数理解析研究所講究録
第795巻 1992年 122-152

Decay and Asymptotics for Wave Equations with Nonlinear Damping Term

信州大理学部 望月 清 (Kiyoshi Mochizuki)
東外大留学生教育教材開発センター
甕 隆博 (Takahiro Motai)

§1 序

この小論では、摩擦項(damping term)を持つ Schrödinger 型方程式の解のエネルギー減衰について考察する。例をあげてみよう。摩擦項 $b(x,t)\partial_t u(t)$ ($b(x,t) \geqq 0$) を持つ波動方程式

$$\partial_t^2 u(t) - \Delta u(t) + b(x,t)\partial_t u(t) = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \ (n \geqq 3)$$

について、エネルギーを計算すると

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\sqrt{b(x,\tau)}\,\partial_t u(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau$$
$$= \|\partial_t u(0)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(0)\|_{L^2}^2 \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

となる。明らかに $t \to \infty$ とすれば、全エネルギー $\frac{1}{2}\{ \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \}$ は減衰する。さらに、それは $b(x,t)$ の遠方での挙動によって特徴付けられる。Mochizuki [10, 11]、Matsumura [9] によれば

$$b(x,t) \geqq b_0 (1+|x|)^{-1} \quad (b_0 > 0)$$

ならば、全エネルギーは $t\to\infty$ の時0に収束し、

$$b(x,t) \leqq b_1(1+|x|)^{-1-\delta} \quad (b_1>0\ ,\ \delta>0)$$

ならば、全エネルギーは0に収束せず自由な系の解（すなわち、$\partial_t^2 u(t) - \Delta u(t) = 0$ の解）に近づく。では、摩察項が非線形の場合はどうなのであろうか。Nakao[14]、Motai[13]によれば、摩察項 $|\partial_t u(t)|^{\rho-1}\partial_t u(t)$ $(\rho>1)$ を持つKlein-Gordon方程式

$$\partial_t^2 u(t) - \Delta u(t) + u(t) + |\partial_t u(t)|^{\rho-1}\partial_t u(t) = 0 \qquad (x,t)\in \mathbb{R}^n_x \mathbb{R}_+\ (n\geqq 1)$$

の全エネルギーの減衰は ρ の大きさで特徴付けられる。すなわち $t\to\infty$ のとき $1<\rho\leqq 1+\frac{2}{n}$ ならば全エネルギーは0に収束し、$\rho>1+\frac{2}{n}$ ならば全エネルギーは0に収束しない。さらに $\rho\geqq 1+\frac{4}{n}$ ならば自由な系の解（$\partial_t^2 u(t) - \Delta u(t) + u(t) = 0$）に近づく。ここでは上に述べた全エネルギーの減衰の二つの様態の中で、摩察項の影響の弱い場合、すなわち $t\to\infty$ の時全エネルギーが0に収束しないで、自由な系の解に近づく場合について考えてみたい。上記二つの例では摩察項の影響の弱さは $b(x,t)$ の遠方での挙動とか ρ の大きさによって表されたが、それらの結果をよく吟味するとそれは自由な系の解の性質と摩察項との関係によって表されるものであることがわかってきた。そこで、抽象的Schrödinger型方程式の枠組の中でそれを表現し、摩察項を持つSchrödinger

方程式、Klein-Gordon 方程式、波動方程式に適用し、その結果を述べたいと思う。

最後にこの小論で使われる記号を説明しておく。$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は無限回微分可能で $\mathbb{R}^n$ に compact support を持つ関数空間である。$L^p(\mathbb{R}^n)$，$1 \leqq p \leqq \infty$ は通常の L^p-空間である。Banach 空間 Z に対し、$L^p(\mathbb{R}; Z)$ は Z に値を持つ L^p-関数の空間である。$\mathcal{S}'$ は $\mathbb{R}^n$ でのおだやかな超関数の空間であり、$\wedge$ はフーリエ変換、$\mathcal{F}^{-1}$ は逆フーリエ変換を表す。また $\varepsilon > -n$、$s \in \mathbb{R}$、$1 \leqq p < \infty$ に対し、$H^{s,p} = H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ $H^{\varepsilon,s,p} = H^{\varepsilon,p,p}$ を次のノルムでの $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の完備化とする。

$$\|f\|_{H^{s,p}} = \|\mathcal{F}^{-1}\{\langle\xi\rangle^s \hat{f}(\xi)\}\|_{L^p}$$

$$\|f\|_{H^{\varepsilon,s,p}} = \|\mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^\varepsilon \langle\xi\rangle^s \hat{f}(\xi)\}\|_{L^p}$$

ここで $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ である。特に $p=2$ の時は、$H^{s,2} = H^s$ と書く。

§2 抽象的結果

次の Schrödinger 型方程式の Cauchy 問題の解について考察しよう。

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + iAu(t) + F(u(t)) = 0 & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、X はヒルベルト空間、$F(u(t))$ は摩察項を表し、A は X

上の自己共役作用素で定義域$\mathcal{D}(A)$はXで稠密であるとする。抽象的結果を述べるために次の空間を与える。

Hをヒルベルト空間とし、$X \hookrightarrow H$を満たす。内積を$(\ ,\ )_H$ノルムを$\|\cdot\|_H$と書く。W_1、W_2をBanach空間、Yを反射的Banach空間とし、それぞれのノルムを$\|\cdot\|_{W_1}$、$\|\cdot\|_{W_2}$、$\|\cdot\|_Y$と書く。これらは次を満たす。

$$W_1' \hookrightarrow H \hookrightarrow W_1、\quad W_2' \hookrightarrow H \hookrightarrow W_2、\quad Y \hookrightarrow H \hookrightarrow Y'、\quad Y \hookrightarrow X$$

$$(u,\ v)_H = \langle u,\ v\rangle_{W_1} \quad \text{for} \quad u \in W_1'、\ v \in H$$

$$(u,\ v)_H = \langle u,\ v\rangle_{W_2} \quad \text{for} \quad u \in W_2'、\ v \in H$$

$$(u,\ v)_H = \langle v,\ u\rangle_{Y} \quad \text{for} \quad u \in Y,\ v \in H$$

ここでW_1'、W_2'、Y'はW_1、W_2、Yの共役空間を表し、$\langle\ ,\ \rangle_{W_1}$ $\langle\ ,\ \rangle_{W_2}$、$\langle\ ,\ \rangle_Y$はそれぞれの共役対積を表す。また、Hは$Y'$で稠密とする。

AはX上の自己共役作用素なのでユニタリー群

$$U_0(t) = \exp(-iAt) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を考えることができる。$U_0(t)$に対し次の仮定を置く。

(仮定1)

$U_0(t)$はH上のユニタリー群に拡張できる。

(仮定2)

任意のφ, $\psi \in H$に対し

$$\lim_{t\to\infty} (U_0(t)\varphi、\psi) = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ。さらにHで稠密な部分集合Dと実数$r_1 \geqq 2$が存在して、各$\varphi \in D$に対し

$$U_0(t)\varphi \in L^{r_1}(\mathbb{R};W_1) \tag{2.3}$$

が成り立つ。

（仮定3）

実数$r_2 \geqq 2$と正定数C_0が存在して、各$\varphi \in Y$に対し

$$\|U_0(\cdot)\varphi\|_{L^{r_2}(\mathbb{R};W_2)} \leqq C_0\|\varphi\|_{Y}, \tag{2.4}$$

が成り立つ。

さて、方程式(2.1)に対しては次のような解が存在することを仮定しよう。

（仮定4）

$u_0 \in X$に対し、$u(t) \in L^\infty(\mathbb{R};X)$、$F(u(t)) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+;H)$

$u(0)=u_0$　かつ積分方程式

$$u(t) = U_0(t-t')u(t') - \int_{t'}^{t} U_0(t-\tau)F(u(\tau))d\tau \tag{2.5}$$

$$(0 \leqq t' < t < \infty)$$

を満たす解が存在する。

以上の仮定の下で定理を述べよう。

定理2.1

$U_0(t)$は（仮定1）と（仮定2）を満たしているとする。

(a)（仮定4）で得られる解$u(t)$はさらに

$$F(u(t)) \in L^{r_1'}(\mathbb{R}^+; W_1') \tag{2.6}$$

を満たしているとする。ここで $1/r_1' = 1 - 1/r_1$ である。このとき任意の $\varphi \in H$ に対し

$$\lim_{t \to \infty} (u(t), \varphi)_H = 0 \tag{2.7}$$

が成り立つ。

(b) $u(t;\sigma)$ を初期値を $t=\sigma$ で $U_0(\sigma)u_0$ ($u_0 \in D \cap X$, $\|u_0\|_H \neq 0$) と与えた場合の（仮定4）で求まる解とする。$u(t;\sigma)$ はさらに任意の $\sigma \geqq 0$ に対し

$$\|F(u(\cdot;\sigma))\|_{L^{r_1'}([\sigma,\infty); W_1')} \leqq M \tag{2.8}$$

を満たすとする。ここで M は σ に依存しない正定数である。σ を $\|u_0\|_H$ に依存して充分大きく取れば、$\|u(t;\sigma)\|_H$ は $t \to \infty$ としたとき、0 に収束しない。

(C) 初期値 u_0 を、$u_0 \in D \cap X$, $\|u_0\|_H \neq 0$ と与えたとき、（仮定4）で得られる解が (2.6) 及び

$$\|F(u(\cdot))\|_{L^{r_1'}(\mathbb{R}_+; W_1')} \|U_0(\cdot)u_0\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}_+; W_1)} < \|u_0\|_H^2 \tag{2.9}$$

を満たせば、$\|u(t)\|_H$ は $t \to \infty$ のとき 0 に収束しない。

定理 2.2

$U_0(t)$ は（仮定1）と（仮定3）を満たしているとする。そして（仮定4）で得られる解 $u(t)$ は

$$F(u(t)) \in L^{r_2'}(\mathbb{R}^+; W_2') \tag{2.10}$$

を満たしているとする。ここで $1/r_2' = 1 - 1/r_2$ である。このとき $\varphi^+ \in Y$ が一意に存在して

$$\lim_{t\to\infty} \| U_0(-t)u(t) - \varphi^+ \|_Y = 0 \tag{2.11}$$

が成り立つ。特に Y がヒルベルト空間で $U_0(t)$ が Y 上のユニタリー群ならば (2.11) は

$$\lim_{t\to\infty} \| u(t) - U_0(t)\varphi^+ \|_Y = 0 \tag{2.12}$$

となる。

このニつの定理で、(仮定2)と(2.6) 及び (仮定3) と (2.10)を見るとわかるが、摩察項の影響力の弱さは $U_0(t)\varphi$ が属している空間の共役空間に摩察項 $F(u(t))$ が属しているという性質で特徴付けされている。おおまかな言い方を許してもらうならば、『$U_0(t)\varphi$ の属す空間の共役空間に $F(u(t))$ が属しているならば、$u(t)$ は漸近的に自由な系の解である。』と考えることができる。但し、このニつの定理はそれを完全な形で示しているわけではない。例えば、定理2.2では $\varphi^+ \equiv 0$ でないという保証がない。それは定理2.1によって、不完全な形であるが、補なわれている。定理2.1の(b)、(c)では何らかの意味で初期値が充分小さいことが求められている。初期値の小ささを仮定しない場合も同様な結果が成り立つことが望まれるが、現在のところできていない。しかし、特別な摩察

項の場合については、初期値の小ささを仮定しなくても全エネルギーが0に収束しないことを証明できる。

定理を証明しよう。

定理2.1の証明

(a) $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; X)$ と $X \hookrightarrow H$ より $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ である。$|(u(t), \varphi)_H| \leqq \|u(t)\|_H \|\varphi\|_H \leqq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H)} \|\varphi\|_H$ より (2.7) を各 $\varphi \in D$ に対して示せばよい。(D は H で稠密なので。) (2.5) で $t'=0$ として $(u(t), \varphi)_H$ を計算すると

$$(u(t), \varphi)_H - (U_0(t)u_0, \varphi) = -\int_0^t \langle F(u(\tau)), U_0(t-\tau)\varphi \rangle_{W_1} d\tau \qquad (2.13)$$

を得る。(2.2) より

$$(U_0(t)u_0, \varphi) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \longrightarrow \infty \qquad (2.14)$$

である。他方

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \langle F(u(\tau)), U_0(t-\tau)\varphi \rangle_{W_1} d\tau \right| \\ &\leqq \left\{ \int_0^{t/2} \|F(u(\tau))\|_{W_1'}^{r_1'} d\tau \right\}^{1/r_1'} \left\{ \int_{t/2}^t \|U_0(-\tau)\varphi\|_{W_1}^{r_1} d\tau \right\}^{1/r_1} \\ &\quad + \left\{ \int_{t/2}^t \|F(u(\tau))\|_{W_1'}^{r_1'} d\tau \right\}^{1/r_1'} \left\{ \int_0^{t/2} \|U_0(-\tau)\varphi\|_{W_1}^{r_1} d\tau \right\}^{1/r_1} \end{aligned} \qquad (2.15)$$

である。(2.6) と (2.3) に注意すれば、(2.15) より

$$\left| \int_0^t \langle F(u(\tau)), U_0(t-\tau)\varphi \rangle_{W_1} d\tau \right| \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty \qquad (2.16)$$

を得る。(2.14)、(2.16) と (2.13) より (2.7) が証明できる。

(b) (2.5) で $t'=0$ として $U_0(t)u_0$ と $u(t;0)$ の H での内積を計算すると

$$(u(t:\sigma),\ U_0(t)u_0)_H - (U_0(t-\sigma)U_0(\sigma)u_0,\ U_0(t)u_0)_H$$
$$= -\int_t^{\sigma}\langle F(u(\tau:\sigma)),\ U_0(\tau)u_0\rangle_{W_1} d\tau \qquad (2.17)$$

を得る。これより

$$\|u(t:\sigma)\|_H\|u_0\|_H \geqq \|u_0\|_H^2 - \left\{\int_\sigma^t \|F(u(\tau:\sigma))\|_{W_1'}^{r_1'} d\tau\right\}^{1/r_1'}\left\{\int_\sigma^t \|U_0(\tau)u_0\|_{W_1}^{r_1} d\tau\right\}^{1/r_1} \qquad (2.18)$$

と評価できる。ここで任意の $\sigma \geqq 0$ に対し

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t:\sigma)\|_H = 0 \qquad (2.19)$$

と仮定しよう。(2.18) より任意の $\sigma \geqq 0$ に対し

$$\left\{\int_\sigma^t \|F(u(\tau:\sigma))\|_{W_1'}^{r_1'} d\tau\right\}^{1/r_1'}\left\{\int_\sigma^t \|U_0(\tau)u_0\|_{W_1}^{r_1} d\tau\right\}^{1/r_1} \geqq \|u_0\|_H^2 \qquad (2.20)$$

が成り立つ。これは (2.8) 及び (2.3) に矛盾する。従って (b) が証明できた。

(c) (2.20) で $\sigma = 0$ とした時、(2.9) に矛盾することにより証明できる。

定理 2.2 の証明

$U_0(t)\psi$ ($\psi \in H$) と $u(t)$ の H での内積を計算すると

$$(u(t),\ U_0(t)\psi)_H - (U_0(t-t')u(t'),\ U_0(t)\psi)_H$$
$$= -\int_{t'}^{t}\langle F(u(\tau)),\ U_0(t)\psi\rangle\ d\tau \qquad (2.21)$$

を得る。(2.4) と (2.10) により

$$|(U_0(-t)u(t) - U_0(-t')u(t'),\ \psi)_H|$$
$$\leqq C_0\left\{\int_{t'}^{t}\|F(u(\tau))\|_{W_2'}^{r_2'} d\tau\right\}^{1/r_2'}\|\psi\|_{Y'} \qquad (2.22)$$

を得る。Y が反射的、H が Y で稠密であることより

$$\|U_0(-t)u(t) - U_0(-t')u(t')\|_Y \leqq C_0\left\{\int_{t'}^{t}\|F(u(\tau))\|_{W_2'}^{r_2'} d\tau\right\}^{1/r_2'} \qquad (2.23)$$

である。ここで(2.10)より $U_0(-t)u(t)$ は Y 上で Cauchy 列をなす。従って

$$\varphi^+ \equiv s\text{-}\lim_{t\to\infty} U_0(-t)u(t) \qquad (2.24)$$

とすれば、それが求めるものである。

§3　応用1（Schrödinger 方程式）

次の Cauchy 問題に適用しよう。

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + i\Delta u(t) + |u(t)|^{\rho-1}u(t) = 0 & (x,t)\in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

ここで、Δ は n 次元ラプラシアン、$\rho > 1$ とする。$A = \Delta$ $F(u(t)) = |u(t)|^{\rho-1}u(t)$、$X = H^1(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{D}(A) = H^3(\mathbb{R}^n)$ とすれば、(3.1)は(2.1)に帰着できる。結果を述べよう。

定理3.1

$X = H^1(\mathbb{R}^n)$、$H = H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1}\right)$、$W_1 = H^{-2k,\frac{\rho+1}{\rho}}(\mathbb{R}^n)$ $W_1' = L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\mathbb{R}^n)$、$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\rho+1}$、$\frac{1}{r_1'} = \frac{\rho}{\rho+1}$、$D = H^{-k,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{m-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(m > \frac{n}{2}\right)$ と置く。このとき $\rho > 1 + \frac{2}{n}$ $(n \geqq 1)$ に対し定理2.1の主張が成り立つ。

（注意）

$1 < \rho \leqq 1 + \frac{2}{n}$ に対し、$\|u(t)\|_X$ の $t\to\infty$ での挙動はわかっていない。

定理3.2

$X = H^1(\mathbb{R}^n)$、$H = H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1})$、$W_2 = H^{-2k-1,\,p_2}(\mathbb{R}^n)$

$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(\rho-1)}{2(\rho+1)} - \frac{(\rho-1)(1-\theta)}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$、$W_2' = H^{1,\,p_2'}(\mathbb{R}^n)$

$\frac{1}{p_2'} = 1 - \frac{1}{p_2}$、$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(\rho-1)}{2(\rho+1)}$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$、$\frac{1}{r_2'} = 1 - \frac{1}{r_2}$

$Y = H^1(\mathbb{R}^n)$、$Y' = H^{-2k-1}(\mathbb{R}^n)$ と置く。このとき

$1 + \frac{4}{n} \leqq \rho < \frac{n+2}{n-2}$ ($n = 1.2$ のとき ∞) に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

定理3.3

$X = H^1(\mathbb{R}^n)$、$H = H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1})$、$W_2 = H^{-2k,\,p_2}(\mathbb{R}^n)$

$\frac{1}{p_2} = \frac{n}{2(n+2)}$、$W_2' = L^{p_2'}(\mathbb{R}^n)$ $\frac{1}{p_2'} = 1 - \frac{1}{p_2} = \frac{n+4}{2(n+2)}$、$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{p_2}$

$\frac{1}{r_2'} = \frac{1}{p_2'}$、$Y = L^2(\mathbb{R}^n)$、$Y' = H^{-2k}(\mathbb{R}^n)$ と置く。このとき

$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\rho}(\mathbb{R}^n)$ ならば、$1 + \frac{4}{n} \leqq \rho < \rho_n$ ($n \leqq 4$ に対し $\rho_n = \infty$、$n \geqq 5$ に対し $\rho_n = \frac{(n+1)(n+4)}{n^2-3n-8}$ とする。)に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

定理の証明のために $U_0(t)$ についてよく知られている結果を述べておく。

補題3.4

(a) 任意の $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap H^m(\mathbb{R}^n)$ $(m > \frac{n}{2})$ に対し

$$\|U_0(t)\varphi\|_{L^\infty} \leqq C_\infty (1+|t|)^{-n/2} (\|\varphi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{H^m}) \qquad (3.2)$$

が成り立つ。ここで C_∞ は φ に依存しない正定数である。

(b) $\frac{1}{s} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$、$0 \leqq \frac{1}{s} < \frac{1}{2}$とする。このとき、正定数$C_0$が存在し、任意の$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$に対し

$$\| U_0(\cdot)\varphi \|_{L^s(\mathbb{R};L^p)} \leqq C_0 \|\varphi\|_{L^2} \tag{3.3}$$

が成り立つ。

証明

(a) $U_0(t)\varphi = (4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i\left(\frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{n\pi}{4}\right)\right\}\varphi(y)\,dy$

と表現できることと、$H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(m > \frac{n}{2})$ がソボレフの不等式から成り立つことより証明できる。

(b) Strichartz [22] §3 Corollary 1、Ginibre、Velo [5] Proposition 7 を参照してほしい。　Q.E.D.

他方(3.1)については次の存在定理が成り立つ。

補題3.5

(a) $n \geqq 1$、$\rho > 1$とする。$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$に対し、次を満たす解が存在する。

$$u(0) = u_0、\quad u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1) \tag{3.4}$$

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|u(\tau)\|_{L^{\rho+1}}^{\rho+1}\,d\tau \leqq \|u_0\|_{L^2}^2 \quad (0 \leqq t < \infty) \tag{3.5}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{\rho-1}|\nabla u(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau \leqq \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \tag{3.6}$$

$$(0 \leqq t < \infty)$$

$$u(t) = U_0(t-t')u(t') - \int_{t'}^t U_0(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \tag{3.7}$$

$$(0 \leqq t' < t < \infty)$$

この積分は $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1}\right)$ 上の Bochner 積分である。

(b) さらに $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\rho}(\mathbb{R}^n)$ と取れば、次も満たす。

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\rho-1} |\partial_t u(x,t)|^2 dx dt \leqq \|i\Delta u_0 + F(u_0)\|_{L^2}^2$$

$$(0 \leqq t < \infty) \qquad (3.8)$$

証明は Strauss [21]、Ginibre・Velo [6] Proposition 2.1 を参照してほしい。

以上の準備のもとに、定理 3.1 を証明しよう。

定理 3.1 の証明

(仮定 1) は明らかに満たされている。(仮定 2) の (2.1) を証明する。$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ で稠密より、任意の φ、$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し、(2.1) を示す。$B = \sqrt{-\Delta + 1}$ とする。補題 3.4 (a) (3.2) より

$$\begin{aligned}
|(U_0(t)\varphi, \psi)_{H^{-k}}| &= |(B^{-k}U_0(t)\varphi, B^{-k}\psi)_{L^2}| \\
&\leqq \|U_0(t)B^{-k}\varphi\|_{L^\infty} \|B^{-k}\psi\|_{L^1} \\
&\leqq C_\infty (1+|t|)^{-n/2} (\|\varphi\|_{H^{-k,1}} + \|\varphi\|_{H^{m-k}}) \|\psi\|_{H^{-k,1}}
\end{aligned}$$

を得る。従って (2.1) が成り立つ。

$D \hookrightarrow H$ は明らか。D が H で稠密であることも明らか。(2.3) を示す。

$$\begin{aligned}
\|U_0(t)\varphi\|_{H^{-2k,\rho+1}}^{\rho+1} &= \|U_0(t)B^{-2k}\varphi\|_{L^{\rho+1}}^{\rho+1} \\
&\leqq \|U_0(t)B^{-2k}\varphi\|_{L^\infty}^{\rho-1} \|U_0(t)B^{-2k}\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leqq C_\infty^{\rho-1}(1+|t|)^{-n(\rho-1)/2}(\|\varphi\|_{H^{-2k,1}} + \|\varphi\|_{H^{m-2k}})^{\rho-1} \|\varphi\|_{H^{-2k}}^2 \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

より、$-n(p-1)/2 < -1$、すなわち $p > 1+\frac{2}{n}$ ならば (2.3) が成り立つ。補題3.5 (a) で得られる解が（仮定4）を満たしていることは明らか。(2.6) 及び (2.8) は (3.5) より得られる。また、φ を $B^k u_0$ と変えて得られる (3.9) 及び (3.5) から $(\|u_0\|_{H^{-k,1}} + \|u_0\|_{H^{m-k}})$ が充分小さくなるように u_0 を取れば (2.9) が満たされることがわかる。以上より定理2.1が適用できる。　　Q.E.D.

定理3.2、定理3.3の証明の為に次の補題を準備する。

<u>補題3.6</u>

$u(t)$ は補題3.5 (a) で求まる解とし、さらに

$$u(t) \in L^a(\mathbb{R}_+; L^b) \cap L^c(\mathbb{R}_+; L^d) \tag{3.10}$$

とする。このとき

$$F(u(t)) \in L^{r_2'}(\mathbb{R}_+; H^{1,p_2'}) \tag{3.11}$$

が成り立つ。ここで

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(p-1)}{2b} - \frac{(1-\theta)(p-1)}{2d}, \quad \frac{1}{p_2'} = 1 - \frac{1}{p_2}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(p-1)}{2a} - \frac{(1-\theta)(p-1)}{2c}, \quad \frac{1}{r_2'} = 1 - \frac{1}{r_2}$$

$$(0 \leqq \theta \leqq 1)$$

である。

<u>証明</u>

$v(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_+)$ とし、$B = \sqrt{-\Delta+1}$ とする。

$$\int_0^\infty (F(u(t)),\ v(t))_{L^2}\,dt = \int_0^\infty (BF(u(t)),\ B^{-1}v(t))_{L^2}\,dt$$
$$\leqq \int_0^\infty\!\!\int |u(t)|^{\frac{\rho-1}{2}}(|\nabla u(t)| + |u(t)|)|u(t)|^{\frac{\rho-1}{2}}|B^{-1}v(t)|\,dx\,dt$$
$$\leqq \left\{\int_0^\infty\!\!\int |u(t)|^{\rho-1}(|\nabla u(t)|+|u(t)|)^2 dx\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{\rho-1}{2}}_{L^{\frac{(\rho-1)r_1}{2}}(\mathbb{R}_+;L^{\frac{(\rho-1)p_1}{2}})} \|B^{-1}v\|_{L^{r_2}(\mathbb{R}_+;L^{p_2})} \tag{3.12}$$

ここで $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{2}$ である。(3.10) から interpolation を使えば

$$\frac{2}{(\rho-1)p_1} = \frac{\theta}{b} + \frac{(1-\theta)}{d}、\qquad \frac{1}{(\rho-1)r_1} = \frac{\theta}{a} + \frac{(1-\theta)}{c}$$

とすることにより、(3.12) から (3.11) を得る。　　Q.E.D.

定理3.2の証明

(仮定1) 及び (仮定4) は明らかに満たされている。(2.10) は $u(t)\in L^{\rho+1}(\mathbb{R}^+;L^{\rho+1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^+;H^1)$ 及び $H^1(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^d(\mathbb{R}^n)$ $\left(\frac{1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)$ に注意すれば 補題3.6より成り立っていることがわかる。(仮定3) は補題3.4 (b) より $\frac{1}{p_2}$ と $\frac{1}{r_2}$ が

$$\frac{1}{r_2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right) \qquad 0 \leqq \frac{1}{r_2} < \frac{1}{2} \tag{3.13}$$

を満たしていれば成り立つ。$1 \leqq \frac{1}{r_2} < \frac{1}{2}$ より $0<\theta\leqq 1$ となる。(3.13) に $\frac{1}{r_2}$ と $\frac{1}{p_2}$ の定義式を代入すれば

$$(1-\theta)(n-2)\rho^2 + 2((n+2)\theta-2)\rho - (n+6)\theta - (n+2) = 0$$

を得る。この二次方程式の解 ρ に対し (仮定3) が成り立ちこれから ρ の範囲が定まる。　　Q.E.D.

定理3.3の証明

（仮定1）、（仮定4）は明らかに満たされている。（仮定3）は補題3.4 (b)より満たされている。（2.10）を示す。補題3.5の (3.6)と (3.8) により

$$|u(x,t)|^{\frac{\rho+1}{2}} \in H^1(\mathbb{R}^n_x \mathbb{R}_+)$$

を得る。ソボレフの不等式から

$$|u(x,t)|^{\frac{\rho+1}{2}} \in L^{q_2'}(\mathbb{R}^n_x \mathbb{R}_+)、\quad \frac{1}{q_2'} = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{(n+1)} \quad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

となる。これは

$$u(x,t) \in L^{\frac{(\rho+1)q_2'}{2}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$$

を意味し、これから

$$F(u(t)) \in L^{p_2'}(\mathbb{R}^n_x \mathbb{R}_+)、\quad \frac{1}{p_2'} = \frac{\rho}{\rho+1}\left(1 - \frac{\theta}{n+1}\right) \quad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

を得る。(2.10) を満たすためには、$\frac{1}{p_2'} = \frac{n+4}{2(n+2)}$ とならなければならない。これを計算すると

$$\rho = \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+1) - 4(n+2)\theta}$$

（$n \leqq 4$ に対し、$0 \leqq \theta < \frac{n(n+1)}{4(n+2)}$、$n \geqq 5$ に対し $0 \leqq \theta \leqq 1$）を得る。これより ρ の範囲が定まる。 Q.E.D.

§4 応用2（Klein-Gordon 方程式）

次の Cauchy 問題に適用しよう。

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t) - \Delta w(t) + w(t) + f(\partial_t w(t)) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n_x \mathbb{R}_+ \\ w(0) = w_0、\quad \partial_t w(0) = w_1 & (4.1) \end{cases}$$

$f(\partial_t w(t))$ は次の二つの場合を考える。

$$(f1) \qquad f(\partial_t w(t)) = |\partial_t w(t)|^{\rho-1}\partial_t w(t) \qquad (\rho > 1)$$

$$(f2) \qquad f(\partial_t w(t)) = (V_\gamma * |\partial_t w(t)|^2)\partial_t w(t)$$

ここで $V_\gamma(x) = |x|^{-\gamma}$ $(0 < \gamma < n)$ で $*$ は空間変数における合成積である。

$u = \begin{pmatrix} w \\ \partial_t w \end{pmatrix}$、$A = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix}$、$F(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\partial_t w) \end{pmatrix}$ と置けば (4.1) は (2.1) に帰着できる。$X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ である。結果を述べよう。

定理4.1

$f(\partial_t w(t))$ は (f1) を満たすとする。このとき、$X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$

$H = H^{-k+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1}\right)$、$W_1 = H^{-2k+1,\rho+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k,\rho+1}(\mathbb{R}^n)$

$W_1' = H^{1,\frac{\rho+1}{\rho}}(\mathbb{R}^n) \times L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\mathbb{R}^n)$、$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\rho+1}$、$\frac{1}{r_1'} = \frac{\rho}{\rho+1}$、

$D = (H^{m-k+1,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-k+1}(\mathbb{R}^n)) \times (H^{m-k,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-k}(\mathbb{R}^n))$ $\left(m > \mathrm{Max}\left\{\frac{n}{2}+1, n-1\right\}\right)$

と置けば、$\rho > 1 + \frac{2}{n}$ $(n \geqq 1)$ に対し定理2.1の主張が成り立つ。

(注意)

$1 < \rho \leqq 1 + \frac{2}{n}$ に対し $\|u(t)\|_{H^1 \times L^2}$ が $t \to \infty$ の時 0 に収束することが、Nakao [14] で証明されている。

定理4.2

$f(\partial_t w(t))$ は $(f1)$ を満たすとする。$X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$、

$H = H^{-k+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1}\right)$、

$W_2 = H^{-2k, p_2}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k-1, p_2}(\mathbb{R}^n)$　$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(\rho-1)}{2(\rho+1)} - \frac{(1-\theta)(\rho-1)}{4\rho}$　$(0 \leqq \theta \leqq 1)$

$W_2' = H^{2, p_2'}(\mathbb{R}^n) \times H^{1, p_2'}(\mathbb{R}^n)$　$\frac{1}{p_2'} = 1 - \frac{1}{p_2}$、$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(\rho-1)}{2(\rho+1)}$　$(0 \leqq \theta \leqq 1)$

$\frac{1}{r_2'} = 1 - \frac{1}{r_2}$、$Y = H^{1+e}(\mathbb{R}^n) \times H^{e}(\mathbb{R}^n)$、$Y' = H^{-2k+1-e}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k-e}(\mathbb{R}^n)$、

$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\rho}(\mathbb{R}^n))$ とする。

(a) $\theta = 1$、$e = \frac{1}{2}$ とする。このとき

$$1 + \frac{4}{n} \leqq \rho \leqq 1 + \frac{4}{n-1} \quad (n=1 \text{ のとき } \infty)$$

に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

(b) $e = 0$ とする。このとき

$$1 + \frac{4}{n} < \rho < \rho_n \quad (n \leqq 6 \text{ のとき } \rho_n = \infty、n \geqq 7 \text{ のとき } \rho_n = \frac{n}{n-6})$$

に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

次に $f(\partial_t w(t))$ が $(f2)$ を満たす場合について述べよう。

定理4.3

$f(\partial_t w(t))$ は $(f2)$ を満たす。このとき、$X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$

$H = H^{-k+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(k \geqq \frac{\delta}{2}\right)$、$W_1 = H^{-2k+1, \frac{2n}{n-\delta}}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k, \frac{2n}{n-\delta}}(\mathbb{R}^n)$、

$W_1' = H^{1, \frac{2n}{n+\delta}}(\mathbb{R}^n) \times L^{\frac{2n}{n+\delta}}(\mathbb{R}^n)$、$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1'} = \frac{1}{2}$　、

$D = (H^{m-k+1,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-k+1}(\mathbb{R}^n)) \times (H^{m-k,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-k}(\mathbb{R}^n))$ と置けば、$1 < \gamma < n$ ($n \geqq 2$) に対し定理2.1の主張が成り立つ。

（注意）

$0 < \gamma < 1$ に対し $\|u(t)\|_{H^1 \times L^2}$ が $t \to \infty$ の時、0に収束することは証明できる。$\gamma = 1$ の時も0に収束することが望まれるが、証明できていない。

定理4.4

$f(\partial_t w(t))$ は (f2) を満たす。$X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$、$H = H^{-k+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ ($k \geqq \frac{\gamma}{2}$)、$W_2 = H^{-2k, \frac{2n}{n-\gamma}}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k-1, \frac{2n}{n-\gamma}}(\mathbb{R}^n)$、$W_2' = H^{2, \frac{2n}{n+\gamma}}(\mathbb{R}^n) \times H^{1, \frac{2n}{n+\gamma}}(\mathbb{R}^n)$ $Y = H^{1+e}(\mathbb{R}^n) \times H^{e}(\mathbb{R}^n)$、$Y' = H^{-2k+1-e}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k-e}(\mathbb{R}^n)$、$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2'} = \frac{1}{2}$、$\binom{w_0}{w_1} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$、$n \geqq 3$ とする。

(a) $2 < \gamma < \frac{2n}{n-1}$、$e < \frac{n-\gamma}{2n}$ に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

(b) $2 < \gamma < 3$、$e = 0$ に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

定理の証明のために $U_0(t)$ について知られている結果を述べておこう。

補題4.5

(a) 任意の $\Phi \in H^{m,1}(\mathbb{R}^n) \times H^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ ($m > \mathrm{Max}\{\frac{n}{2}+1, n-1\}$) に対し

$$\|U_0(t)\Phi\|_{L^\infty \times H^{-1,\infty}} \leqq C_\infty (1+|t|)^{-n/2} \|\Phi\|_{H^{m,1} \times H^{m-1,1}} \qquad (4.2)$$

が成り立つ。ここで C_∞ は Φ に依存しない定数である。

(b) $0 \leqq \frac{1}{r} \leqq \frac{1}{2}$ とする。さらに

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{(n-1)r} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{2}{nr} \\ e < \frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \end{cases} \tag{4.3}$$

ならば、正定数 C_0 が存在し、任意の $\Phi \in H^{1-e}(\mathbb{R}^n) \times H^{-e}(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\| U_0(\cdot)\Phi \|_{L^r(\mathbb{R};\, L^q \times H^{-1,q})} \leqq C_0 \|\Phi\|_{H^{1-e} \times H^{-e}} \tag{4.4}$$

が成り立つ。また、$\frac{1}{q} \geqq \frac{1}{r}$ ならば (4.3) は

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{2}{(n-1)r} \leqq \frac{1}{q} \leqq \frac{1}{2} - \frac{2}{nr} \\ e = \frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \end{cases} \tag{4.3$'$}$$

とできる。

<u>系</u>

$0 \leqq \frac{1}{r} \leqq \frac{1}{2}$、$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{nr} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - \frac{2}{nr}$ とする。このとき、正定数 C_0 が存在して、任意の $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\| U_0(\cdot)\Phi \|_{L^r(\mathbb{R};\, L^q \times H^{-1,q})} \leqq C_0 \|\Phi\|_{H^1 \times L^2} \tag{4.5}$$

が成り立つ。

<u>証明</u>

(a) Brenner [3] Appendix 2、Bergh、Löfström [1] Theorem 6.2.4 Brenner、Thomée、Wahlbin [4] Theorem 2.1 より証明できる。

(b) Strichartz [22]、Marshall [8] を参照してほしい。

系は (b) でソボレフの不等式を使えば得られる。 Q.E.D.

Cauchy問題(4.1)に対しては、次の存在定理が成り立つ。ここでは、$w(t)$は実数値関数としよう。

<u>補題4.6</u>

(a) $f(\partial_t w(t))$は(f1)を満たし、$n \geqq 1$、$\rho > 1$とする。$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$に対し、次を満足する解が存在する。$u(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ \partial_t w(t) \end{pmatrix}$とおく。

$$u(0) = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \text{、} \quad u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ ; H^1 \times L^2) \tag{4.6}$$

$$\|\partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\partial_t w(\tau)\|_{L^{\rho+1}}^{\rho+1} d\tau \\ \leqq \|w_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2 \quad (0 \leqq t < \infty) \tag{4.7}$$

$$u(t) = U_0(t-t')u(t') - \int_{t'}^t U_0(t-\tau)F(u(\tau))\, d\tau \tag{4.8}$$
$$(0 \leqq t' < t < \infty)$$

ここで $F(u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\partial_t w(t)) \end{pmatrix}$ で、積分は$H^{-k+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1})$ 上のBochner積分である。

特に、$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\rho}(\mathbb{R}^n))$ならば

$$\|\nabla\partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta w(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 + 2\rho\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t w(\tau)|^{\rho-1} |\nabla\partial_t w(\tau)|^2 dx d\tau \\ \leqq \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta w_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 \quad (0 \leqq t < \infty) \tag{4.9}$$

$$\|\partial_t^2 w(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + 2\rho\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t w(\tau)|^{\rho-1} |\partial_t^2 w(\tau)|^2 dx d\tau \\ \leqq \|-\Delta w_0 + w_0 + f(w_1)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 + \|w_1\|_{L^2}^2 \quad (0 \leqq t < \infty) \tag{4.10}$$

が成り立つ。

(b) $f(\partial_t w(t))$は(f2)を満たし、$n \geqq 1$、$0 < \gamma < n$とする。$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$に対し、次を満足する解が存在する。

$$u(0) = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ ; H^1 \times L^2) \tag{4.11}$$

$$\|\partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 + \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \| V_{\frac{n+\gamma}{2}} * |\partial_t w(\tau)|^2 \|_{L^2}^2 \, d\tau$$
$$\leqq \|w_1\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 + \|w_0\|_{L^2}^2 \qquad (0 \leqq t < \infty) \tag{4.12}$$

$$u(t) = U_0(t-t')u(t') - \int_{t'}^t U_0(t-\tau) F(u(\tau)) \, d\tau \qquad (0 \leqq t' < t < \infty) \tag{4.13}$$

ここで、$F(u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\partial_t w(t)) \end{pmatrix}$ で、積分は $H^{-k+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $(k \geqq \frac{n}{2})$ 上の Bochner 積分である。

特に、$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ ならば

$$\|\nabla \partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta w(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 + 4\int_0^t \| V_{\frac{n+\gamma}{2}} * (\partial_t w(\tau) \nabla \partial_t w(\tau)) \|_{L^2}^2 \, d\tau$$
$$+ 2\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (V_\gamma * |\partial_t w(\tau)|^2) |\nabla \partial_t w(\tau)|^2 \, dx \, d\tau \tag{4.14}$$
$$\leqq \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta w_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

が成り立つ。

証明は Segal [18]、Lions [7]、Strauss [19, 20]、Reed [17] §5、Motai [12] Theorem 1 等を参照してほしい。

以上の準備のもとに定理を証明する。定理 4.1 の証明は定理 3.1 の場合と全く同様にできるので省略する。

定理4.2の証明

(a) (仮定1)、(仮定4) は明らかに満たされている。(4.9)、(4.10) 及び (4.1) より $\partial_t w(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ ; L^{2\rho})$ を得る。従って、$\partial_t w(t) \in L^{\rho+1}(\mathbb{R}_+ ; L^{\rho+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ ; L^{2\rho})$ に注意すると、補題 3.6 より、(2.10) が成り立っていることがわかる。ここで、

$\theta=1$ と取れば $\frac{1}{p_2}=\frac{1}{r_2}=\frac{1}{\rho+1}$ である。補題4.5(b)にこれを適用すれば、$e=\frac{1}{2}$、$1+\frac{4}{n}\leqq\rho\leqq1+\frac{4}{n-1}$ の時、(仮定3)が満たされていることがわかる。

(b) (仮定3)が満たされていることを示せばよいが、そのために補題4.5の系を使う。ρの範囲はそれから定まる。詳しい証明はMotai [13] を参照してほしい。　　Q.E.D.

次に $f(\partial_t w(t))$ が $(f2)$ を満たす場合について証明しよう。そのために次の補題を準備する。

補題4.7

$a(x)$、$b(x)$、$c(x)$ を適当な関数とする。このとき、

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}(V_\gamma * a)(x)b(x)c(x)\,dx\right|\leqq C_1\|V_{\frac{n+\gamma}{2}}*a\|_{L^2}\|b\|_{L^2}\|c\|_{L^{\frac{2n}{n-\gamma}}} \tag{4.15}$$

が成り立つ。Mは正定数である。

証明はMotai [12] Lemma 2.4を見てほしい。

補題4.8

$$w(t)\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H^j)、\int_0^\infty\|V_{\frac{n+\gamma}{2}}*|w(t)|^2\|_{H^j}^2\,dt<\infty\quad(j=0,1)$$

とする。このとき

$$\|f(w)\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{j,\frac{2n}{n+\gamma}})}\leqq C_2\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^j)}\left\{\int_0^\infty\|V_{\frac{n+\gamma}{2}}*|w(t)|\|_{H^j}^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.16}$$

が成り立つ。

証明

$j=0、1$ は同様に証明できるので $j=0$ のときを示す。

$v(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ とする。補題4.7より

$$|\int_0^\infty (f(w(t)),\ v(t))_{L^2}\,dt| = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} V_\gamma * |w(t)|^2 w(t)\, v(t)\, dx\, dt$$
$$\leqq C_1 \int_0^\infty \| V_{\frac{n+\gamma}{2}} * |w(t)|^2 \|_{L^2} \| w(t) \|_{L^2} \| v(t) \|_{L^{\frac{2n}{n-\gamma}}}\, dt$$
$$\leqq C_1 \| w \|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\, L^2)} \left\{ \int_0^\infty \| V_{\frac{n+\gamma}{2}} * |w(t)|^2 \|_{L^2}^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\infty \| v(t) \|_{L^{\frac{2n}{n-\gamma}}}^2 dt \right\}^{1/2}$$

これより(4.16)で$j=0$の場合を得る。 Q.E.D.

定理4.3の証明

(2.3)を示す。$\Phi = \binom{\varphi}{\psi} \in D$に対し、$U_0(t)\Phi = \binom{w_0(t)}{\partial_t w_0(t)}$と書ける。補題4.5(a)より

$$\| w_0(t) \|_{H^{-2k+1,\frac{2n}{n-\gamma}}}^2 = \| B^{-2k+1} w_0(t) \|_{L^{\frac{2n}{n-\gamma}}}^2$$
$$\leqq \| B^{-2k+1} w_0(t) \|_{L^2}^{\frac{2(n-\gamma)}{n}} \| B^{-2k+1} w_0(t) \|_{L^\infty}^{\frac{2\gamma}{n}}$$
$$\leqq C_\infty^{\frac{2\gamma}{n}} (1+|t|)^{-\gamma} \left(\| B^{-2k+1} \varphi \|_{L^2} + \| B^{-2k} \psi \|_{L^2} \right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n}}$$
$$\times \left(\| B^{-2k+1} \varphi \|_{H^{m,1}} + \| B^{-2k+1} \psi \|_{H^{m-1,1}} \right)^{\frac{2\gamma}{n}}$$

$\| \partial_t w_0(t) \|_{H^{-2k,\frac{2n}{n-\gamma}}}^2$も同様に評価できる。従って$\gamma > 1$ならば、$U_0(t)\Phi \in L^2(\mathbb{R};\, H^{-2k+1,\frac{2n}{n-\gamma}} \times H^{-2k,\frac{2n}{n-\gamma}})$が示せる。(2.6)は補題4.6(4.12)及び補題4.8で$j=0$とした(4.16)より得られる。他の部分は定理3.1と同様に証明できる。 Q.E.D.

定理4.4の証明

(a)(仮定1)、(仮定4)は明らかに満たされている。補題4.6(4.12)及び(4.14)と補題4.8(4.16)($j=1$)より(2.10)が成り立っていることがわかる。補題4.5(b)を$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$、$\frac{1}{q}=\frac{n-\gamma}{2n}$とし

て適用すれば、(4.3) より ρ の範囲が定まり、そこで (仮定3) が満たされている。

(b)補題4.5の系を適用すれば ρ の範囲が定まる。あとは(a)と同様に証明できる。　　Q.E.D.

§5　応用3 (波動方程式)

次の Cauchy 問題に適用しよう。

$$\begin{cases} \partial_t^2 w(t) - \Delta w(t) + |\partial_t w(t)|^{\rho-1}\partial_t w(t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ w(0) = w_0 \ ,\quad \partial_t w(0) = w_1 & (\rho > 1) \end{cases} \qquad (5.1)$$

$$u = \begin{pmatrix} w(t) \\ \partial_t w(t) \end{pmatrix} ,\quad A = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} ,\quad F(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ |\partial_t w(t)|^{\rho-1}\partial_t w(t) \end{pmatrix}$$

と置けば、(5.1)は(2.1)に帰着できる。$X = H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{D}(A) = H^{2,0,2}(\mathbb{R}^n) \times H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n)$ である。次の結果を得る。

<u>定理5.1</u>

$X = H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$、$H = H^{1,-k,2}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ $\left(k \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1}\right)$ $W_1 = H^{1,-2k,\rho+1}(\mathbb{R}^n) \times H^{-2k,\rho+1}(\mathbb{R}^n)$、$W_1' = H^{1,0,\frac{\rho+1}{\rho}}(\mathbb{R}^n) \times L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\mathbb{R}^n)$、$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\rho+1}$、$\frac{1}{r_1'} = \frac{\rho}{\rho+1}$、$D = \left(H^{m+1,-k,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{1,m-k-\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^n)\right) \times \left(H^{m,-k,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{m-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)\right)$ $\left(m > \frac{n+1}{2}\right)$ と置けば、$\rho > 1 + \frac{2}{n-1}$ $(n \geq 2)$ に対し、定理2.2の主張が成り立つ。

(注意)

$1 < \rho \leq 1 + \frac{2}{n-1}$ に対する $\|u(t)\|_{H^{1,0,2} \times L^2}$ の $t \to \infty$ での挙動は、わかっていない。

定理 5.2

$n \geqq 2$ とする。$X = H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$、$H = H^{1,-k,2}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$
$\left(k \geqq \frac{n}{2} - \frac{n}{\rho+1}\right)$、$W_2 = H^{e,-e-2k,P_2}(\mathbb{R}^n) \times H^{e-1,-e-2k,P_2}(\mathbb{R}^n)$
$\frac{1}{P_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(\rho-1)}{2(\rho+1)} - \frac{(1-\theta)(\rho-1)}{4\rho}$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$、$W_2' = H^{2-e,e,P_2'}(\mathbb{R}^n) \times H^{1-e,e,P_2'}(\mathbb{R}^n)$
$\frac{1}{P_2'} = 1 - \frac{1}{P_2}$、$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{2} - \frac{\theta(\rho-1)}{2(\rho+1)}$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$、$\frac{1}{r_2'} = 1 - \frac{1}{r_2}$、
$Y = H^{1,e,2}(\mathbb{R}^n) \times H^e(\mathbb{R}^n)$ $\quad e = \frac{n+1}{2P_2} - \frac{n-3}{4}$、$Y' = H^{1,-e-2k,2}(\mathbb{R}^n) \times H^{-e-2k}(\mathbb{R}^n)$
$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \in H^{2,0,2}(\mathbb{R}^n) \times \left(H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n) \cap L^{2\rho}\right)$ とする。このとき

$$1 + \frac{4}{n-1} \leqq \rho < \rho_n \quad (2 \leqq n \leqq 5 \text{ のとき } \rho_n = \infty,$$
$$n \geqq 6 \text{ のとき } \rho_n = \frac{n-1}{n-5})$$

に対し、定理2.2の主張が成り立つ。ここで、ρ と θ は次の関係により定まる。

$$\{(n+3)\theta + (n-5)\}\rho^2 - 2\{(n+1)\theta + 2\}\rho - (1-\theta)(n-1) = 0 \tag{5.2}$$
$$\left(\operatorname{Max}\left\{0, \frac{5-n}{n+3}\right\} < \theta \leqq 1\right)$$

定理の証明のために次の補題を準備する。

補題 5.3

(a) 任意の $\Phi \in \left(H^{m,0,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)\right) \times \left(H^{m-1,0,1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-1,m-\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^n)\right)$
$\left(m > \frac{n+1}{2}\right)$ に対し

$$\|V_0(t)\Phi\|_{L^\infty \times H^{-1,\infty}} \leqq C_\infty (1+|t|)^{-\frac{n-1}{2}} \left(\|\Phi\|_{H^{m,0,1} \times H^{m-1,0,1}} + \|\Phi\|_{H^{m-\frac{1}{2}} \times H^{-1,m-\frac{1}{2},2}}\right) \tag{5.3}$$

ここで C_∞ は Φ に依存しない正定数である。

(b) $0<\frac{1}{r}<\frac{1}{2}$、$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{2}{(n-1)r}$、$e=\frac{n+1}{2q}-\frac{n-3}{4}$ とする。正定数 C_0 が存在し、任意の $\Phi\in H^{1-e,0,2}(\mathbb{R}^n)\times H^{-e,0,2}(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\|U_0(\cdot)\Phi\|_{L^r(\mathbb{R};L^q\times H^{-1,0,q})}\leqq C_0\|\Phi\|_{H^{1-e,0,2}\times H^{-e,0,2}} \tag{5.4}$$

が成り立つ。

証明は(a)については、Brenner[2]、Pecher[15]を参照してほしい。(b)はPecher[16] Theorem 1 を参照してほしい。

Cauchy問題(5.1)に対し、次の存在定理が成り立つ。ここでも $w(t)$ は実数値関数とする。

<u>補題5.4</u>

$n\geqq 1$、$\rho>1$ とする。$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}\in H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し、次を満たす解が存在する。$u(t)=\begin{pmatrix} w(t) \\ \partial_t w(t)\end{pmatrix}$ とおく。

$$u(0)=\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix},\quad u(t)\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H^{1,0,2}\times L^2) \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_t w(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 &+ 2\int_0^t\|\partial_t w(\tau)\|_{L^{\rho+1}}^{\rho+1}\,d\tau \\ &\leqq \|w_1\|_{L^2}^2+\|\nabla w_0\|_{L^2}^2 \quad (0\leqq t<\infty)\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$u(t)=U_0(t-t')u(t')-\int_{t'}^{t}U_0(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \quad (0\leqq t'<t<\infty) \tag{5.7}$$

ここで $F(u(t))=\begin{pmatrix} 0 \\ |\partial_t w(t)|^{\rho-1}\partial_t w(t)\end{pmatrix}$ で、積分は $H^{1,-k,2}(\mathbb{R}^n)\times H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ ($k\geqq\frac{n}{2}-\frac{n}{\rho+1}$) 上の Bochner 積分である。

特に $\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}\in H^{2,0,2}(\mathbb{R}^n)\times(H^{1,0,2}(\mathbb{R}^n)\cap L^{2\rho}(\mathbb{R}^n))$ ならば

$$\begin{aligned}\|\nabla\partial_t w(t)\|_{L^2}^2+\|\Delta w(t)\|_{L^2}^2 &+ 2\rho\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_t w(\tau)|^{\rho-1}|\nabla\partial_t w(\tau)|^2\,dx\,dt \\ &\leqq \|\nabla w_1\|_{L^2}^2+\|\Delta w_0\|_{L^2}^2 \quad (0\leqq t<\infty)\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\|\partial_t^2 w(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\partial_t w(t)\|_{L^2}^2 + 2\rho\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_t w(\tau)|^{\rho-1}|\partial_t^2 w(\tau)|^2 dx\,d\tau \tag{5.9}$$
$$\leqq \|-\Delta w_0 + f(w_1)\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 \quad (0 \leqq t < \infty)$$

が成り立つ。

証明はKlein-Gordon方程式の場合と同様にできる。

以上の準備のもとに定理の証明をする。定理5.1は定理3.1の証明と同様にできるので省略する。

定理5.2の証明

(仮定1)、(仮定4)は明らかに満たされている。(2.10)は

$$H^{2,p_2'}(\mathbb{R}^n)\times H^{1,p_2'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{2-e,e,p_2'}(\mathbb{R}^n)\times H^{1-e,e,p_2'}(\mathbb{R}^n)$$

に注意すれば、定理4.2と同様に証明できる。(仮定3)は補題5.3(b)を適用すれば(5.2)のもとで成り立つことがわかる。(5.2)よりρの範囲が定まる。　　Q.E.D.

References

[1] Bergh, J. and Löfström, J., Interpolation Spaces, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1976.

[2] Brenner, P., On L_p-$L_{p'}$ estimates for wave equation, Math. Z., 145(1975),251-254.

[3] ______, On scattering and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations, J. Differential Equations, 56 (1985), 310-344.

[4] Brenner, P. and Thomée, V. and Wahlbin, L. B., Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems, Lecture notes in mathematics, 434 (1975), Berlin- Heidelberg-New York, Springer-Verlag.

[5] Ginibre, J. and Velo, G., On a class of nonlinear Schrödinger equtions I, J. Funct. Anal., 32(1979),1-32.

[6] ______, The global Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation revisted, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 2(1985),309-327.

[7] Lions, J.L., Une remarque sur les problémes d'évolution non linéaires dans les domaines non cylindriques, Rev. Roumaine Math. Pure Appl., 9(1964), 11-18.

[8] Marshall, B., Mixed norm estimates for the Klein-Gordon eqution, Proceedings of a Conference on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund 1981 vol.2, 638-645, Springer-Verlag, 1983.

[9] Matsumura, A., Energy decay of solutions of dissipative wave equations, Proc. Japan Acad., 53, Ser. A (1977), 232-236.

[10] Mochizuki, K., Scattering theory for wave equations with dissipative terms, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12 (1976), 383-390.

[11] _____, The scattering theory for wave equations, Kinokuniya, 1984. [Japanese]

[12] Motai, T., On the Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation with a cubic convolution, TSUKUBA J. MATH., 12(1988), 353-369.

[13] ______, Asymptotic behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with a nonlinear dissipative term, TSUKUBA J. MATH. 15(1991), 151-160.

[14] Nakao, M., Energy decay of the wave equation with a nonlinear dissipative term, Funkcialaj Ekvacioj, 26 (1983), 237-250.

[15] Pecher, H., L^p-Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen I, Math. Z., 150(1976), 159-183.

[16] ______, Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation, Math. Z., 185(1984),261-270.

[17] Reed, M., Abstract nonlinear wave equation, Lecture notes in mathematics, 507(1976), Berlin-Heidelberg-New York, Springer.

[18] Segl, I. E., The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction, Bull. Soc. Math. Fr., 91(1963),129-135.

[19] Strauss, W. A., The energy method in nolinear partial differential equations, Brasil Inst. Mat. Pura e Aplicada, 1969.

[20] ______, On weak solutions of similinear hyperbolic equations, An. Acd. Bras. Cienc., 42(1970),645-651.

[21] ______, The nonlinear Schrödinger equation, in Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1976.

[22] Strichartz, R. S., Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, Duke Math. J., 44(1977),705-714.