数理解析研究所講究録
第794巻 1992年 176-186

Combinatorial background of paragroups

北大 理 日比 孝之
Takayuki Hibi
筑波大 数学 飯寄 信保
Nobuo Iyori
北大 理 伊藤 豊治
Toyoharu Itoh
筑波大 数学 増田 哲也
Tetsuya Masuda

§1 序

1990年Fields賞を受賞したJonesによるvon Neumann環の部分因子環の指数理論は大変有名であるが，驚嘆すべき現象のひとつに，4より小さい指数の値が

$4\cos^2(\pi/c)$，但し c は A_n, D_{2n}, E_6, E_8 のCoxeter数……(※)

と離散的になることが挙げられる。ここでDynkin図形に付随するCoxeter数が出現するが、その背景には、von Neumann環の部分因子環が上記に対応する状況ではDynkin図形によって分類される、という事実が潜んでいる。この仕組みは1987年頃に"発表"されたOcneanuの理論によるものであり、そこではparagroupなる概念が重要な役割を演じている。Ocneanu自身によれば、paragroupは有限群を一般化した概念で、その位数が(※)のように必ずしも整数とは限らない値を持つもの、と解説されている。もちろん、von Neumann環の部分環の分類に際して発見されたparagroupの記述には関数解析学の言葉が用いられるが、しかし、Dynkin

図形あるいはCoxeter数という役者が登場することからも推測されるように、組合せ論や対称群の表現論などがその本質に携わる部分に影を投じている。更に、広範な領域に目を移せば、可解格子模型、結び目の理論と3次元多様体の不変量、共形場理論、ソリトンに関する佐藤理論、あるいは量子群の表現論などとの深い相互関係も予想される。実際、Ocneanuによるparagroupの定式化の中で、可解格子模型の理論に現われるinversion relations や crossing symmetryなどと酷似したものが姿を見せている。

このOcneanuによるparagroupの理論により、代数的，組合せ的な言葉で表現された問題が、解析的な理論を用いることで解決されている。我々の仕事の根底を流れる哲学は、代数的，組合せ的な立場から解決しようとすることである。

§2 Paragroupの定義

ここ、paragroupは次の様なgraph上で定義される。いま、Γ_i $(i=1,2,3,4)$をfinite，undirected そして bipartite graph (multi-edgeを認める。) で次の性質を満すものとする；

(1) $V(\Gamma_i) = V_{i,0} \cup V_{i,1}$ disjoint union

但し $V_{i,0}$ は Γ_i の even vertices の集合

$V_{i,1}$ は Γ_i の odd vertices の集合

とするとき,

$V_{1,1} = V_{4,1}\ (=: V_1)$, $V_{2,0} = V_{1,0}\ (=: V_2)$, $V_{3,1} = V_{2,1}\ (=: V_3)$

$V_{4,0} = V_{3,0}\ (=: V_4)$.　　i.e.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, dash, "\Gamma_1"] \arrow[d, dash, "\Gamma_4"'] & V_2 \arrow[d, dash, "\Gamma_2"] \\ V_4 \arrow[r, dash, "\Gamma_3"'] & V_3 \end{tikzcd}$$

(2)　θ_i を Γ_i の隣接行列の Perron-Frobenius 固有値 $(i=1,2,3,4)$

とするとき、

$$\theta_1 = \theta_3, \quad \theta_2 = \theta_4.$$

我々は、この4つの graph Γ_i $(i=1,2,3,4)$ 上に与えられた次の様な図形を cell と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "\xi_4"'] & b \arrow[d, "\xi_2"] \\ c \arrow[r, "\xi_3"'] & d \end{tikzcd}$$

但し、

$\xi_1 \in E(\Gamma_1)$, $\xi_2 \in E(\Gamma_2)$, $\xi_3 \in E(\Gamma_3)$, $\xi_4 \in E(\Gamma_4)$

or

$\xi_1 \in E(\Gamma_1)$, $\xi_2 \in E(\Gamma_4)$, $\xi_3 \in E(\Gamma_3)$, $\xi_4 \in E(\Gamma_2)$

or

$\xi_1 \in E(\Gamma_3)$, $\xi_2 \in E(\Gamma_2)$, $\xi_3 \in E(\Gamma_1)$, $\xi_4 \in E(\Gamma_4)$

or

$\xi_1 \in E(\Gamma_3)$, $\xi_2 \in E(\Gamma_4)$, $\xi_3 \in E(\Gamma_1)$, $\xi_4 \in E(\Gamma_2)$.

そして、この cell 全体の集合から $\mathbb{C}$ への写像 W を connection

という。

$$W\left(\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "\xi_4"'] & b \arrow[d, "\xi_2"] \\ c \arrow[r, "\xi_3"'] & d \end{tikzcd}\right) \in \mathbb{C}$$

以下、混乱が生じない限り W を省略して cell のみによって

connection W の値を表わす。

ここ μ_i を Θ_i の固有ベクトルとする。このベクトルの index は $V(\Gamma_i)$ なので

$$\mu_i : V(\Gamma_i) \longrightarrow \mathbb{C}$$

と考えられる。この記号において

$$\begin{array}{rcl} \mu : V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \quad\quad x & \longmapsto & \mu(x) = \begin{cases} \mu_1(x) & x \in V_1 \text{ or } V_2 \\ \mu_3(x) & x \in V_3 \text{ or } V_4 . \end{cases} \end{array}$$

とする。

次に connection W についての条件, crossing symmetry と unitarity を定義する。

(a) crossing symmetry.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\xi_1} & b \\ {\scriptstyle \xi_4}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_2} \\ c & \xrightarrow[\xi_3]{} & d \end{array} = \sqrt{\frac{\mu(b)\,\mu(c)}{\mu(a)\,\mu(d)}}\ \overline{\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\tilde{\xi}_1} & a \\ {\scriptstyle \xi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_4} \\ d & \xrightarrow[\tilde{\xi}_3]{} & c \end{array}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu(b)\,\mu(c)}{\mu(a)\,\mu(d)}}\ \overline{\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\xi_3} & d \\ {\scriptstyle \tilde{\xi}_4}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\xi}_2} \\ a & \xrightarrow[\xi_1]{} & b \end{array}} .$$

(b) unitarity

$$\sum_{\begin{array}{c} \xrightarrow{\xi_1} b \\ \downarrow \xi_2 \end{array}} \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\xi_1} & b \\ {\scriptstyle \xi_4}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_2} \\ c & \xrightarrow[\xi_3]{} & d \end{array} \ \overline{\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\xi_1} & b \\ {\scriptstyle \eta_4}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_2} \\ c' & \xrightarrow[\eta_3]{} & d \end{array}} = \delta_{\xi_3,\eta_3} \cdot \delta_{\xi_4 \eta_4} \cdot \delta_{c,c'}$$

すなわち、$a\in V_i$, $d\in V_{i+2}$ を固定するとき、

$$E_1 := \left\{ \begin{tikzcd} a \arrow[d, "\xi"'] & \\ c \arrow[r, "\eta"'] & d \end{tikzcd} \;\middle|\; c\in V_{i+3},\ \xi\in E(\Gamma_{i+3}),\ \eta\in E(\Gamma_{i+2}) \right\}$$

$$E_2 := \left\{ \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\rho"] & b \arrow[d, "\sigma"] \\ & d \end{tikzcd} \;\middle|\; b\in V_{i+1},\ \rho\in E(\Gamma_i),\ \sigma\in E(\Gamma_{i+1}) \right\}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\xi"'] & b \arrow[d, "\sigma"] \\ c \arrow[r, "\eta"'] & d \end{tikzcd} \qquad E_1,\ E_2$$

として、

$\left(\begin{array}{c} a\rceil \\ \llcorner d \end{array}\right)$: $E_1\times E_2$-行列 over $\mathbb{C}$

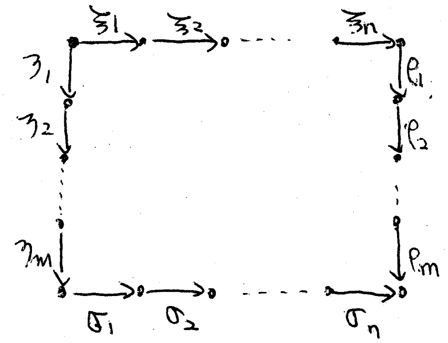
$$\left(\begin{array}{c} a\rceil \\ \llcorner d \end{array}\right)_{\left(\begin{tikzcd}[small] a \arrow[d, "\xi"'] & \\ c \arrow[r, "\eta"'] & d \end{tikzcd},\ \begin{tikzcd}[small] a \arrow[r, "\rho"] & b \arrow[d, "\sigma"] \\ & d \end{tikzcd} \right)} = W\left(\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\xi"'] & b \arrow[d, "\sigma"] \\ c \arrow[r, "\eta"'] & d \end{tikzcd} \right).$$

とする。このとき、connection W が unitarity を満たすとは、行列 $\left(\begin{array}{c} a\rceil \\ \llcorner d \end{array}\right)$ が unitary 行列であることである。

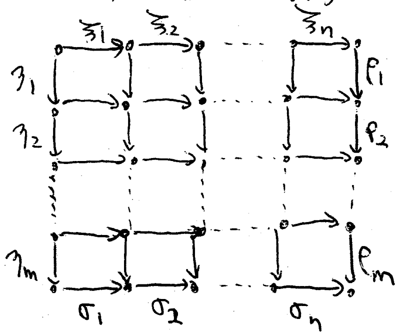
他方, flatness の定義であるが, それは次の様な無限 graph の上で考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
V_1 & \overset{\Gamma_1}{\text{---}} & V_2 & \overset{\Gamma_1}{\text{---}} & V_1 & \overset{\Gamma_1}{\text{---}} & V_2 & \text{---} & \cdots \\
\Gamma_4\,| & & |\,\Gamma_2 & & |\,\Gamma_4 & & |\,\Gamma_2 & & \\
V_4 & \underset{\Gamma_3}{\text{---}} & V_3 & \underset{\Gamma_3}{\text{---}} & V_4 & \underset{\Gamma_3}{\text{---}} & V_3 & \text{---} & \cdots \\
\Gamma_4\,| & & |\,\Gamma_2 & & |\,\Gamma_4 & & |\,\Gamma_2 & & \\
V_1 & \overset{\Gamma_1}{\text{---}} & V_2 & \overset{\Gamma_1}{\text{---}} & V_1 & \overset{\Gamma_1}{\text{---}} & V_2 & \text{---} & \cdots \\
\Gamma_4\,| & & |\,\Gamma_2 & & |\,\Gamma_4 & & |\,\Gamma_2 & & \\
V_4 & \underset{\Gamma_3}{\text{---}} & V_3 & \underset{\Gamma_3}{\text{---}} & V_4 & \underset{\Gamma_3}{\text{---}} & V_3 & \text{---} & \cdots \\
| & & | & & | & & | & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

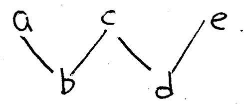
ここで、上の無限graph上での次の様な図形のconnectionの値を以下のようにして与える。



まず、この図形に張り合せることのできるcellで張り合せる。



そして、それぞれのcellのconnectionの値の積を取る。また別の張り合せに対して同様に積を取り，前の積に加える。この操作を可能なだけ行う。

例えば $\Gamma_i =$  $i=1,2,3,4.$ $V_1(=V_3)=\{a,c,e\}$

$V_2(=V_4)=\{b,d\}.$

とするとき、

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] & a \arrow[d] \\
b \arrow[d] & & b \arrow[d] \\
c \arrow[r] & b \arrow[r] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\
b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
c \arrow[r] & b \arrow[r] & a
\end{tikzcd}
+
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\
b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
c \arrow[r] & b \arrow[r] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
=\left\{
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
b \arrow[r] & a
\end{tikzcd}
\times
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\
a \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\times
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\
c \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\times
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
b \arrow[r] & a
\end{tikzcd}
\right\}
$$

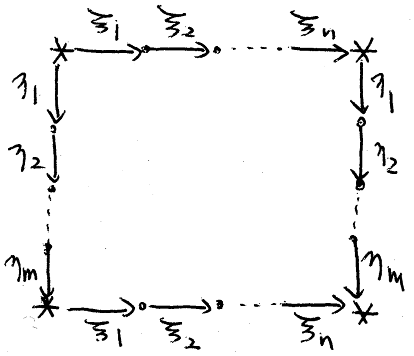
$$
+\left\{
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
b \arrow[r] & c
\end{tikzcd}
\times
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
b \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] \\
c \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\times
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
c \arrow[r] & b
\end{tikzcd}
\times
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
c \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
b \arrow[r] & a
\end{tikzcd}
\right\}.
$$

である。

以上の記号を用いて flatness は次の様に定義される。

V_1の点を1つ取り、その点を$*$とする。そして $\Gamma_1=\Gamma_4$,

$\Gamma_2=\Gamma_4$,



$= 1 \quad$ for $\forall \xi_\square, \eta_\star$

をみたすとき、connection W は flat であるという。

定義 $(\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}, W)$ は paragroup である。

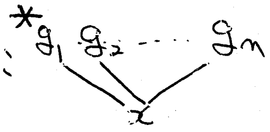
$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ connection W は crossing symmetry, unitarity

そして flatness をみたす。

そして β を Γ_1 の隣接行列の Perron-Frobenius 固有値とするとき、β^2 を paragroup $(\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}, W)$ の位数という。

例。Gを有限群，Rep(G)をGの既約なユニタリー表現の代表系とする。 $G=\{g_1(=e), g_2, \cdots, g_n\}$, $\mathrm{Rep}(G)=\{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_d\}$

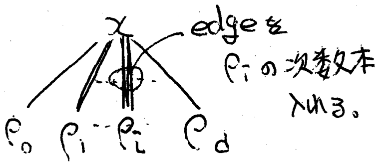
このとき、$\Gamma_1(=\Gamma_4)$:



$V_1=\{g_1, \cdots, g_n\}$

$V_2=\{x\}$.

$\Gamma_2(=\Gamma_3)$:



$V_3=\{\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_d\}$

$V_4=\{x\}$.

とすると、Perron - Frobenius 固有値は $\sqrt{n}$.

　　　　　　　固有ベクトルは $\mu(g_i)=1$ $\quad i=1,2,\cdots n$.

$\mu(x)=\sqrt{n}$.

$\mu(\rho_i)=\deg(\rho_i)$ $\quad i=1,\cdots,d$

となり，connection は

$$W\left(\begin{array}{ccc} g_i & \longrightarrow & x \\ \big\downarrow & & \big\downarrow b \\ x & \xrightarrow[a]{} & \rho_j \end{array}\right) = \left(\rho_j(x)\right)_{(a\,b)}$$

によって与えると $(\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4\}, W)$ は paragroup となる。

$(g_1(=e)$ を $*$ とする。).

§3　2-skeleton について。

以下では、paragroup の graph の部分を 2-skeleton として定義し，その諸性質について考察する。

定義

有限集合、V_1, V_2, U が与えられており，bipartite graph Γ_i を odd vertices の集合が V_i，even vertices の集合が U とする、undirected で multi-edge を認めるものとする。$(i=1,2)$ このとき，(Γ_1,Γ_2) が 2-skeleton であるとは、

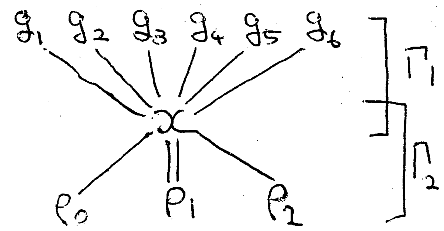
$$\# N^{(1)}_{xy} = \# N^{(2)}_{xy} \qquad \text{for } \forall x, y \in U$$

但し $N^{(i)}_{xy} = \{(\xi,\eta)\in E(\Gamma_i)\times E(\Gamma_i) \mid U(\xi)=x,\ U(\eta)=y,\ V_i(\xi)=V_i(\eta)\}$

$U(\xi)$ は edge ξ の U 側の点; $V_i(\xi)$ についても同様

をみたすときをいう。

例 1)

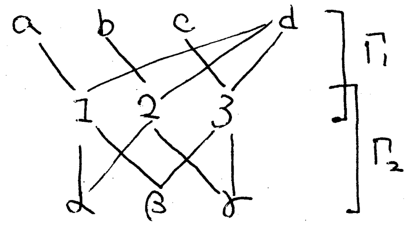


$V_1=\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6\}$

$U=\{x\}$

$V_2=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2\}$

2)

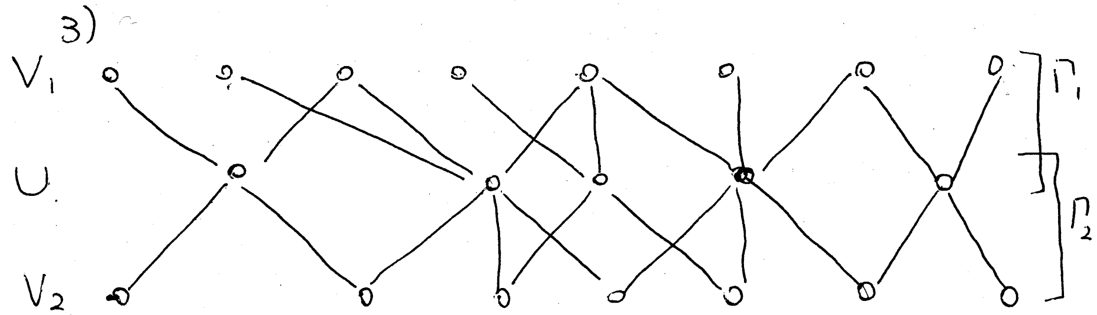


$V_1=\{a,b,c,d\}$

$U=\{1,2,3\}$

$V_2=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2\}$

3)



以下 体kを固定する。

いま $A(\Gamma_i)$をΓ_iの隣接行列とし、$A(\Gamma_i)$のindexをV_i, Uの順序で並べるとき、Γ_iはbipartite graphなので、次の様になる。

$$A(\Gamma_i)=\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} O & {}^tA_{\Gamma_i} \\ \hline A_{\Gamma_i} & O \end{array}\right) & \begin{array}{c} V_i \\ U \end{array} \\ \begin{array}{cc} V_i & U \end{array} & \end{array}$$

但し、A_{Γ_i}は$A(\Gamma_i)$の$U\times V_i$-部分行列とする、$(i=1,2)$.

このとき、

$$S:=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} O & {}^tA_{\Gamma_1} & \\ \hline A_{\Gamma_1} & O & O \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & I_{V_2} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} V_1 \\ U \\ V_2 \end{array} \qquad T:=\left[\begin{array}{c|c|c} I_{V_1} & \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hline & O & A_{\Gamma_2} \\ \cline{2-3} O & {}^tA_{\Gamma_2} & O \end{array}\right]\begin{array}{c} V_1 \\ U \\ V_2 \end{array}$$

とする。但し I_{V_i}は$|V_i|\times|V_i|$-単位行列。

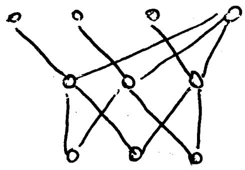
命題.1. 次の(1)〜(3)は同値である,

(1) (Γ_1, Γ_2) は 2-skeleton

(2) $STS = TST$

(3) $^\exists X \in Mat_{|V_1|,|V_2|}(k)$ s.t. $A_{\Gamma_1}X = A_{\Gamma_2}$, $A_{\Gamma_2}{}^tX = A_{\Gamma_1}$.

例. (Γ_1, Γ_2) を



とするとき

$$A_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき $X = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ とおくと,

$A_{\Gamma_1}X = A_{\Gamma_2}$, $A_{\Gamma_2}{}^tX = A_{\Gamma_1}$ となる。

定理.2 (Γ_1, Γ_2) を 2-skeleton とする。$\#V_1 \leqq \#V_2$ のとき, 次が成り立つ。

(1) $\det(xI - A(\Gamma_2)) = x^{\#V_2 - \#V_1}\det(xI - A(\Gamma_1))$.

(2) $^\forall \beta \in Spec_k^{\times}(A(\Gamma_i)) :=$ k 上 $A(\Gamma_i)$ の non-zero 固有値の集合 $(i=1,2)$ に対して $v_\beta^{(i)}$ を β の $A(\Gamma_i)$ に対する固有ベクトルとする。このとき,

$$\exists v_\beta^{(1)}, \exists v_\beta^{(2)} \quad \text{s.t.} \quad v_\beta^{(1)}(x) = \lambda v_\beta^{(2)}(x) \quad \text{for } \exists \lambda \in k \quad \forall x \in U.$$

この定理の(1)は、2-skeleton を成す(Γ_1, Γ_2)に対して$A(\Gamma_1)$と$A(\Gamma_2)$の non-zero 固有値は重複度も含めて一致することを表している。また(2)の結果において固有値$\beta(\neq 0)$の各々の固有ベクトルをうまく取ることで

$$\begin{aligned} \mu : V_1 \cup V_2 \cup U &\longrightarrow k \\ x &\longmapsto \mu(x) = \begin{cases} v_\beta^{(1)}(x) & x \in V_1 \cup U \\ \lambda v_\beta^{(2)}(x) & x \in V_2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる μ が定義できる。よって 2-skeleton 上で crossing symmetry, unitarity そして flat な connection を考えることができる。

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\Gamma_1} & U \\ {\scriptstyle \Gamma_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_2} \\ U & \xrightarrow[\Gamma_2]{} & V_2 \end{array}$$

尚、ここでは紙数の都合上から細部にふれることが出来なかった。参考文献を含め、詳しいことは、現在準備中の論文を参照していただきたい。

（付記）この仕事のきっかけとなったのは、1991年の春に筑波の高エネルギー物理学研究所で行なわれたOcneanu理論の勉強であった。その時、講師を引き受けて下さった東大の河東泰之氏に感謝する。