数理解析研究所講究録
第 795 巻 1992 年 111-121

振動積分の L^2 有界性

千葉経済短期大学　浅田 健嗣 (Kenji Asada)

§ 0. 序

振動積分変換を波束 (局在する波) との関連で考える。
Cotler-Stein の補題によって、Calderón-Vaillancourt [C-V] は擬微分作用素の L^2 有界性を証明した。またその補題をもちいて Fourier 積分作用素、振動積分変換についてもL^2 有界性を 証明できる[A-F]。§1 で Córdoba-Fefferman の波束変換 [C-F] を用いる振動積分変換の L^2 有界性の別証明を与える。
また、振動積分変換は波束型の積分作用素としても表されることを §2 で示そう。
応用として、§3 で調和振動子の解を波束を用いて表してみる。

§ 1. 振動積分変換の L^2 有界性の別証明

[1] 振動積分変換 [A-F]

$$A(\nu)f(x) = I^{\nu}(a,\phi)f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}} \int_{R^{n+N}} e^{i\nu\,\phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)\ f(y)\ dy d\theta$$

を次の仮定で考える。

(Φ-1) $\phi \in C^{\infty}(R^n \times R^n \times R^N)$ で実数値関数

(Φ-2) ϕ の 2 階以上の各微分係数が有界

(Φ-3) $|\det D(\phi)(x,y,\theta)| \geq \delta > 0$

ここで、

$$D(\phi)(x,y,\theta)=\begin{pmatrix} \partial^2_{xy}\ \phi(x,y,\theta) & \partial^2_{x\theta}\ \phi(x,y,\theta) \\ \partial^2_{\theta y}\ \phi(x,y,\theta) & \partial^2_{\theta\theta}\ \phi(x,y,\theta) \end{pmatrix}$$

(A-1) $a \in C^{\infty}(R^n \times R^n \times R^N)$ とその各微分係数は有界

定理([A-F]) $\|A(\nu)\| \le C_{n,N,m}\, |a|_m$, $\nu \ge \nu_0$

ここで、 $|a|_m = \sum_{|\alpha| \le m} \sup|\partial^\alpha a|$, $m \ge m_0$

[2] 波束関数・波束変換の定義 ([C-F])

Siegel の上半空間： $H^+ = \{g = g_R + \sqrt{-1}g_I;\ g_R, g_I$ は n 次実対称行列で, g_Iは正定値$\}$

波束関数： $\varphi^\nu_{(x,\xi,g)}(u) = C^\nu_g e^{i\nu[\xi^T(u-x) + \frac{1}{2}(u-x)^T g(u-x)]}$.

ここで、 $C^\nu_g = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{n/4} \sqrt[4]{\det g_I}$. このとき、 $\|\varphi^\nu_{(x,\xi,g)}\| = 1$.

波束変換： $W^\nu_g f(x,\xi) = \int_{R^n} \overline{\varphi^\nu_{(x,\xi,g)}(v)}\, f(v)dv$

(左)逆波束変換： $W^{\nu,-1}_g F(u) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^n \int_{R^{2n}} \varphi^\nu_{(x,\xi,g)}(u) F(x,\xi)dxd\xi$

性質 (1) $\|\varphi^\nu_{(x,\xi,g)}\| = 1$

(2) $W^{\nu,-1}_g W^\nu_g = I$

(3) $\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^n \int_{R^{2n}} |W^\nu_g f(x,\xi)|^2 dxd\xi = \int_{R^n} |f(u)|^2 du$

[3] 証明 (方針)

(1) $k, g \in H^+$ に対して $\tilde{A}^\nu_{k,g} = W^\nu_k A(\nu) W^{\nu,-1}_g$ とおく。

$\tilde{A}^{\nu}_{k,g}:S(R^{2n}) \to S(R^{2n})$ の積分核は次で与えられる。

$$\tilde{A}^{\nu}_{k,g}(z,\zeta;y,\eta) = \int_{R^{2n+N}} \overline{\overset{\vee}{\varphi}_{(z,\zeta,k)}(u)}\; e^{i\nu\,\phi(u,v,\theta)} a(u,v,\theta)\; \overset{\vee}{\varphi}_{(y,\eta,g)}(v)\; du\,dv\,d\theta$$

(2) dilation によって、$\nu=1$ の場合を証明すればよい。

(3) $(\tilde{A}^{1}_{k,g})^{*}\ (\tilde{A}^{1}_{k,g})$ の積分核は次で与えられる。

$$H(y_1,\eta_1;y_0,\eta_0) = \int_{R^{3n+2N}} \overline{G(v_1,y_1,g)a(u,v_1,\theta_1)}\; G(v_0,y_0,g)a(u,v_0,\theta_0)e^{i\Phi}du\,dv_1 d\theta_1 dv_0 d\theta_0 \ .$$

ここで、$G(v,y,g)= C^{1}_{g}\ e^{\frac{i}{2}(v-y)^{T}g(v-y)}$,

$$\Phi = -\eta_1^{T}(v_1-y_1) - \phi(u,v_1,\theta_1) + \phi(u,v_0,\theta_0) + \eta_0^{T}(v_0-y_0) \ .$$

(4) Lax による部分積分の方法、すなわち

$L = \rho^{-2}(-i\nabla\Phi\cdot\nabla + 1)$, ここで、 $\nabla = \nabla_{(v_1,\theta_1,u,v_0,\theta_0)}$,

$\rho^2 = 1+|\nabla_{v_1}\Phi|^2+|\nabla_{\theta_1}\Phi|^2+|\nabla_{u}\Phi|^2+|\nabla_{\theta_0}\Phi|^2+|\nabla_{v_0}\Phi|^2$,

を用いて、$H(y_1,\eta_1;y_0,\eta_0)$ の左辺を変形する。

$$H(y_1,\eta_1;y_0,\eta_0) = \int_{R^{3n+2N}} (L^{*})^{m}\Big[\,\overline{G(v_1,y_1,g)a(u,v_1,\theta_1)}\; G(v_0,y_0,g)a(u,v_0,\theta_0)\Big]\ e^{i\Phi}du\,dv_1 d\theta_1 dv_0 d\theta_0 \ .$$

よって、次の評価式をえる。

$$|H(y_1,\eta_1;y_0,\eta_0)|$$
$$\le C_{n,m,p}|a|_m^2 \int_{R^{3n+2N}} \rho^{-m}\,\lambda(v_1-y_1)^{-s}\,\lambda(v_0-y_0)^{-t}\;du\,dv_1\,d\theta_1\,dv_0\,d\theta_0$$

ここで、 m,s,t は任意の正整数で、 $\lambda(v)=(1+|v|^2)^{1/2}$.

(5) ρ の下からの評価：

(a-1) $|\nabla_\theta\phi(u,v_1,\theta_1)-\nabla_\theta\phi(u,v_0,\theta_0)|+|\nabla_u\phi(u,v_1,\theta_1)-\nabla_u\phi(u,v_0,\theta_0)|\ge$
$\ge \delta_0\,(|v_1-v_0|+|\theta_1-\theta_0|)$,

(a-2) $|\nabla_\theta\phi(u_1,v,\theta_1)-\nabla_\theta\phi(u_0,v,\theta_0)|+|\nabla_v\phi(u_1,v,\theta_1)-\nabla_v\phi(u_0,v,\theta_0)|\ge$
$\ge \delta_0\,(|u_1-u_0|+|\theta_1-\theta_0|)$.

(b-1) $|\nabla_{\theta_1}\Phi|+|\nabla_u\Phi|+|\nabla_{\theta_0}\Phi| \ge \delta_0\,(|v_1-v_0|+|\theta_1-\theta_0|)$,

(b-2) $|\nabla_{v_1}\Phi|+|\nabla_{\theta_1}\Phi| \ge \delta_0(|x_1-u|+|\sigma_1-\theta_1|) - M|y_1-v_1|$,
$|\nabla_{v_0}\Phi|+|\nabla_{\theta_0}\Phi| \ge \delta_0(|x_0-u|+|\sigma_0-\theta_0|) - M|y_0-v_0|$,

(b-3) $|\nabla_{v_1}\Phi|+|\nabla_{v_0}\Phi| \ge \delta_0|\eta_1-\eta_0| - M(|v_1-v_0|+|\theta_1-\theta_0|)$,

ここで、$M=\sup|\partial^2\phi(u,v,\theta)|$.

(c-1) $\rho\ge \delta_1\lambda(v_1-v_0,\theta_1-\theta_0) \ge \delta_1\lambda(v_1-v_0)$,

(c-2) $\rho\ge \delta_2\lambda(\eta_1-\eta_0)$,

ここで、$\lambda(z)=(1+|z|^2)^{1/2}$.

(6) 積分領域を

(A)$|x_1-u_1|+|\sigma_1-\theta_1|\le 10M\delta_0^{-1}|y_1-v_1|$, or (B)$|x_1-u_1|+|\sigma_1-\theta_1|\ge 2M\delta_0^{-1}|y_1-v_1|$;

(C)$|x_0-u_0|+|\sigma_0-\theta_0|\le 10M\delta_0^{-1}|y_0-v_0|$, or (D)$|x_0-u_0|+|\sigma_0-\theta_0|\ge 2M\delta_0^{-1}|y_0-v_0|$

と 4 領域に分けて、評価をする。その際に、次の不等式を用いる。

(d-1) (B) において、$\rho \geq \delta_3\lambda(x_1-u,\sigma_1-\theta_1)$,
(d-2) (D) において、$\rho \geq \delta_3\lambda(x_0-u,\sigma_0-\theta_0)$

(e) $s>p+n, t>p+n$ ならば、

$$\int_{R^n\times R^n} \lambda(v_1-v_0)^{-p}\, \lambda(v_1-y_1)^{-s}\, \lambda(v_0-y_0)^{-t} dv_1 dv_0 \leq M_{s-p} M_{t-p}\, \lambda(y_1-y_0)^{-p}$$

が成り立つ。

これらの不等式を用いて、次の評価式を導くことができる。

$$|H(y_1,\eta_1;y_0,\eta_0)| \leq C_{n,N} |a|_m^2\, \lambda(y_1-y_0)^{-q}\, \lambda(\eta_1-\eta_0)^{-p}$$

ここで、 $m=p+q+2r>3n+2N, p>n, q>n, r>N+\frac{n}{2}$.

(5) Schur の補題を適用して、 $(\tilde{A}^1_{k,g})^* (\tilde{A}^1_{k,g})$ の L2 有界性が分かる。

(6) $A(v) = W^{v,-1}_k\, \tilde{A}^v_{k,g}\, W^v_g$ なので、$\tilde{A}^v_{k,g}$ の L2 有界性より $A(v)$ の L2 有界性を知る。

[4] Cotler-Stein の補題を用いて証明された David-Journe の特異積分作用素の L2 有界性について Meyer [Me] は、 Wavelet を利用した別証明を与えた。それは、Wavelets によって分解された作用素が Schur の補題の要求する評価式をみたすこと、その結果、その特異積分作用素の L2 有界性がなりたつというものである。波束は wavelet の代表例である [CGT]。振動積分変換の L2 有界性のここでの証明も、同じ方法論によるものといえよう。

§ 2. 波束型作用素と振動積分変換の主要部について

[1] $A(v)$ を [AF] の仮定 (Φ-1), (Φ-2), (Φ-3) と (A-1) をみたす振動積分変換とする。phase 関数 $\phi(x,y,\theta)$ が誘導する正準変換 χ は、$\chi(y,\eta)=i_1\circ i_2^{-1}(y,\eta)=(x,\xi)$ で定義される。ここで、

$$C_\phi=\{(x,y,\sigma);\partial_\theta\phi(x,y,\sigma)=0\}$$

$$i_1:C_\phi\to R^n\times R^n,\quad i_1(x,y,\sigma)=(x,\xi)=(x,\partial_x\phi(x,y,\sigma))$$

$$i_2:C_\phi\to R^n\times R^n,\quad i_2(x,y,\sigma)=(y,\eta)=(y,-\partial_y\phi(x,y,\sigma))$$

また、$g\in H^+$ に対して $\chi(g)$ を次で定義する:

$$\chi(g) = \left(\frac{\partial\xi}{\partial\eta}g + \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}g + \frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}$$

$A(v)$ の主要部を次のように定義する:

$$P(v,g)f(u) =$$
$$= \left(\frac{v}{2\pi}\right)^n \int_{R^{2n}} \varphi_{(\chi(y,\eta),\chi(g))}(u)\ a_0(y,\eta)\ q(y,\eta,g)\ e^{iv\,\phi_0(y,\eta)}\ W_g^v f(y,\eta)dyd\eta$$

ここで、 $a_0(y,\eta)=a\circ i_2^{-1}(y,\eta)=a(x,y,\sigma)$, $\phi_0(y,\eta)=\phi\circ i_2^{-1}(y,\eta)=\phi(x,y,\sigma)$

$$q(y,\eta,g) = i^{\frac{N-n}{2}}\frac{\sqrt[4]{\det g_I}}{\sqrt[4]{\det\chi(g)_I}}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\eta}g+\frac{\partial x}{\partial y}}\ \sqrt{\det D(\phi)}}\Bigg|_{(x,y,\sigma)=i_2^{-1}(y,\eta)}$$

[2] 定理 $\|A(v) - P(v,g)\| \le C\,v^{-1/2}$, $v \ge v_0$.

[3] 補題

(1) $$\int_{R^n} e^{iv[\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle]}dx = \left(\frac{2\pi i}{v}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{\det A}}\,e^{\frac{-iv}{2}\langle A^{-1}b,b\rangle}$$

ここで、A は $\mathrm{Im}A$ が正定値な正方行列、b は複素ベクトル。

$$(2)\ \chi(g)=\left(\frac{\partial\xi}{\partial\eta}g+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}g+\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{-1}$$

$$=\phi_{xx}-\phi_{xy}(\phi_{yy}+g)^{-1}\phi_{yx}$$

$$-[\phi_{x\sigma}-\phi_{xy}(\phi_{yy}+g)^{-1}\phi_{y\sigma}]\,[\phi_{\sigma\sigma}-\phi_{\sigma y}(\phi_{yy}+g)^{-1}\phi_{y\sigma}]^{-1}$$

$$[\phi_{\sigma x}-\phi_{\sigma y}(\phi_{yy}+g)^{-1}\phi_{yx}]$$

$$(3)\ \det\begin{pmatrix}\phi_{\sigma\sigma} & \phi_{\sigma y}\\ \phi_{y\sigma} & \phi_{yy}+g\end{pmatrix}=\det(\phi_{yy}+g)\ \det[\phi_{\sigma\sigma}-\phi_{\sigma y}(\phi_{yy}+g)^{-1}\phi_{y\sigma}]$$

$$=(-1)^n\det\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}g+\frac{\partial x}{\partial y}\right)\det D(\phi)$$

[4] 証明の方針：

(1) $\tilde{A}^{\nu}_{k,g}=\tilde{I}^{\nu}_{k,g}(a,\phi)=W^{\nu}_{k}\ A(\nu)\ W^{\nu,-1}_{g}=W^{\nu}_{k}\ I^{\nu}(a,\phi)\ W^{\nu,-1}_{g}$ とおく。

$\tilde{A}^{\nu}_{k,g}$ の積分核は

$$\tilde{A}^{\nu}_{k,g}(z,\zeta;y,\eta)=\tilde{J}^{\nu}_{k,g}(a,\phi)(z,\zeta;y,\eta)$$

$$=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}}\int_{R^{2n+N}}\overline{\varphi^{\nu}_{(z,\zeta)}(u)}\ e^{i\nu\,\phi(u,v,\theta)}\ a(u,v,\theta)\ \varphi^{\nu}_{(y,\eta)}(v)\ du\,dv\,d\theta\ .$$

$\psi(u,v,\theta;y,\eta)=\phi(u,v,\theta)$ の $(x,y,\sigma)=i_2^{-1}(y,\eta)$ における Tayler 展開の 2次までの展開項 として、$\tilde{A}^{\nu}_{k,g}$ の主要部を

$$\tilde{P}^{\nu}_{k,g}=\tilde{I}^{\nu}_{k,g}(a_0,\psi)=W^{\nu}_{k}\ I^{\nu}(a_0,\psi)\ W^{\nu,-1}_{g}$$

と定義すると、その積分核は

$$\tilde{P}^{\nu}_{k,g}(z,\zeta;y,\eta) =$$

$$= \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}} \int_{R^{2n+N}} \overline{\varphi^{\nu}_{(z,\zeta)}(u)}\ e^{i\nu\,\psi(u,v,\theta;y,\eta)}\ a_0(y,\eta)\ \varphi^{\nu}_{(y,\eta)}(v)dudvd\theta\ .$$

ここで、$a_0(y,\eta)= a\ i_2^{-1}(y,\eta)$.

(2) $P^{\nu}_{k,g}=W^{\nu,-1}_{k}\tilde{P}^{\nu}_{k,g}\ W^{\nu}_{g}$ とおくと、§1, [2](1) より、次のようになる。

$$P^{\nu}_{k,g}f(u) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{n} \int_{R^{2n}} Q^{\nu}_{k,g}(u;y,\eta)\ a_0(y,\eta)\ W^{\nu}_{g}f(y,\eta)\ dyd\eta\ ,$$

$$Q^{\nu}_{k,g}(u;y,\eta)= \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n+N}{2}} \int_{R^{n+N}} e^{i\nu\,\psi(u,v,\theta;y,\eta)}\ \varphi^{\nu}_{(y,\eta)}(v)dvd\theta$$

(3) $Q^{\nu}_{k,g}(u;y,\eta)$ に Gauss 積分についての補題 [3](1)を適用し、補題 [3](2) を用いて

$$Q^{\nu}_{k,g}(u;y,\eta)= i^{\frac{n+N}{2}}\ C^{\nu}_{g} \times \frac{1}{\sqrt{\det(\phi_{yy}+g)}}\ \frac{\exp\ i\nu\ \Psi}{\sqrt{\det[\phi_{\sigma\sigma}-\ \phi_{\sigma y}(\phi_{yy}+g)^{-1}\ \phi_{y\sigma}]}}$$

$$\Psi=\phi(x,y,\sigma)+\langle u-x,x\rangle + \frac{1}{2}\langle\chi(g)(u-x),u-x\rangle\ ,\ (x,\xi) = \chi(y,\eta)$$

を得る。補題 [3](3) より、この $P^{\nu}_{k,g}$ が $P(\nu,g)$ となることが分かる。

(4) $\| A(v) - P(v,g) \| \le C v^{-1/2}$ を示すには、剰余項 $\tilde{R}_{k,g}^{v} = \tilde{A}_{k,g}^{v} - \tilde{P}_{k,g}^{v}$ が

評価式 $\| \tilde{R}_{k,g}^{v} \| \le C v^{-1/2}$ を満たせばよい。そのためには、

$\tilde{S}_{k,g}^{v} = \tilde{I}_{k,g}^{v}(a-a_0,\phi)$ とおき、

$$\tilde{R}_{k,g}^{v} = \tilde{I}_{k,g}^{v}(a-a_0,\phi) + [\tilde{R}_{k,g}^{v} - \tilde{I}_{k,g}^{v}(a-a_0,\phi)] = \tilde{S}_{k,g}^{v} + \tilde{T}_{k,g}^{v}$$

と分解し、それぞれに次の補題を用いる。

(5) 補題 $a=a(u,v,\theta;y,\eta)\in C^{\infty}, |\partial_u^{\alpha}\partial_v^{\beta}\partial_\theta^{\gamma} a(u,v,\theta;y,\eta)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}$

として、

$$\tilde{A}_{k,g}^{v,(\alpha,\beta,\gamma)} = \tilde{I}_{k,g}^{v}\Big(a(v-y)^{\alpha}\ (\partial_v\phi(u,v,\theta)+\eta)^{\beta}\ \partial_\theta\phi(u,v,\theta)^{\gamma},\ \phi(u,v,\theta)\Big)$$

は次をみたす。

$$\| \tilde{A}_{k,g}^{v,(\alpha,\beta,\gamma)} \| \le C\ v^{-\frac{1}{2}(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)}$$

この補題は §1 の振動積分変換の L2 有界性の定理の証明と同様の方法で証明できる。

§3. 応用

調和振動子の Schrödinger 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{2}x^2 u$$

を考える。初期条件

$$u(0,x) = \exp\frac{i}{h}[(x-y)\eta + \frac{1}{2}g(x-y)^2],\quad (y,\eta)\in R^2,\quad g\in C,\quad \mathrm{Im}g>0$$

をみたす解は次であたえられる。

$$u(t,x) = a \exp \frac{i}{h} S ,$$

古典軌道を

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \xi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega} \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$$

とすると、

$$S = S_0 + (x-x_t)\xi_t + \frac{1}{2} g(t)(x-x_t)^2$$

$$S_0 = \int_0^t [\frac{1}{2} \xi_s{}^2 - \frac{\omega^2}{2} x_s{}^2]ds$$

$$= \frac{1}{2} (\eta^2 - y^2\omega^2) \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + y\eta\omega \frac{\cos 2\omega t - 1}{2\omega}$$

古典軌道に沿っての作用。

$$g(t) = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial\eta} g + \frac{\partial\xi}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial\eta} g + \frac{\partial x}{\partial y}} = \frac{g \cos\omega t - \omega \sin\omega t}{g \frac{\sin\omega t}{\omega} + \cos\omega t}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{g \frac{\sin\omega t}{\omega} + \cos\omega t}}$$

従って、初期値 f(x) の解は、波束変換を用いて、次のように表される。

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{R^{2n}} \varphi_{x_t(y,\eta),\xi_t(y,\eta)}(x)\ q(t,y,\eta)\ e^{\frac{i}{h}S_0(t,y,\eta)}\ W_g f(y,\eta)\ dy\ d\eta$$

参考文献

[AF] Asada,K., and Fujiwara, D. : On some oscillatory integral transformations, Japan. J. Math., Vol.4,No.2(1978), p.229-361.

[CF] Cordoba, A., and Fefferman, C. : Wave packets and Fourier integral operators, Comm. in PDE., Vol.3,No.1(1978), p.979-1005.

[CV] Calderon, A.P., and Vaillancourt, R. : A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA.,Vol.69(1972), p.1185-1187.

[CGT] Combes, J.M., Grossmann, A., Tchamitchian, Ph. : Wavelets, Time-frequency methods and phase space, Proc. International Conference, Marseille, Dec. 14-18, 1987, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1989

[Me] Meyer, Y. : Ondelettes et operateurs II, Operateurs de Calderon-Zygmund, 1990, Hermann