsilon & \eta \\ 1 & \beta & \gamma & \zeta & \eta \\ 1 & \beta & \gamma & \varepsilon & \theta \end{bmatrix}。 \quad \text{-----} \ (2)$$

この場合．P_0 のどんな列の分割に対しても block が constant row sum になる行の分割が存在するから．この P-行列をもつ assoc. scheme $\mathfrak{X}$ については amorphic になっている。

(ii) の場合は．系2から (1.3) type 3つが次のように並んでいるとしてよい。

$$P_0=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varepsilon & \\ \beta & \delta & \varepsilon & * \\ \beta & \gamma & \zeta & \\ \beta & \gamma & \varepsilon & \end{bmatrix} \end{array}$$

(2.2) type は次の3つ

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta \\ \theta \\ \eta \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta \\ \theta \\ \theta \\ \eta \end{bmatrix}$$

しかないから．このいずれもが R_4 に来たとしても．最初の場合は $\zeta=\varepsilon$．次の場合は $\delta=\gamma$．最後の場合は $\alpha=\beta$ となってしまうから．この場合は起きない。

(iii) の場合は．系2から (1.3) type 2つが次のように並ぶとしてよい。

$$P_0=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & & \\ \beta & \delta & * & * \\ \beta & \gamma & & \\ \beta & \gamma & & \end{bmatrix} \end{array}$$

P_0 は行をどのように入れ換えてもよかったのであるから．R_3 には

次の2つの場合が考えられる。

$$(ア)\quad P_0=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma & \varepsilon & \\ \beta & \delta & \varepsilon & \\ \beta & \gamma & \zeta & * \\ \beta & \gamma & \zeta & \end{bmatrix},\qquad (イ)\quad P_0=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma & \varepsilon & \\ \beta & \delta & \zeta & \\ \beta & \gamma & \varepsilon & * \\ \beta & \gamma & \zeta & \end{bmatrix}$$

(ア)の場合には、直交関係 $PQ=nI$ から、各行の行和が全て等しいことから、P_0の(3.4)成分=(4.4)成分となり、この場合は起きない。

(イ)の場合には、先程のことから R_4 に $\begin{bmatrix}\eta\\ \theta\\ \theta\\ \eta\end{bmatrix}$ しか来ない。すなわち、

$$P_0=\begin{array}{c}\{R_1\},\{R_2,\ R_3,\ R_4\}\\ \left[\begin{array}{c|ccc}\alpha & \gamma & \varepsilon & \eta\\ \hline \beta & \delta & \zeta & \theta\\ \beta & \gamma & \varepsilon & \theta\\ \beta & \gamma & \zeta & \eta\end{array}\right]\end{array}。$$

(1)式を使って Q_0 に持ち込むと、

$$\left[\begin{array}{c|ccc}\frac{m_1}{k_1}\alpha & \frac{m_2}{k_1}\beta & \frac{m_3}{k_1}\beta & \frac{m_4}{k_1}\beta\\ \hline \frac{m_1}{k_2}\gamma & \frac{m_2}{k_2}\delta & \frac{m_3}{k_2}\gamma & \frac{m_4}{k_2}\gamma\\ \frac{m_1}{k_3}\varepsilon & \frac{m_2}{k_3}\zeta & \frac{m_3}{k_3}\varepsilon & \frac{m_4}{k_3}\zeta\\ \frac{m_1}{k_4}\eta & \frac{m_2}{k_4}\theta & \frac{m_3}{k_4}\theta & \frac{m_4}{k_4}\eta\end{array}\right]$$

(**)を使うと、

$$\frac{m_1}{k_2}\gamma=\frac{m_1}{k_3}\varepsilon=\frac{m_1}{k_4}\eta$$

$$\frac{m_2}{k_2}\delta+\frac{m_3+m_4}{k_2}\gamma=\frac{m_2+m_4}{k_3}\zeta+\frac{m_3}{k_3}\varepsilon=\frac{m_2+m_3}{k_4}\theta+\frac{m_4}{k_4}\eta。$$

(*)から

$$\delta+\zeta+\theta=\gamma+\varepsilon+\theta=\gamma+\zeta+\eta。$$

どの式を使ってもよいが、Q_0の第2、第3行についての式を使うと、

$$\frac{\gamma}{k_2}=\frac{\varepsilon}{k_3}\ \text{から、}\ \gamma=\frac{k_2}{k_3}\varepsilon。\quad\text{-----}\ (あ)$$

これを $\delta=\gamma+\varepsilon-\zeta$ に代入して．$\delta=\left(\frac{k_2}{k_3}+1\right)\varepsilon-\zeta$。 ----- (い)

(あ), (い) を $\frac{m_2}{k_2}\delta+\frac{m_3+m_4}{k_2}\gamma=\frac{m_2+m_4}{k_3}\zeta+\frac{m_3}{k_3}\varepsilon$ に代入して解くと．

$$\left(\frac{m_2+m_4}{k_3}+\frac{m_2}{k_2}\right)\varepsilon=\left(\frac{m_2+m_4}{k_3}+\frac{m_2}{k_2}\right)\zeta$$

$$\varepsilon=\zeta$$

となって．矛盾が生じてくる。

すなわち $d=4$ の場合は．仮定を満たす P-行列は (2) の形のものしか残らず．assoc. scheme $\mathfrak{X}$ は amorphic であることがわかる。

$d=5$ の場合はどうだろうか？ P_0 の列には (1.4) type と (2.3) type が現れるから次の 6 つの場合が生じる。

(i) (1.4) type が 5つ P_0 の列に現れる場合．

(ii) (1.4) type が P_0 に 4つ．(2.3) type が P_0 に 1つ現れる場合．

(iii) (1.4) type が P_0 に 3つ．(2.3) type が P_0 に 2つ現れる場合．

(iv) (1.4) type が P_0 に 2つ．(2.3) type が P_0 に 3つ現れる場合．

(v) (1.4) type が P_0 に 1つ，(2.3) type が P_0 に 4つ現れる場合．

(vi) (2.3) type が P_0 に 5つ現れる場合。

順を追って見て行こう。(i) の場合は系2より P は次の形をしているとしてよい。

$$P=\begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \\ 1 & \alpha & \gamma & \varepsilon & \eta & \iota \\ 1 & \beta & \delta & \varepsilon & \eta & \iota \\ 1 & \beta & \gamma & \zeta & \eta & \iota \\ 1 & \beta & \gamma & \varepsilon & \theta & \iota \\ 1 & \beta & \gamma & \varepsilon & \eta & \kappa \end{bmatrix}$$

確かに．この P-行列をもつ assoc. scheme $\mathfrak{X}$ は amorphic である。

(ii)の場合は系2より次の形をしているとしてよい。

$$P_0=\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varepsilon & \eta & \\ \beta & \delta & \varepsilon & \eta & \\ \beta & \gamma & \zeta & \eta & * \\ \beta & \gamma & \varepsilon & \theta & \\ \beta & \gamma & \varepsilon & \eta & \end{bmatrix} \end{array}$$

(2.3) typeは10通りある。P_0の行和は全て等しいから、次の(4)を満たす(2.3)typeがR_5に来なければいけない。

P_0の$(i.5)$成分 $\neq$ P_0の$(5,5)$成分 $(i=1,2.3.4)$ ----- (3)

ところが、(3)を満たす(2.3)typeはない。

(iii)の場合は、次の形をしているものから出発してよい。

$$P_0=\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varepsilon & & \\ \beta & \delta & \varepsilon & & \\ \beta & \gamma & \zeta & * & * \\ \beta & \gamma & \varepsilon & & \\ \beta & \gamma & \varepsilon & & \end{bmatrix} \end{array}$$

R_4には行と列の適当な置換が許されることから、次の3つが考えられる。

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ \theta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta \\ \theta \\ \theta \\ \eta \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \\ \eta \\ \eta \end{bmatrix}$$

ところが、R_4に最初と最後のが来ることはない。だから、次の場合を考えればよい。

$$P_0=\begin{array}{c} \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varepsilon & \eta & \\ \beta & \delta & \varepsilon & \theta & \\ \beta & \gamma & \zeta & \theta & * \\ \beta & \gamma & \varepsilon & \eta & \\ \beta & \gamma & \varepsilon & \theta & \end{bmatrix} \end{array}$$

この時、R_5には $\begin{bmatrix} \iota \\ \iota \\ \kappa \\ \kappa \\ \kappa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \iota \\ \kappa \\ \kappa \\ \kappa \\ \iota \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa \\ \iota \\ \iota \\ \kappa \\ \kappa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa \\ \iota \\ \kappa \\ \iota \\ \kappa \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa \\ \iota \\ \kappa \\ \kappa \\ \iota \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ \kappa \\ \iota \\ \iota \end{bmatrix}$ の6つの可能性がある。

このうち，P_0の(4.5)成分キ(5.5)成分，P_0の(2.5)成分キ(5.5)成分を満たすものは $\begin{bmatrix} l \\ k \\ k \\ k \\ l \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} k \\ l \\ k \\ l \\ k \end{bmatrix}$ である。2つともQ-行列へと持ち込んで $d=4$ の(iii)で行なった計算と同様にして矛盾へと導く。

(iv).(v) は (iii) で見たように，順次可能な(2.3) typeの配置の仕方を見て行く。そして，残ったP-行列に対して，Qで考え(**)を適用する。すると，この2つの場合は起きないことがわかる。

(v)の場合は状況が少しは複雑になる。(1.4) typeがないので，P_0の配置が決まりにくいことによる(系2があるので，全ての配置を考えても数はかなり限られる)。直交関係を使っても消えないP_0については，Q-行列で(**)を適用した。$d=4$の(iii)と同じ計算により，この場合は起きないことがわかる。

以上より $d=5$ の場合は仮定を満たす assoc. scheme $\mathfrak{X}$ は amorphic であることがわかる。

$d=6$ の場合は考察する P_0 の数はかなり増える。P_0 には，(1.5) type，(2.4) type，(3.3) type と3種類現れる。これらが P_0 に並ぶ並び方は28通りである。この28通り全てについて，行列Pを考察しなければならないのだが，P_0 に(2.4) typeが6つ並ぶ場合とか(3.3) typeが6つ並ぶ場合を最初に計算しておくと，後の場合はこれらの少し違った場合になるので，計算がしやすくなる。それと，あるrelationに関して class 2 の subscheme を作るとき，

P_0のblockである2つの行で対応する2成分の行和が等しい場合は残らない、こともわかる。

この場合にも(1.5)typeがP_0に6つ並ぶ次のP-行列の場合しか残らず、仮定を満たすassoc. scheme $\mathfrak{X}$は amorphicになる。

$$P=\begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \\ 1 & \alpha & \gamma & \varepsilon & \eta & \iota & \lambda \\ 1 & \beta & \delta & \varepsilon & \eta & \iota & \lambda \\ 1 & \beta & \gamma & \zeta & \eta & \iota & \lambda \\ 1 & \beta & \gamma & \varepsilon & \theta & \iota & \lambda \\ 1 & \beta & \gamma & \varepsilon & \eta & \kappa & \lambda \\ 1 & \beta & \gamma & \varepsilon & \eta & \iota & \mu \end{bmatrix}$$

§3.

なお、A.V. Ivanov's conjecture の逆は正しい。それは、amorphicの定義からわかることである。また、伊藤-宗政-山田([3])により、$L_{g_1\cdots g_d}(n)$ 又は $NL_{g_1\cdots g_d}(n)$ に属するassoc. scheme $\mathfrak{X}$ については amorphicであることが証明されている。記号等については[3]を参照してください。

References

1. E. Bannai, Subschemes of some association schemes J. Algebra 144 (1991), 167-188
2. E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin/Cumming, New York 1984
3. T. Ito, A. Munemasa and M. Yamada, Amorphous Association Schemes over the Galois Rings of Characteristic 4, Euro. J. Combinatorics 12 (1991). 513-526