数理解析研究所講究録
第 795 巻 1992 年 8-32

小さな非線型境界条件をもつ反応拡散方程式に対する inertial manifold の存在と応用

龍大 理工学部 森田 善久 (Yoshihisa Morita)
京大 理学部 二宮 広和 (Hirokazu Ninomiya)
東工大 理学部 柳田 英二 (Eiji Yanagida)

1 Introduction

近年，あるクラスの非線型発展方程式の時間大域的挙動を調べるために inertial manifold と呼ばれるものの研究が数多く報告されている．この inertial manifold とは

- 有限次元リプシッツ多様体である，
- flow に沿って（正の向きに）不変である，
- あらゆる解を指数的にひきつける，
- アトラクターを含んでいる

を満たすもののことである．第 2 の条件より，もとの方程式をこの多様体の上に制限した方程式を考えることができる．これを inertial form と呼ぼう．第 1 の条件をより，inertial form は有限次元系で，もとの方程式の解の挙動の本質的な部分は，この多様体の上に制限した常微分方程式（ inertial form ）に受け継がれることは，3 番目の条件が保証している．歴史的には，Navier-Stokes 方程式のような方程式はアトラクターをもつだけでなく，その次元が（ Hausdorff の意味で）有限であることも知られるようになった．次に自然に考えられる「アトラクター，あるいは，それを含む集合の上での解の挙動は，常微分方程式で記述できるか？」という問いに答えたものである（ Foias, Sell, Temam [10] ）．

この概念より前に不安定多様体や中心多様体と呼ばれる不変多様体が考えられていた（参照 Carr [2] Henry [14]）．不安定多様体や中心多様体はひとつの解，例えば，定常解の近傍で（局所的に）作られた．これに対し，inertial manifold はアトラクターを含むように大域的に作られる点で大きく異なる．

存在定理についての研究は，数多く Temam [22], Ninomiya [21] 及びその参考文献を参照して頂きたい（注意 2.3 を参照のこと）．

反応拡散方程式の時間大域的な挙動をこの方面から取り扱った研究を紹介しよう．まず，Conway, Hoff, Smoller [6] が挙げられる．彼らは，inertial manifold に先駆けて，次の反応拡散系を常微分方程式で近似した．

$$
\begin{cases}
u_t = D\Delta u - u + F(u) & (x \in \Omega, t > 0), \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & (x \in \partial\Omega, t > 0), \\
u(0,x) = u_0(x) & (x \in \Omega).
\end{cases} \tag{1.1}
$$

ここで $D = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \cdots, d_m)$ $(d_j > 0)$，

$$
u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},
$$

さらに $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ とする．A は

$$
D(A) = \{u \in H^2(\Omega; \mathbf{R}^m); \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega)\}
$$

を定義域にもつ

$$
A = -D\Delta + I
$$

という作用素とする．A は自己共役作用素で，A^{-1} がコンパクトな作用素な

ので，その固有値 λ_j と，対応する固有関数 ϕ_j が存在する．つまり，

$$
\begin{aligned}
&A\phi_j = \lambda_j\phi_j,\\
&1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \leq \lambda_{m+2} \leq \cdots,\\
&(\phi_j, \phi_k) = \delta_{j,k}.
\end{aligned}
$$

このとき，1 でない最小固有値 λ_{m+1} が 1+ ”F のリプシュッツ定数” より大きいなら， inertial manifold は $\phi_1, \cdots, \phi_m$ で張られる線型空間で，inertial form は $v \in \mathbf{R}^m$ についての常微分方程式

$$
v_t = F(v) - v, \tag{1.2}
$$

となる．つまり，もとの方程式は空間一様な解によって指数的に近似できる．

Conway, Hoff, Smoller が考えたケースは F が小さいか，拡散係数が大きいという仮定が必要となる．次に F がもっと大きい場合を考えよう．Maret-Pallet, Sell は同じ方程式について，非線型項 F によってある固定された定数 C_F（リプシュッツ定数のようなもの）が決定され，これに対し

$$
\lambda_{N+1} - \lambda_N > C_F \tag{1.3}
$$

となる整数 N がとれるとき，N 次元の inertial manifold が存在することを示した．(1.3) は spectral gap 条件と呼ばれている．

Maret-Pallet, Sell が扱ったような Neumann 境界条件をもつ反応拡散方程式に小さな非線形摂動を加えて，非線形境界条件をもつ反応拡散方程式の大域的挙動を調べる．我々は次の方程式を考える．

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
u_t & = D\Delta u - u + F(u) & (\ x \in \Omega, t > 0\ ),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = \epsilon G(u) & (\ x \in \partial\Omega, t > 0\ ),\\
u(0,x) & = u_0(x) & (\ x \in \Omega\ ),
\end{array}
\right. \tag{1.4}
$$

ここで ϵ は非負のパラメータ．局所解の存在については，Friedman [12] 参照．我々は解が時間大域的に拡張できるのみならず，大域的アトラクター（最大

コンパクト不変集合）が存在して，$L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ で ϵ に依らず有界であることを仮定する．関数 F,G が $\mathbf{R}^m$ の領域

$$\{u\in\mathbf{R}^m;|u|<R\}$$

の外で

$$F(u)=0,G(u)=0 \qquad (|u|\geq R) \tag{1.5}$$

を仮定する．この仮定は $L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ で有界なアトラクターが存在するということから，大域的な挙動にのみ興味を持つときは上のような関数の修正は影響を与えない．

上の方程式の挙動を inertial manifold を用いて調べたいのだが，我々が扱おうとしている方程式 (1.4) は，今までの inertial manifold の理論にのらない．また解が定数変化法で表せないので，方法としては Lyapunov-Perron の方法 (c.f. [22]) より Hadamard のグラフ変換法 (c.f. [17]) を使って構成する．このとき Maret-Pallet, Sell のときと同じように spectral gap 条件と呼ばれる A の固有値と非線型項 Fに対す次の条件を仮定する．

$$\lambda_{N+1}-\lambda_N>C_{F,R} \tag{1.6}$$

ここで $C_{F,R}$ は F,R に依存する定数で，ϵ や G には依らない．この N に対して

$$P:u\longrightarrow\sum_{j=1}^N(u,\phi_j)\phi_j, \qquad Q=I-P$$

で $L^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$ 上の射影作用素を定義する．

これらの仮定の下で，ϵが十分小さければ，方程式 (1.4) に対して次の結果を得る．

定理 1.1. *Spectral gap* 条件の仮定のもと，十分小さい ϵ に対して C^1-*inertial manifold* $\mathcal{M}_\epsilon$ が存在して次を満たす．

- $\mathcal{M}_\epsilon =$ *graph* Φ_ϵ. ここで,Φ_ϵは $PH^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$ から $QH^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$ への C^1-関数．

- 任意の解 $u(t)$ に対して，ある t_0 と解 $v(t) \in \mathcal{M}_\epsilon$ が存在して

  $$\|u(t)-v(t)\|_{H^2(\Omega;\mathrm{R}^m)} \le C\|u(t_0)-v(t_0)\|_{H^2(\Omega;\mathrm{R}^m)} e^{-\gamma(t-t_0)} \qquad (t \ge t_0)$$

  が成り立つ．ここで γ は正の定数．

- $\epsilon \to 0$ のとき，$p \in PH^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$ について一様に

  $$\Phi_\epsilon(p) = \Phi_0(p) + O(\epsilon^{1+\delta}),$$
  $$\frac{\partial}{\partial p}\Phi_\epsilon(p) = \frac{\partial}{\partial p}\Phi_0(p) + O(\epsilon^{\delta}),$$

  ここで δ はある正の定数で，考えている位相は $H^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$．

この定理の証明は次節で概要を与える．

上の定理だけでは解が有限次元系のように振る舞うということしか言えない．そこで，inertial form を調べることになる．Inertial form を計算すると，

$$p_t + Ap = PF(p+\Phi_\epsilon(p)) + \epsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} DG(p+\Phi_\epsilon(p))\phi_j dS \phi_j \tag{1.7}$$

となる．一般には inertial manifold の形がどうなるかわからないので inertial form からも解の大域的挙動についての情報を期待できない．そこで挙動についての更に進んだ情報が得られる次のような系が上の定理の特殊な場合として成り立つ．

系 1.1 $N=m$ として定理の仮定を満たすものとする．を満たすと仮定する．このとき，*m* 次元 *C^1-inertial manifold* が存在して，*inertial form* は次のようになる．

$$p_t + Ap = F(p) + \epsilon\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}DG(p) + \epsilon R(D,\epsilon,p) \tag{1.8}$$

ここで，剰余項 $R(D,\epsilon,p)$ は p について C^1 関数．さらに ϵ についての評価としては次が成り立つ．

$$\begin{aligned} |R(D,\epsilon,p)| &= O(\epsilon), \\ |\frac{\partial R}{\partial p}(D,\epsilon,p)| &= O(\epsilon^\delta). \end{aligned}$$

この系を使って，非線型境界条件が解の大域的挙動に大きな影響を与える例を §3 であげよう．

注意 **1.1** $L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ で一様に有界なアトラクターが無くても，$L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ で ϵ について一様に有界な集合上の挙動にだけ注目するなら，同じように関数を修正すれば上の定理は適用できる．

2 ．定理の証明の概要

この節ではいくらかの記号の説明と証明の方針・アイデアを中心に述べる．先に述べたように，この問題では Lyapunov-Perron の方法より，Hadamard のグラフ変換法の方が適切であると思われる．グラフ変換法を適用するとき，解そのものの持つ性質 — Cone Property — が重要な働きを果たす (STEP 4, 5)．この場合，非線型境界条件のため $H^2(\Omega;\mathbf{R}^m)$ で Cone Property を示さなくてはならないことがこの問題を複雑にしている．

STEP 1: 準備

ここでは，後で必要になるいくつかの不等式を準備する．まず，複雑を避けるため次のように簡略化する．

$$L^p = L^p(\Omega;\mathbf{R}^m), \quad W^{k,p} = W^{k,p}(\Omega;\mathbf{R}^m),$$

特に $p=2$ のとき

$$H^k = H^k(\Omega;\mathbf{R}^m) = W^{k,2}(\Omega;\mathbf{R}^m).$$

更に L^2-ノルムを

$$\|u\| = \|u\|_{L^2} \qquad (u \in L^2).$$

と書く．境界上の関数についても $L^p(\partial\Omega;\mathbf{R}^m)$, $W^{k,p}(\partial\Omega;\mathbf{R}^m)$ 及び $H^k(\partial\Omega;\mathbf{R}^m)$ を

$$L^p(\partial\Omega)=L^p(\partial\Omega;\mathbf{R}^m), W^{k,p}(\partial\Omega)=W^{k,p}(\partial\Omega;\mathbf{R}^m), H^k(\partial\Omega)=H^k(\partial\Omega;\mathbf{R}^m),$$

と書くことにし，そのノルムをそれぞれ

$$\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)},\quad \|\cdot\|_{W^{k,p}(\partial\Omega)},\quad \|\cdot\|_{H^k(\partial\Omega)},$$

で表す．作用素 $\tilde{A}$ を定義域 $D(\tilde{A})=H^2$ 上

$$\tilde{A}=-D\Delta+I,$$

で定義されたものとする．A は Introduction で定義された自己共役作用素とする．すると

$$\tilde{A}u=Au,\qquad u\in D(A).$$

次のように $(\cdot,\cdot)_1, \|\cdot\|_1$ を定義する:

$$(u,v)_1=(D^{\frac{1}{2}}\nabla u, D^{\frac{1}{2}}\nabla v)+(u,v),\qquad u,v\in H^1,$$
$$\|u\|_1=(u,u)_1^{\frac{1}{2}}.$$

このとき $\|\cdot\|_1$ は H^1-space と同じ位相を定義する．$1\le n\le 3$ なので

$$D(A^s)=H^{2s},\qquad s\le\frac{3}{4},$$

特に $D(A^{\frac{1}{2}})=H^1$ で次が成り立つ:

$$\|u\|_1=\|A^{\frac{1}{2}}u\|,\qquad u\in D(A^{\frac{1}{2}}).$$

Sobolev の不等式と Trace の理論を用いることにより

$$\begin{aligned}
\|\tilde{A}u\|^2 &= \textstyle\int_\Omega(-D\Delta u+u)^2dx \\
&= \|D\Delta u\|^2+\|u\|^2-\textstyle\int_\Omega(D\Delta u\cdot u+u\cdot D\Delta u)dx \\
&\geq \|D\Delta u\|^2+\|D^{\frac{1}{2}}\nabla u\|^2+\|u\|^2-2\|D\frac{\partial}{\partial\nu}u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\geq \|D\Delta u\|^2+\|D^{\frac{1}{2}}\nabla u\|^2+\|u\|^2-C\|u\|_{H^{\frac{3}{2}}}\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \\
&\geq C_1\|u\|_{H^2}^2-C_2\|u\|_{H^2}\|u\| \\
&\geq \frac{1}{2}C_1\|u\|_{H^2}^2-\frac{C_2^2}{2C_1}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

次に，A 及び $\tilde{A}$ の定義から容易に従う次の補題を用意する．

補題 2.1 $u,v\in H^2$ に対して，

(i) $C^{-1}\|u\|_{H^2}\leq\|\tilde{A}u\|+C\|u\|\leq C\|u\|_{H^2}$,

(ii) $(u,\tilde{A}v)+\int_{\partial\Omega}uD\frac{\partial v}{\partial\nu}dS=(u,v)_1=(\tilde{A}u,v)+\int_{\partial\Omega}vD\frac{\partial u}{\partial\nu}dS$,

(iii) $\|A^sPu\|\leq\lambda_N^s\|Pu\| \qquad (s\leq 1)$,

(iv) $\|u\|_1=\|A^{\frac{1}{2}}Qu\|\geq\lambda_N^{\frac{1}{2}}\|Qu\|$,

(v) $\|u\|_{W^{k,p}}\leq C(\|\tilde{A}u\|_1^\theta+\|u\|^\theta)\|u\|^{1-\theta} \qquad (k-\frac{n}{p}+\frac{n}{2}\leq 3\theta\leq 3)$,

(vi) $\|u\|_{L^\infty}\leq C\|\tilde{A}u\|+C\|u\|$,

(vii) $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\leq C\|u\|_1$.

STEP 2: H^2 有界な absorbing 集合の存在

ここで，absorbing 集合とは，次のような集合を指す．任意の初期値 u_0 に対して，ある t_0 が存在して

$$S(t)u_0\in\mathcal{B} \qquad (t\geq t_0)$$

となる集合 $\mathcal{B}$ のことを指す．

方程式 (1.4) に対して，H^2-有界な absorbing 集合の存在を示そう．方程式 (1.4) と u との内積をとって，部分積分を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 &= -(\tilde{A}u,u)+(F(u),u)\\ &\le -\|u\|_1^2+\epsilon|DG|\ |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}+|F|\ |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u\|\\ &\le -\frac{1}{2}\|u\|_1{}^2+\frac{1}{2}R_0^2,\end{aligned}$$

ここで R_0 は正の定数．上の不等式より

$$\mathcal{B}_0=\{u\in H^2;\ \|u\|\le R_0\}$$

は L^2 有界な absorbing 集合となる．H^2-ノルムで考えてみよう．同じようにして

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{A}u\|^2 = &\ -(\tilde{A}^2u,\tilde{A}u)+(\tilde{A}F(u),\tilde{A}u)\\ = &\ -\|\tilde{A}u\|_1^2+\textstyle\int_{\partial\Omega}\tilde{A}uD\frac{\partial}{\partial\nu}\tilde{A}udS\\ &+(D\Delta F(u),\tilde{A}u)+(F(u),\tilde{A}u)\\ = &\ -\|\tilde{A}u\|_1^2+\textstyle\int_{\partial\Omega}\tilde{A}uD\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(-u_t+F(u)\Big)dS\\ &+(DF'(u)\Delta u,\tilde{A}u)+(DF''(u)|\nabla u|^2,\tilde{A}u)+(F(u),\tilde{A}u)\\ \le &\ -\|\tilde{A}u\|_1^2+\textstyle\int_{\partial\Omega}\tilde{A}uD\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(-u_t+F(u)\Big)dS\\ &+C|F'|(\|\tilde{A}u\|+\|u\|)\|\tilde{A}u\|+C|F''|\|u\|_{W^{1,4}}^2\|\tilde{A}u\|+C|F|\|\tilde{A}u\|.\end{aligned}$$

補題 2.1 を使って，

$$\|u\|_{W^{1,4}}\le C(\|\tilde{A}u\|_1^{\frac{7}{12}}+\|u\|^{\frac{7}{12}})\|u\|^{\frac{5}{12}},$$

$$\|\tilde{A}u\|\le C(\|\tilde{A}u\|_1^{\frac{2}{3}}+\|u\|^{\frac{2}{3}})\|u\|^{\frac{1}{3}}.$$

上の不等式と u が $\mathcal{B}_0$ の元であることより，

$$\|u\|_{W^{1,4}}^2\|\tilde{A}u\|\le C(\|\tilde{A}u\|_1^{\frac{11}{6}}+1).$$

積分項は

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(-u_t+F(u))=-\epsilon G'(u)u_t+F'(u)\frac{\partial u}{\partial\nu},$$

のように評価され

$$\begin{aligned}
&|\textstyle\int_{\partial\Omega}\tilde{A}u \quad D\frac{\partial}{\partial\nu}(-u_t+F(u))dS| \\
&\quad\le \epsilon\|u\|_{H^2(\partial\Omega)}(|DG'|\ \|-\tilde{A}u+F(u)\|_{L^2(\partial\Omega)}+|DF'|\ |G|) \\
&\quad\le C\epsilon(\|\tilde{A}u\|_1^2+1) \\
&\quad\le \frac{1}{4}(\|\tilde{A}u\|_1^2+1)
\end{aligned}$$

(但し $\epsilon\ge 0$ は十分小). 従って

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{A}u\|^2\le -\frac{1}{2}\|\tilde{A}u\|_1^2+\frac{1}{2}R_1^2.$$

こうして，次の補題を得る.

補題 2.2 正数 ϵ_0 と *absorbing* 集合 $\mathcal{B}_1$ が存在して,

$$\mathcal{B}_1=\{u\in H^2;\ \|u\|\le R_0,\quad \|\tilde{A}u\|\le R_1\}\qquad(\epsilon\le\epsilon_0),$$

ここで R_1 定数で，$\epsilon\in[0,\epsilon_0]$ について一様にとれる.

STEP 3: 方程式の修正

STEP 1 で見たように H^2-absorbing 集合をもつので，大域的挙動にのみ興味を持つときは absorbing 集合上の挙動にのみ注目すればよい. $\mathcal{B}_1$ の外で方程式を修正する. まず，次のような R' をとる:

$$\mathcal{B}_1\subset\{u=p+q\in H^2;\|Ap\|^2+\|q\|_1^2\le R'^2\}.$$

もとの方程式の代わりに次のような方程式を考える.

$$(2.1)\qquad \begin{cases} p_t+Ap &= f_1(p+q),\\ q_t+\tilde{A}q &= f_2(p+q),\\ \dfrac{\partial q}{\partial\nu} &= \epsilon g(p+q),\end{cases}$$

ここで

$$\begin{cases} f_1(p+q) & = \chi(\|Ap\|^2 + \|q\|_1^2)\left\{PF(p+q) + \sum_{j=1}^N \epsilon \int_{\partial\Omega} DG(p+q)\phi_j dS\phi_j\right\}, \\ f_2(p+q) & = \chi(\|Ap\|^2 + \|q\|_1^2)F(p+q) - f_1(p+q), \\ g(p+q) & = \chi(\|Ap\|^2 + \|q\|_1^2)G(p+q), \end{cases}$$

で χ は滑らかな関数で

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & (0 \le r \le R^2), \\ 0 & (r \ge 4R^2). \end{cases}$$

を満たすものとする．この修正した方程式 (2.1) についても，absorbing 集合が存在することが同じようにわかる．その上，H^4-有界な absorbing 集合の存在も言える．この証明は STEP 1 とほぼ同様の計算をすればいいので省略する．

命題 2.1 方程式 *(2.1)* に対して，次のような *absorbing* 集合 $\mathcal{B}_2$ ($\supset \mathcal{B}_1$) が存在する：

$$\mathcal{B}_2 = \{u = p + q \in H^2;\ \|u\| \le R_2, \|\tilde{A}u\| \le 2R_1\}.$$

その上 $R_3 > 0$ が存在して，

$$\mathcal{B} = \{u = p + q \in H^4;\ \|u\| \le R_2, \|\tilde{A}u\| \le 2R_1, \|\tilde{A}^2 q\| \le R_3\}$$

が H^4-*absorbing* 集合 になる．ここで R_3 は 十分大きな N によらない．

STEP 4: Cone Property

次の概念と補題を用意する．$\Pi, \mathcal{C}$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} \Pi &= \{(X,Y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le X, 0 \le Y\}, \\ \mathcal{C} &= \{(X,Y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le X \le Y\}. \end{aligned}$$

定義 2.1 $\mathcal{C}$ と Π 上の曲線族

$$\left\{\Gamma_\sigma;\ \Gamma_\sigma = \{(X_\sigma(t), Y_\sigma(t)\}_{t_1 \le t \le t_2} \text{ は } \Pi \text{ 上の軌道},\ \sigma \in \Sigma\right\}$$

が *Cone Property* をもつとは

(i) $(X(t_0), Y(t_0)) \in \mathcal{C}$ $(t_1 \le t_0 \le t_2)$ なら，$(X(t), Y(t)) \in \mathcal{C}$ $(t_1 \le t \le t_0)$ で

$$Y(t) \le Y(s)e^{-\gamma(t-s)} \qquad (t_1 \le s \le t \le t_0)$$

が成り立つ．

(ii) $(X(t_0), Y(t_0)) \notin \mathcal{C}$ $(t_1 \le t_0 \le t_2)$ なら，$(X(t), Y(t)) \notin \mathcal{C}$ $(t_0 \le t \le t_2)$．

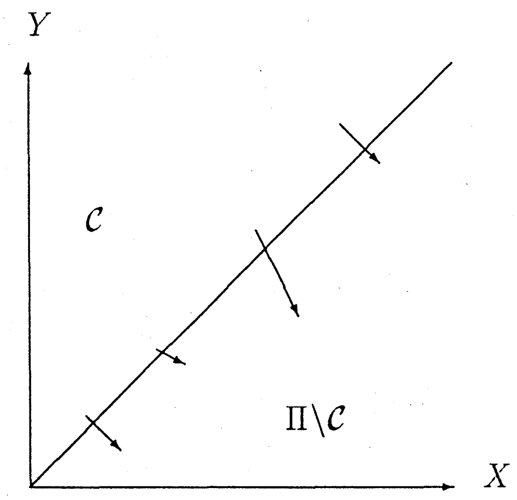

Figure 1: Cone Property

注意 2.1 *(ii)* は $\Pi\backslash\mathcal{C}$ が正の向きに不変であることを意味している．

命題 2.2 2つの解 $u_1(t), u_2(t)$ が $t_1 \le t \le t_2$ で $\tilde{\mathcal{B}}$ に入っているとき，

$$X(t) = \|AP(u_1(t) - u_2(t))\|, Y(t) = \|\tilde{A}Q(u_1(t) - u_2(t))\|$$

とおくと，*Cone Property* を満たす．ここで $\tilde{\mathcal{B}}$ とは

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{p + q \in H^4;\ \|\tilde{A}^2 q\| \le 2R_3\}$$

で定義される集合とする．

（詳しくは [21] などを参照）．この証明において，我々は spectral gap 条件を用いる．さらに正定数 γ は λ_{N+1}, λ_N に依存することを注意しておく．

Proof. $u_1(t), u_2(t)$ を任意の 2 つの解とするとき，

$$p_j(t) = Pu_j(t), \qquad q_j(t) = Qu_j(t) \qquad (j = 1, 2),$$

とおき，

$$p(t) = p_1(t) - p_2(t), \qquad q(t) = q_1(t) - q_2(t)$$

と定義する．(2.1) より，$p(t)$ と $q(t)$ は

$$\begin{cases} p_t + Ap &= f_1(p_1 + q_1) - f_1(p_2 + q_2), \\ q_t + \tilde{A}q &= f_2(p_1 + q_1) - f_2(p_2 + q_2), \\ \dfrac{\partial q}{\partial \nu} &= \epsilon g(p_1 + q_1) - \epsilon g(p_2 + q_2). \end{cases}$$

を満たす．$\tilde{A}$ を上の方程式に作用させて，$Ap, \tilde{A}q$ とそれぞれ内積をとると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Ap\|^2 \ge -\|A^{\frac{3}{2}}p\|^2 - \|A(f_1(p_1 + q_1) - f_1(p_2 + q_2))\|\,\|Ap\|, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{A}q\|^2 \le -(\tilde{A}^2 q, \tilde{A}q) + \|\tilde{A}(f_2(p_1 + q_1) - f_2(p_2 + q_2))\|\,\|\tilde{A}q\|.$$

補題 2.1 (iii) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{A}q\|^2 \le\ & -\|\tilde{A}q\|_1^2 + \|\tilde{A}(f_2(p_1 + q_1) - f_2(p_2 + q_2))\|\,\|\tilde{A}q\| \\ & + \int_{\partial\Omega} \tilde{A}qD\frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{A}q dS \\ \le\ & -\|\tilde{A}q\|_1^2 + \|\tilde{A}(f_2(p_1 + q_1) - f_2(p_2 + q_2))\|\,\|\tilde{A}q\| \\ & + \int_{\partial\Omega} \tilde{A}qD\frac{\partial}{\partial \nu}(-q_t + f_2(p_1 + q_1) - f_2(p_2 + q_2))dS. \end{aligned} \tag{2.3}$$

右辺を評価するために，非線型項の評価についての次の補題を用意する．

補題 **2.3**

$$u = p + q \in \mathrm{conv}\ \{u \in H^4;\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \epsilon g(u) \quad (x \in \partial\Omega), \|\tilde{A}^2 q\| \le 2R_3\},$$

$$\rho + \sigma, \tilde{\rho} + \tilde{\sigma} \in \{\rho + \sigma \in H^4;\ \exists v \in H^2\ s.t.\ \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \epsilon \frac{\partial g}{\partial u}(v)(\rho + \sigma) \quad (x \in \partial\Omega)\},$$

を仮定し，H^4 から $L^2(\partial\Omega)$ への写像 h を

$$h(u) = \frac{\partial g}{\partial u}(u)(-\tilde{A}u + f_1(u) + f_2(u)),$$

で定義する．このとき

(i) $\|A\frac{\partial}{\partial u}f_1(u)(\rho + \sigma)\| \le (C + \epsilon C_N)(\|A\rho\| + \|\tilde{A}\sigma\|),$

(ii) $\|\tilde{A}\frac{\partial}{\partial u}f_2(u)(\rho + \sigma)\| \le (C + \epsilon C_N)(\|A\rho\| + \|\tilde{A}\sigma\|),$

(iii) $\|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial u}f_2(u)(\rho + \sigma)\|_{L^2(\partial\Omega)} \le \epsilon C_N(\|A\rho\| + \|\tilde{A}\sigma\|),$

(iv) $\|\frac{\partial}{\partial u}h(u)(\rho + \sigma)\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C_N\Big(\|A\rho\| + \|\tilde{A}\sigma\|_1\Big).$

この証明については省略する．

(2.2) (2.3) の右辺にこの補題 (i)–(iv) を使うことによって

$$(2.4)\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Ap\|^2 & \ge -\lambda_N\|Ap\|^2 - (C + \epsilon C_N)(\|Ap\| + \|\tilde{A}q\|)\|Ap\|, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{A}q\|^2 & \le -\|\tilde{A}q\|_1^2 + (C\|\tilde{A}q\| + \epsilon C_N\|\tilde{A}q\|_1)(\|Ap\| + \|\tilde{A}q\|), \end{cases}$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial \nu}q_t = h(u_1) - h(u_2)$$

に注意する．(2.4) から，十分小さな ϵ と $\mathcal{C}$ の元 $p + q$ に対して，

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Ap\|^2 & \ge -\gamma_1\|\tilde{A}q\|^2, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{A}q\|^2 & \le -\gamma_2\|\tilde{A}q\|^2, \end{cases}$$

が成り立つことがわかる．ここで

$$\gamma_1 = \lambda_N + 2(C + \epsilon C_N), \gamma_2 = \lambda_{N+1} - 2(C + \epsilon C_N \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}).$$

$$C_{F,R} \geq 4C,$$

となるように $C_{F,R}$ をとれば

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\tilde{A}q\|^2 - \|Ap\|^2) \leq -(\gamma_2 - \gamma_1)\|\tilde{A}q\|^2 \leq 0, \tag{2.6}$$

つまり $\mathcal{C}$ は flow の負の向きに不変である．このことと方程式 (2.5) より，命題の主張が従う． $\square$

STEP 5: Inertial manifold の存在

ここでは Hadamard のグラフ変換法と言われる方法に従って証明しよう．この方法は名前にあるように PH^2 という超平面を $S(t)$ で変換して，その極限として inertial manifold を得ようというものである．つまり，

$$\mathcal{M}_{t,\epsilon} = S(t)PH^2$$

とおくと

$$\mathcal{M}_{t,\epsilon} = \text{ graph } \Phi_{t,\epsilon}$$

となる PH^2 から $(I-P)H^2$ への写像 $\Phi_{t,\epsilon}(p)$ が存在して

$$\Phi_{t,\epsilon}(p) \longrightarrow \Phi_\epsilon(p) \qquad (t \to \infty)$$

となることを示そう．

$\|Ap\| \geq 2R'$ に対して

$$f_1(p) = 0, f_2(p) = 0$$

より，

$$\mathcal{M}_{t,\epsilon} \subset \tilde{\mathcal{B}} \quad .$$

従って，$\mathcal{M}_{t,\epsilon}$ の 2 つの解に対して Cone Property が成り立つ．次に $\mathcal{M}_{t,\epsilon}$ がグラフに書けることを示す．そのため写像

$$PS(t) : PH^2 \longrightarrow PH^2$$

が 1 対 1 であることを見よう．$p+q_1, p+q_2 \in \mathcal{M}_s$ とすると，ある $p_1, p_2 \in PH^2$ が存在して，

$$S(s)p_1 = p + q_1,$$
$$S(s)p_2 = p + q_2,$$

を満たす．

$$u_1(t) = S(t)p_1, \qquad u_2(t) = S(t)p_2,$$
$$X(t) = \|AP(u_1(t) - u_2(t))\|, \qquad Y(t) = \|\tilde{A}Q(u_1(t) - u_2(t))\|,$$

として上の補題を用いる．$\mathcal{M}_{t,\epsilon}$ の定義から

$$Y(0) = \|\tilde{A}Q(u_1(0) - u_2(0))| = 0 \ .$$

だから，

$$(X(0), Y(0)) \in \Pi \backslash \mathcal{C}.$$

故に

$$\|\tilde{A}Q(u_1(t) - u_2(t))\| \leq \|AP(u_1(t) - u_2(t))\| = \|A(p-p)\| = 0$$

となり，$PS(t)$ は単射．

次に $PS(t)$ が全射であることを示そう．

$$E(t) = S(t)\{p \in PH^2; \|Ap\| \geq 2R'\}$$

とおく．f_1, f_2 の定義より，上の集合は $t \geq 0$ について単調増加であることがわかる．従って，有限次元空間 PH^2 上の写像

$$p\ (\in PH^2) \longrightarrow PS(t)p\ (\in PH^2)$$

は単射・連続のみならず，proper であることがわかる．領域不変性定理を使うと全射であることも従う．以上より，$\mathcal{M}_{t,\epsilon}$ が PH^2 からのグラフ $\Phi_{t,\epsilon}$ で書けることがわかった．

次に $\Phi_{t,\epsilon}$ が $t \to \infty$ のとき収束することを示そう．$t \geq s \geq 0$ のとき，$p \in E(s)$ に対して

$$\Phi_{t,\epsilon}(p) = \Phi_{s,\epsilon}(p)$$

となっている．一方，$p \in PH^2 \backslash E(s)$ に対しては

$$\|\tilde{A}(\Phi_{t,\epsilon}(p) - \Phi_{s,\epsilon}(p))\| \leq CR_3 e^{-\gamma s} \tag{2.7}$$

が成り立つことを示そう．実際，$\Phi_{t,\epsilon}$ の定義から $p \in PH^2 \backslash E(s)$ に対して

$$p = \Phi_{t,\epsilon}(p_t) = \Phi_{s,\epsilon}(p_s)$$

となる $p_t, p_s \in PH^2$ がとれる．Cone Property より

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}(\Phi_{t,\epsilon}(p) - \Phi_{s,\epsilon}(p))\| \leq& \ \|\tilde{A}Q(S(t)p_t - S(s)p_s)\| \\ \leq& \ \|\tilde{A}QS(t-s)p_t\|\end{aligned}$$

となる．命題 2.1 より

$$\|\tilde{A}QS(t-s)p_t\| \leq CR_3$$

となることがわかる．こうして (2.7) が従う．つまり，

$$\Phi_\epsilon(p) = \lim_{t\to\infty} \Phi_t(p)$$

が存在して，

$$M = \text{ graph } \Phi_\epsilon$$

が inertial manifold になることがわかる． □

注意 2.2 ここで取り上げた方法の他にも証明方法はいくつかある．大きく 3 つに分けられる:

- *Lyapunov-Perron* の方法（ *[3] [9] [10] [18] [20] [21] [22]* ），
- *Hadamard* のグラフ変換法（ *[4] [5] [17]* ），
- *Elliptic regularization* 法（ *[7] [8] [11] [16]* ）．

いろいろな方法で証明を行うということは，*inertial manifold* の近似理論をつくろうとする立場から好ましいと思われる．また *Navier-Stokes* 方程式そのままでは *Cone Property* は満たさないが，新しい変数を導入することによって反応拡散方程式系に埋め込んで，*Navier-Stokes* 方程式に対する *inertial manifold* の存在を示した *[15]* は注目に値する．

STEP 6: C^1 性と収束性

C^1 性の証明は証明の概要にとどめる．

$$\left\{\begin{array}{l} p_t + Ap = f_1(p + \Phi_\epsilon(p)), \\ p(0) = p_0, \end{array}\right. \tag{2.8}$$

の解を $p(t;p_0)$ で表し，

$$q(t;p_0) = \Phi_\epsilon(p(t;p_0)) \tag{2.9}$$

と定義すると

$$\left\{\begin{array}{l} p_t + Ap = f_1(p + q), \\ q_t + \tilde{A}q = f_2(p + q), \end{array}\right. \tag{2.10}$$

を満たす．この方程式の変分をとることにより，

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_t + A\rho = \dfrac{\partial}{\partial u} f_1(p(t;p_0) + q(t;p_0))(\rho + \sigma), \\ \sigma_t + \tilde{A}\sigma = \dfrac{\partial}{\partial u} f_2(p(t;p_0) + q(t;p_0))(\rho + \sigma), \end{array}\right. \tag{2.11}$$

を得る．Φ_ϵ の微分の候補を次のようにしてつくる．まず初期値

$$\rho(0) = \xi, \qquad \sigma(s) = 0$$

を満たす (2.11) の解が存在して，それらを $\rho^s(t;p_0,\xi),\sigma^s(t;p_0,\xi)$ で表す．$s\to-\infty$ のとき，Cone Property より，収束して (2.11) を満たす．これらを $\rho(t;p_0,\xi),\sigma(t;p_0,\xi)$ で表す．

命題 2.3 H^2-関数 $p(t;p_0)$ と $q(t;p_0)$ は $p_0\in PH^2$ について，C^1 関数であり

$$\frac{\partial}{\partial p}p(t;p_0)\xi=\rho(t;p_0,\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial p}q(t;p_0)\xi=\sigma(t;p_0,\xi),$$

を満たす．特に $t=0$ のとき，

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi_\epsilon(p_0)\xi=\sigma(0;p_0,\xi).$$

この命題を証明するのに，ある正数 δ が存在して

$$(2.12)\ \begin{cases}\|A(p(t,p_0+\xi)-p(t,p_0)-\rho(t;p_0,\xi))\| & \le C_N\|A\xi\|^{1+\delta}e^{-2\gamma t},\\ \|\tilde{A}(q(t,p_0+\xi)-q(t,p_0)-\sigma(t;p_0,\xi))\| & \le C_N\|A\xi\|^{1+\delta}e^{-2\gamma t},\end{cases}$$

が成り立つことを示せばよい．左辺のノルムのままで評価するのは困難なので，次のような新しい関数を導入する．

$$\begin{cases}X(t)^2= & \int_{-\infty}^t e^{2\gamma s}\|A(p(s,p_0+\xi)-p(s,p_0)-\rho(s;p_0,\xi))\|^2ds,\\ Y(t)^2= & \int_{-\infty}^t e^{2\gamma s}\|\tilde{A}(q(s,p_0+\xi)-q(s,p_0)-\sigma(s;p_0,\xi))\|^2ds.\end{cases}$$

これらに対して Cone Property に対応する次の Squeezing Property が成り立つ．

定義 2.2

$$\mathcal{S}(K)=\{(X,Y)\in\mathbf{R}^2;\ Y\ge X\ge 0, Y\ge K\}$$

と定義する．次の 2 つが成り立つとき，*Squeezing Property* を満たすと言う．

(i) $(X(t_0), Y(t_0)) \in \mathcal{S}(K)$ $(t_1 \le t_0 \le t_2)$ なら，$(X(t), Y(t)) \in \mathcal{S}(K)$ $(t_1 \le t \le t_0 \le t_2)$ で

$$Y(t) \le Y(s)e^{-\gamma(t-s)} \qquad (t_1 \le s \le t \le t_0 \le t_2)$$

が成り立つ．

(ii) $(X(t_0), Y(t_0)) \notin \mathcal{S}(K)$ $(t_1 \le t_0 \le t_2)$ なら，$(X(t), Y(t)) \notin \mathcal{S}(K)$ $(t_1 \le t_0 \le t \le t_2)$．更に $X(t_2) \le K$ なら

$$0 \le X(t) \le K, \quad 0 \le Y(t) \le K \qquad (t_1 \le t_0 \le t \le t_2)$$

が成り立つ．

今の場合は

$$K = C_N \|A\xi\|^{1+\delta},$$

とする．ここで C_N, δ は正の定数で，spectral gap 条件から決まる．これは，$\mathcal{S}(K)$ より絞り出されることを意味している．

この性質より，(2.12) を得る．ここでは詳しい証明は省く．収束性も同様．

系は定理より容易に導かれるので証明は省略する．

3 応用：inertial manifold と inertial form の近似

この節では与えられた問題に対してどのように解の挙動に対する情報を得るかについて考察する．反応拡散方程式系

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + F(u) & (x \in \Omega, t > 0), \\ v_t = d_2 \Delta v & (x \in \Omega, t > 0), \end{cases}$$

と境界条件

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\epsilon v & (x \in \partial\Omega, t > 0), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \epsilon G(u, v) & (x \in \partial\Omega, t > 0). \end{cases}$$

を考える．ここで関数 F, G は例えば $F(u) = u - u^3/3$, $G(u, v) = u$ で与えられるようなものとする（ Fig. 2 のような関数ならよい）．

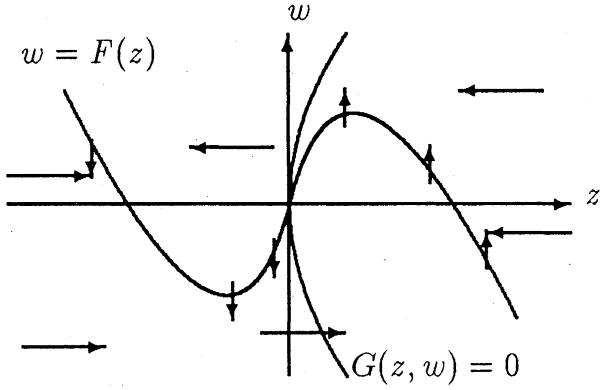

Figure 2: F, G の形と流れの向き

このシステムは，境界においてだけ関係を持ち，$\epsilon = 0$ のとき互いに無関係なので，あらゆる解は定常解に近づく．Laplace 作用素の最初の 0 でない固有値に対して gap 条件を仮定すると， inertial manifold が (3.1) に対して存在する．$\bar{u}, \bar{v}$をその空間平均とすると，射影作用素 P は

$$P : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

となり，inertial form は $\mathbf{R}^2$ 上の次の方程式で与えられる．

$$(3.3) \begin{cases} z_t = F(z) - cw + O(\epsilon), \\ w_t = \epsilon c d_2 G(z, w) + O(\epsilon^2) \end{cases} \qquad \text{ここで } d_1 = 1/\epsilon, c = |\partial\Omega|/|\Omega|.$$

この方程式は van der Pol 型で，z-w 平面での flow を考察することにより，上の方程式には安定な relaxed periodic orbit の存在がわかる（ Fig. 2,3 参照）．解の形のような更に進んだ情報を得ようとするときはどうしたらいいのだろうか．この問題では解はほぼ平坦なのであるが，少しだけ形が見られる．ほぼ平坦であることは，もっとも主要な固有値に対する固有関数が空間一様であることに対応している．それからの歪みは $\Phi_\epsilon(z, w)$ によって決ま

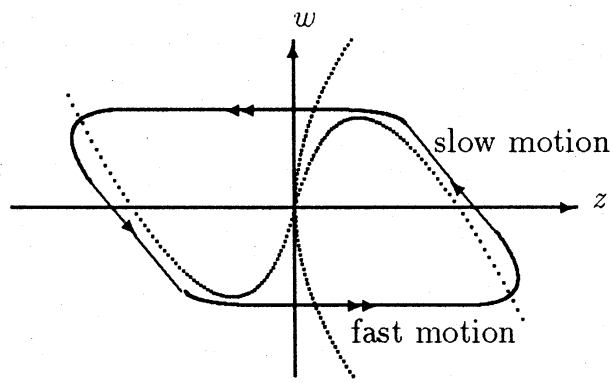

Figure 3: 周期解の存在

る．空間 1 次元の場合に調べてみよう．方程式は

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - u + F(u) & (t > 0, 0 < x < 1), \\ v_t = d_2 v_{xx} & (t > 0, 1 < x < 2), \end{cases}$$

で，境界条件は $x = 1$ でのみで相互関係をもつ次のようなものとしよう:

$$\begin{cases} u_x(t,0) = 0, & u_x(t,1) = -\epsilon v(0,t), \\ u_x(t,1) = -\epsilon G(u(t,0), v(t,1)), & u_x(2,t) = 0. \end{cases}$$

$$\Phi_\epsilon(z,w) = \begin{pmatrix} \Phi^u(z,w) \\ \Phi^v(z,w) \end{pmatrix}$$

の満たす方程式は

$$(3.4) \quad \begin{cases} \Phi^u_t = \dfrac{1}{\epsilon}\Phi^u_{xx} + w + O(\epsilon) \qquad (t > 0, 0 < x < 1), \\ \Phi^v_t = d_2\epsilon\Phi^u_{xx} - d_2\epsilon G(z,w) + O(\epsilon^2) \qquad (t > 0, 1 < x < 2), \\ \Phi^u_x(z,w)\Big|_{x=0} = 0, \Phi^u_x(z,w)\Big|_{x=1} = -\epsilon w + O(\epsilon^2), \\ \Phi^u_x(z,w)\Big|_{x=1} = -\epsilon G(z,w) + O(\epsilon^2), \Phi^u_x(z,w)\Big|_{x=2} = 0, \end{cases}$$

となる．$\Phi_0(z,w) = 0$ に注意して，ϵ について展開する．

$$\Phi(z,w) = \epsilon \begin{pmatrix} \Phi_1^u(z,w) \\ \Phi_1^v(z,w) \end{pmatrix} + O(\epsilon^{1+\delta}) \tag{3.5}$$

とおいて，Φ_1^u, Φ_1^v についての方程式を立てる．まず Φ^u の方程式の ϵ について 0 次の項を選び出すと

$$\begin{cases} (\Phi_1^u)_{xx}(z,w) + w = 0, \\ (\Phi_1^u)_x(z,w)\Big|_{x=0} = 0, \\ (\Phi_1^u)_x(z,w)\Big|_{x=1} = -w, \end{cases} \tag{3.6}$$

となる．従って

$$\Phi_1^u(z,w) = (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2)w \tag{3.7}$$

が得られる．一方，Φ^v の方程式の ϵ^1 の係数比較より，次を得る:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\Phi_1^v \cdot (F(z) - w) = d_2(\Phi_1^v)_{xx}(z,w) - d_2 G(z,w), \\ (\Phi_1^v)_x(z,w)\Big|_{x=1} = -G(z,w), \\ (\Phi_1^v)_x(z,w)\Big|_{x=2} = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

これは zw 平面全体では解けないが，$F(z) = w$ 上では

$$\Phi_1^v(z,w) = (\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-1)^2)G(z,w). \tag{3.9}$$

$(z(t), w(t))$ は安定な relaxed periodic orbit で，$F(z) = w$ の近くで，slow motion で動き，Φ^v が分からない所（の近く）では fast motion であることに注意する．以上の結果をまとめると，安定な周期解は ϵ が十分小さいとき，およそ

$$\begin{cases} u(t,x) & \approx z(t) + \epsilon(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2)w(t), \\ v(t,x) & \approx w(t) + \epsilon(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-1)^2)G(z(t), w(t)), \end{cases} \tag{3.10}$$

という形で与えられることが分かる．

References

[1] P. Brunovsky and I. Terescak. Regularity of invariant manifolds. *J. Dynamics and Differential Equations*, 3:313–337, 1991.

[2] J. Carr. Centre manifold theory. *Springer-Verlag*, 1981.

[3] S. N. Chow and K. Lu. Invariant manifolds for flows in Banach spaces. *J. Differential Equations*, 74:285–317, 1988.

[4] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenco, and R. Temam. Integral manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. *Applied Mathematics Series vol 70 Springer Verlag*, 1989.

[5] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenco, and R. Temam. Spectral barriers and inertial manifolds for dissipative partial differential equations. *J. Dynamics and Differential Equations*, 1:45–73, 1989.

[6] E. Conway, D. Hoff, and J. Smoller. Large time behavior of solutions of nonlinear reaction-diffusion equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 35:1–16, 1978.

[7] A. Debussche. Inertial manifolds and Sacker's equation. *Prepublications Universite Paris-newline Sud Mathematiques 89-23*, 1989.

[8] E. Fabes, M. Luskin, and G. R. Sell. Construction of inertial manifolds by elliptic regularization. *J. Differential Equations*, 89:355–387, 1991.

[9] C. Foias, B. Nicolaenco, G. R. Sell, and R. Temam. Inertial manifolds for Kuramoto-Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimensions. *J. Math. Pures Appl.*, 67:197–226, 1988.

[10] C. Foias, G. R. Sell, and R. Temam. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. *J. Differential Equations*, 73:309–353, 1988.

[11] C. Foias, G. R. Sell, and E. S. Titi. Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative nonlinear equations. *J. Dynamics and Differential Equations*, 1:199–244, 1989.

[12] A. Friedman. Partial differential equations of parabolic type. *Prentice-Hall*, 1964.

[13] J. K. Hale and C. Rocha. Varying boundary condition with large diffusivity. *J. Math. Pures Appl.*, 66:139–158, 1987.

[14] D. Henry. Geometric theory of semilinear parabolic equations. *Lectur Notes in Math. No 840 Springer-Verlag*, 1981.

[15] M. Kwak. Finite dimensional inertial forms for the 2d navier-stokes equations. *AH-PCRC prepint 91-30.*

[16] M. Luskin and G. R. Sell. The construction of the inertial manifolds for the reaction-diffusion equations by elliptic reguralization. prepint.

[17] J. Mallet-Paret and G. R. Sell. Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions. *J. Amer. Math. Soc.*, 1:805–866, 1988.

[18] M. Miklavčič. A sharp condition for extistence of an inertial manifold. to appear.

[19] Y. Morita and S. Jimbo. Ode's on inertial manifolds for reation-diffusion systems in a singularly perturbed domain with several thin channels. *J. Dynamics and Differential Equations*, to appear.

[20] B. Nicolaenco, B. Scheurer, and R. Temam. Some global dynamical properties of a class of pattern formation equations. *Commum. in Partial Differential Equations*, 14:245–297, 1989.

[21] H. Ninomiya. Some remarks on inertial manifolds. *J. Math. Kyoto Univ.*, to appear.

[22] R. Temam. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *Applied Mathematics Series vol 68 Springer-Verlag*, 1988.