数理解析研究所講究録
第794巻 1992年 208-214

On automorphisms of Hadamard tounaments

伊藤 昇 Noboru Ito

名城大学理工学部数学科

1. アダマールトーナメントとは2重正則完全単向グラフのことである。Tを位数$4\lambda+3$, 正則次数$2\lambda+1$, 2重正則次数λのアダマールトーナメントとする。Tは完全単向なので、Tの自己同型対応σの位数は奇数である。まず$\sigma \neq 1$のときの固定点の個数$f(\sigma)$の最大値を考えたい。Tは対称2-デザイン(アダマール2-デザイン)ともみなせるので、$f(\sigma) \leqq 2\lambda+1$というFeitの定理があることに注意する

命題1. $f(\sigma) \leqq \lambda$.

証明. $\sigma \neq 1$なので、u, $u\sigma$, $u\sigma^2$が異なるという点uがある。Tの点をこの3点の外近傍のいくつかにふくまれているかにより分類し、かぞえる a_iでi個の外近傍にふくまれている点の個数とする$(0 \leqq i \leqq 3)$.

$$\begin{cases} 4\lambda+3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ 3(2\lambda+1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ 3\lambda = a_2 + 3a_3 \end{cases}$$

これから $3(\lambda+1)=a_1+a_2$, $\lambda=4\lambda+3-3(\lambda+1)=a_0+a_3\geq f(\sigma)$.

命題2. $f(\sigma)=\lambda$ なら $|\sigma|=3$

証明. $|\sigma|>3$ としてみる. u, $u\sigma$, $u\sigma^2$, $u\sigma^3$ が異なるという点 u がある. T の点をこの4点の外近傍のいくつかにふくまれているかにより分類し, かぞえる. また a_i で i 個の外近傍にふくまれている点の個数とする $(0\leq i\leq 4)$

$$\begin{cases} 4\lambda+3=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4 \\ 4(2\lambda+1)=a_1+2a_2+3a_3+4a_4 \\ 6\lambda=a_2+3a_3+6a_4 \end{cases}$$

これから $a_0+a_3+3a_4=2\lambda-1$ を得る. 同じことを内近傍についてもする. そのとき b_i で i 個の内近傍にふくまれている点の個数とする $(0\leq i\leq 4)$. 同じく

$$b_0+b_3+3b_4=2\lambda-1.$$

$a_4=b_0$, $a_0=b_4$ であるから,

$$4(a_0+a_4)+a_3+b_3=4\lambda-2$$

を得る. したがって $f(\sigma)\leq a_0+a_4=\lambda-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(a_3+b_3)<\lambda$ が得られてしまう.

例: $\lambda=1$ のときつぎの様なアダマールトーナメント T_1 がある. $7\to 1, 2, 4$; $1\to 2, 3, 5$; $2\to 3, 4, 6$; $3\to 4, 5, 7$; $4\to 1, 5, 6$; $5\to 2, 6, 7$;

6 → 1, 3, 7. このとき $\sigma_1 = (2, 3, 5)(4, 7, 6)$ は T_1 の自己同型対応で, $f(\sigma_1) = 1 = \lambda$ である.

これを基にして, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{i+1} = 2\lambda_i + 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ とおくとき $f(\sigma_i) = \lambda_i$ という自己同型対応を持つパラメータ $(4\lambda_i + 3, 2\lambda_i + 1, \lambda_i)$ のアダマールトーナメント T_i が inductive に構成される.

A_i, P_i で T_i, σ_i の表現（隣接行列, 置換行列）とする.

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} A_i^t & 0 & J_i - A_i \\ j_i & 0 & 0 \\ A_i^t & j_i^t & A_i \end{pmatrix},$$

$$P_{i+1} = \begin{pmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P_i \end{pmatrix}$$

とおくとよい. ここで j_i, J_i は サイズ $4\lambda_i + 3$ の全1ベクトル, 全1行列, また t は転置である.

命題 $i \geq 2$ のとき T_i と T_i の逆 (converse) とは等価でない. また σ_i の固定点の集合もアダマールトーナメントを作る.

証明は略する

質問. $f(\sigma) = \lambda$ ということから, λ odd とか $\lambda \not\equiv 2 \pmod 3$ とか出て来ないだろうか. また上のと非等価な実例はあるのだろうか ??

2. アダマールトーナメントはアダマール2-デザイン $D=(P,B)$ における次の様な写像 $\tau: P \to B$ であるともみなされる．(1) $\forall a \in P$ について $a \notin a\tau$．(2) $\forall a \neq b \in P$ について $b \in a\tau$ ならば $a \notin b\tau$ ((c,d)，$d \in c\tau$) をアークとする)．そこで次の質問が出て来る．1つよりも多くの τ があったとき，それらはすべて等価であろうか？

命題3．(i) τ を D のアダマールトーナメント，σ を D の自己同型対応とすると，$\sigma^{-1}\tau\sigma$ も D のアダマールトーナメントで，τ と等価である．(ii) τ_2 が τ_1 と等価なアダマールトーナメントならば $\exists \sigma \in \mathrm{Aut}(D)$；$\tau_2 = \sigma^{-1}\tau_1\sigma$．

証明．(i) 明らかと思う．(ii) τ_2 が τ_1 と等価なら，$\exists \sigma \in \mathrm{Sym}(P)$ で $a \to b$ (in τ_1) なら $a\sigma \to b\sigma$ (in τ_2)．$\{b; a \to b \text{ (in } \tau_1)\}$，$\{b\sigma; a\sigma \to b\sigma \text{ (in } \tau_2)\}$ はいずれも D のブロックであるから，$\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ であり，$(a\sigma)\tau_2 = (a\tau_1)\sigma$．したがって $\tau_2 = \sigma^{-1}\tau_1\sigma$．

仮定．D は2つのアダマールトーナメント τ_1，τ_2 を持つとする．

τ_1 の隣接行列を A とすると，τ_2 の隣接行列は QA，$Q \in \mathrm{Sym}(P)$ の形となる．等価のもとでは Q に対応する置換 σ について $\sigma = (1, 2, \ldots, l_1)(l_1+1, l_1+2, \ldots, l_1+l_2)$

$\cdots (l_1+l_2+\cdots+l_{r-1}+1, \cdots, l_1+l_2+\cdots+l_{r-1}+l_r)$

としてよい。これにしたがって

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_r \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

と分割する。Q_i は $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の形の置換行列である。

主張1. l_i はすべて奇数である $(1 \leq i \leq r)$

証明. 記号を見易くするため $A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{pmatrix}$

とおく。$Q_i A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{l1} & \cdots & a_{ll} \\ a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l-1\,1} & \cdots & a_{l-1\,l} \end{pmatrix}$ となる。これらは

トーナメント（アダマールとは限らない）の隣接行列である。

とくに $i \neq j$ のとき

(*) $\quad a_{i-1,j} + a_{j-1,i} = 1$

が成立する。

$l = 2m$ とし，逆対角線上の成分を考察する。(*) から

$$a_{s,2m-s} + a_{2m-s-1,s+1} = 1$$

がいつでも成立する $(s+1 \neq 2m-s)$。$a_{2m,2m} =$

$a_{1,2m-1} = \cdots = a_{m-1,m+1} = 0$ となる。しかし (*)

によると $a_{m-1,\,m+1} + a_{m,\,m} = 1$ なので等値である.

主張2. A_{ii} は上の記号で $a_{11} = 0$, $a_{1,\,2i} = 0$, $a_{1,\,2i+1} = 0$, $1 \leq i \leq m$, $l = 2m + 1$ (主張1) できまる circulant である.

証明. (*)からすぐ出て来る.

つぎに $i \neq j$ のときの A_{ij} を考察する. $A_{ij} + A_{ji}^{t} = J$ であるから $i < j$ のときだけしらべればよい。記号を易しくするため $i = 1$, $j = 2$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1,\,l_1+1}, & \cdots, & a_{1,\,l_1+l_2} \\ \vdots & & \\ a_{l_1,\,l_1+1}, & \cdots, & a_{l_1,\,l_1+l_2} \end{pmatrix}$ とする. QA の方でみると,

$Q_1 A_{12} + (Q_2 A_{21})^{t} = J$ となっている.

主張3. A_{ij}, $i \neq j$, は back-circulant である.

証明. $i = 1$, $j = 2$ とする. すぐ上の等式から

$$a_{i-1,\,l_1+j} + a_{l_1+j-1,\,i} = 1,$$

ただし $1 \leq i \leq l_1$, $1 \leq j \leq l_2$ はそれぞれ mod l_1, mod l_2 でとる. これと $a_{i,\,l_1+j} + a_{l_1+j,\,i} = 1$ とあわせると $a_{i,\,l_1+j-1} = a_{i-1,\,l_1+j}$ が出て来る.

主張4. $d = \gcd(l_i, l_j)$ とすると A_{ij}, $i \neq j$ は周期 d をもつ, すなわち $(1, i)$-成分と $(1, i+d)$-成分は等しい.

証明．やはり $i=1$, $j=2$ とする．主張3の証明で

$$a_{l_1+j,\ i}=a_{l_1+j-1,\ i+1},$$

ここでも $1\le i\le l_1$, $1\le j\le l_2$ でそれぞれ mod l_1, mod l_2 でとる．だから A_{21} も back-circulant である．さて $l_1>l_2$ と仮定し，$l_1=g_1 l_2+r_1$, $0\le r_1\le l_2-1$ とする．$r_1=0$ のときは見易い。$r_1>0$ のとき $a_{2,\ g_1l_2+r_1}=a_{1,\ l_1+1}$ なので $A_{1,2}$ の最后 r_1 列も back-circulant．これをつづける。

注意．σ のサイクルが多いと，これだけでは A, QA の等価性をしらべるのには不充分に思える．