数理解析研究所講究録
第795巻 1992年 104-110

2次元非有界領域における Navier-Stokes 流の強解の減衰について

小薗英雄　九州大・教養　(Hideo Kozono)
小川卓克　名古屋大・理　(Takayoshi Ogawa)

§1 導入と結果.

$\Omega\ (\subset \mathbb{R}^2)$ は非有界領域でその境界 $\partial\Omega$ は一様に C^m 級であるとする。$Q_T = \Omega \times (0,T)$ において次の初期値境界値問題を考える

$$
\text{(N.S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \ \text{in } Q_T, \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad \text{in } Q_T, \\ u = 0, \qquad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = a, \end{cases}
$$

ここに速度ベクトル $u = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ および圧力 $p = p(x,t)$ は未知函数、$a = (a_1(x,t), a_2(x,t))$ は与えられた初期値である。

ここでは $a \in L^2_\sigma(\Omega)$ に対する (N.S) の時間大域的強解の存在とその $t \to \infty$ での漸近挙動を調べたい。Ωが $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ の外部領域の場合は弱解の L^2-norm および 強解の L^p-norm の代数巾による減衰が得られている（Borchers-Miyakawa [1], [2]、Iwashita [8]）。 $n = 2$ のときは $\|u(t)\|_{L^2} \to 0$ のみが知られている（Masuda [13]）。

定義. $a \in L^2_\sigma(\Omega)$ とする。u が $(0,T)$ 上の *(N.S)* の強解であるとは次の *(1),(2),(3)* の条件を満たすことである

(1) $u \in C([0,T); L^2_\sigma(\Omega)) \cap C^1((0,T); L^2_\sigma(\Omega))$

(2) $u(t) \in D(A)$ for $t > 0$, $Au \in C((0,T); L^2_\sigma(\Omega))$

(3) u は次の式を満たす。

$$
\text{(A-N.S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + P(u \cdot \nabla u) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = a. \end{cases}
$$

ここに P は $L^2(\Omega)$ から $L^2_\sigma(\Omega)$ への直交射影, $A \equiv -P\Delta$, $(D(A) = \{u \in H^2(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\} \cap L^2_\sigma)$ は Stokes 作用素を表わす。

(A-N.S) の解の存在と減衰について次のような結果を得た (cf.[10]) .

定理 A. $a \in L^2_\sigma(\Omega)$ とする。このとき $(0,\infty)$ 上の *(N.S)* の強解 u が一意的に存在する。更に u は次の性質を満たす。

(1) *(smoothness)* $u(t) \in C^1((0,\infty); D(A^\alpha))$ ただし $0 \le \alpha < 1$ 。

(2) *(decay)*

$$\|u(t)\|_p = \begin{cases} o(t^{1/p-1/2}), & \text{for } 2 \le p < \infty, \\ o(t^{-1/2}\sqrt{\log t}), & \text{for } p = \infty; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\|A^\alpha u(t)\|_2 = \begin{cases} o(t^{-\alpha}), & 0 < \alpha < 1 \\ o(t^{-1}\sqrt{\log t}), & \alpha = 1; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\|\dot{u}(t)\|_p = \begin{cases} o(t^{1/p-3/2}), & 2 \le p < \infty, \\ o(t^{-3/2}\sqrt{\log t}), & p = \infty; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\|A^\alpha \dot{u}(t)\|_2 = o(t^{-\alpha-1}), \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1.4}$$

as $t \to \infty$.

定理 A は初期値 a に $a \in L^2$ の仮定しかおいていないが、初期値を適当に制限すればさらにはやい減衰の order が得られる ([11]) 。

定理 B. $a \in L^2_\sigma(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ とする。ただし $1 < r < 2$ 。このとき $(0,\infty)$ 上の *(N.S)* の強解 u に対して以下が成立する。

$$\|u(t)\|_p = \begin{cases} o(t^{1/p-1/r}), & \text{for } 2 \le p < \infty, \\ o(t^{-1/r}\sqrt{\log t}), & \text{for } p = \infty; \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\|A^\alpha u(t)\|_2 = \begin{cases} o(t^{-1/r+1/2-\alpha}), & 0 < \alpha < 1 \\ o(t^{-1/r-1/2}\sqrt{\log t}), & \alpha = 1; \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\|\dot{u}(t)\|_p = \begin{cases} o(t^{1/p-1/r-1}), & 2 \le p < \infty, \\ o(t^{-1/r-1}\sqrt{\log t}), & p = \infty; \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\|A^\alpha \dot{u}(t)\|_2 = o(t^{-1/r-1-\alpha}), \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1.8}$$

as $t \to \infty$.

§2 補題.

定理の証明には以下の補題が重要である。

補題１．$\varepsilon > 0$ $0 < \delta < 1/2$. $u, v \in D(A^{1/2}) \cap L^\infty$とする。

$$\Longrightarrow \quad \|(A+\varepsilon)^{-\delta} P(u \cdot \nabla v)\|_2 \le C_\delta \|A^{1/2-\delta} u\|_2 \|A^{1/2} v\|_2$$

ただし C_δは ε, u, vによらない定数。

注意

Ωが外部のときは A が有界な逆を持たないことに注意する。

補題１により次のような双線型作用素 $F_\delta(\cdot,\cdot)$ が定義できる

$$F_\delta(u,v) = \text{w-}\lim_{\varepsilon \to 0} (A+\varepsilon)^{-\delta} P(u \cdot \nabla v) \quad u, v \in D(A^{1/2}) \cap L^\infty$$

この F_δを density を用いて $D(A^{1/2})$ 上に拡張したものに対して、補題１より以下が得られる。

補題２．

(1) $\|F_\delta(u,v)\|_2 \le C_\delta \|A^{1/2-\delta} u\|_2 \|A^{1/2} v\|_2, \quad u, v \in D(A^{1/2})$
(2) $(F_\delta(u,v), A^\delta \phi) = (\quad (u \cdot \nabla v), \phi)$ for $u, v \in D(A^{1/2})$, $\phi \in D(A^\delta)$
(3) $A^\delta F_\delta(u,v) = P(u \cdot \nabla v)$ for $u, v \in D(A^{1/2}) \cap L^\infty$

補題１の証明は正値自己共役作用素の分数巾に対する Heinz の不等式に注意すると、

$$\|(-\Delta+\varepsilon)^{-\delta} P(u \cdot \nabla v)\|_2 \le C_\delta \|(-\Delta)^{1/2-\delta} u\|_2 \|(-\Delta)^{1/2} v\|_2 \tag{2.1}$$

を得れば十分である (Kato-Fujita [9]参照)。(2.1) は$-\Delta + \lambda$の $\mathbf{R}^2$における 基本解の積分表示を用いて示される次の不等式によって得られる。

$$G_\alpha(x,y,\varepsilon) \le \frac{\Gamma(1-\alpha)}{4^\alpha \pi \Gamma(\alpha)} |x-y|^{2\alpha-2} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

ただし

$$G_\alpha(x,y,\varepsilon)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}G(x.y.\varepsilon+\lambda)d\lambda$$

ここに $G(x,y,\varepsilon)$ は $(-\Delta+\varepsilon)^{-1}$ の Ω における Green kernel である.

一方、次の補題は u と $\dot{u}$ の L^∞ 評価を得るのに用いられる。

補題 3．$u\in D(A^{s/2})(1<s\le 2)$ とする。このとき $2<p<\infty$ に対して

$$\|u\|_\infty \le C_s p^{1/2-\beta/2s}\|A^{1/2}u\|_2^{1-\beta}(\|u\|_2+\|A^{s/2}u\|_2)^\beta$$

(ここで $u\in D(A^{s/2})$, $\beta=2s/(2+p(s-1)))$ ただし C_s は s にのみよる定数。

補題 3 は $n=2$ における Gagliardo-Nirenberg の不等式

$$\|u\|_p\le Cp^{1/2}\|u\|_2^{2/p}\|\nabla u\|_2^{1-2/p}\quad u\in H_0^1(\Omega),\quad 2\le p<\infty$$

と

$$\|u\|_\infty\le C_s\|u\|_2^{1-\alpha}\|u\|_{H^s}^\alpha\qquad u\in H^s(\Omega)$$

(ただし $\alpha=2/(2+p(s-1))$) および

$$\|\nabla u\|_2=\|A^{1/2}u\|_2\qquad u\in D(A^{1/2})$$

により得られる。

3 定理の証明の概略

定理 A の強解の存在を示すにはつぎの iteration scheme

$$\begin{cases} u_0(t)=e^{-tA}a, \\ u_{j+1}(t)=e^{-tA}a-\displaystyle\int_0^t A^{1-\gamma}e^{-(t-s)A}F_{1-\gamma}(u_j,u_j)(s)ds, \quad 1/2<\gamma<1 \end{cases}$$

に対して、A の分数巾、A^α $(0<\alpha<1)$ を作用させ、非線型項を補題 2 により評価する。

$$K_{j,\alpha}\equiv\sup_{0<t\le T}t^\alpha\|A^\alpha u_j(t)\|_2$$

とおけば、次を得る。

$$K_{j+1,\alpha} \leq K_{0,\alpha} + C_{1-\gamma} B(\gamma-\alpha, 1-\gamma) K_{j,\gamma-1/2} K_{j,1/2}.$$

したがって

$$k_j(T) = \max\{K_{j,\gamma-1/2}(T), K_{j,1/2}(T)\} \quad (j = 0, 1, \cdots),$$
$$\beta_\gamma = C_{1-\gamma} \max\{B(1/2, 1-\gamma), B(\gamma - 1/2, 1-\gamma)\}$$

とおけば

$$k_{j+1} \leq k_0 + \beta_\gamma (k_j)^2,$$

を得て、k_0が小さければ k_jが有界列であることがわかる。ほぼ同様にして $u_{j+1} - u_j$を評価して u_j が収束列であることがわかり極限 u が解になることが示される。

この時更に

(1) $\|a\| < (4\beta_\gamma)^{-1}$ならば $u(t)$ は大域解となり、$\|A^\alpha u(t)\| \leq Ct^{-\alpha}$ $0 < \alpha < 1$ を得る.

(2) 初期値が滑らか、すなわち $a \in D(A^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ ならば局所解 $u(t)$ の存在時間 T は $T = (4\beta_\gamma \|A^\varepsilon a\|)^{-1/\varepsilon}$ と取れる.

一方、方程式に $u(t)$ と $A^{2\gamma-1}u(t)$ をかけて部分積分することにより、エネルギー等式

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau = \|a\|_2^2$$

と a priori 評価

$$\|A^\varepsilon u(t)\|_2^2 \leq \|A^\varepsilon a\|_2^2 \exp(C_\varepsilon \|a\|_2^2) \qquad 0 < \varepsilon < 1/2$$

を得る. これらの評価とはじめの局所解が $t > 0$ で regularity があがることを用いれば解が時間大域的に接続できることがわかる。

解の減衰はまず Masuda [13]の結果より

$$\|u(t)\|_2 \to 0 \quad t \to 0$$

が得られることに注意する。それにより (1) から $\|A^\alpha u(t)\|_2 = o(t^{-\alpha})$ が得られ Gagliardo-Nirenberg の不等式より L^p 減衰が得られる。

次に解の L^∞ 評価は補題 3 に

$$\|A^{1/2}u(t)\|_2 = o(t^{-1/2})$$

を用い $p = \log t$ と選ぶことにより得られる。

定理 B は $a \in L^2_\sigma \cap L^r$ ならば $\exists b \in D(A^\mu)$ s.t. $a = A^\mu b$ ただし $\mu = 1/r - 1/2$ となることを用いる．更に $u(t)$ に対して $\exists v(t)$ s.t. $u(t) = A^\mu v(t)$ とかけて $v(t)$ は次の解である．

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av + F_\mu(u,u) = 0, \quad 0 < t < T, \\ v(0) = b. \end{cases}$$

そこで $v(t)$ の減衰を調べることにより定理 B を得る．

References

[1] Borchers,W. and Miyakawa, T., *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exerior domains*, Acta Math. **165** (1990), 189–227.

[2] Borchers,W. and Miyakawa, T., *L^2 decay for the Navier-Stokes flows in unbounded domains with application to exterior stationary flows*, Arch. Rat. Mech. Anal. (to appear).

[3] Borchers,W. and Sohr, H., *On the semigroup of the Stokes operator for exterior domains in L^q-spaces*, Math. Z. **196** (1987), 415–425.

[4] Fujita, H. and Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value problem 1*, Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1964), 269–315.

[5] Giga, Y., *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L_r spaces*, Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985), 251–265.

[6] Giga, Y. and Miyakawa, T., *Solution in L_r of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985), 267–281.

[7] Giga,Y. and Sohr, H., *On the Stokes operator in exterior domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA Math. **36** (1986), 103–130.

[8] Iwashita, H., *$L_q - L_r$ estimates for solutions of nonstationary in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problem in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[9] Kato, T. and Fujita, H., *On the nonstationary Navier-Stokes system*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **32** (1962), 243–260.

[10] Kozono, H. and Ogawa, T., *Two dimesional Navier-Stokes flow in unbounded domains*, preprint.

[11] Kozono, H. and Ogawa, T., *Decay properties of strong solutions for the Navier-Stokes equations in two-dimensional unbounded domains*, preprint.

[12] Masuda, K., *On the stability of incompressible viscous fluid motions past object*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 294–327.

[13] Masuda, K., *Weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 623–646.

[14] Miyakawa, T., *On stationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain*, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 115–140.

[15] Miyakawa, T. and Sohr, H., *On energy inequality, smoothness and large time behavior in L^2 for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Z. **199** (1988), 455–478.

[16] Yao Jing-Qi, *Comportment à l'infini des solution d'une équation de Schrödinger nonlinéaires dans un domaine extérier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **15** (1982), 163–166.