数理解析研究所講究録
第797巻 1992年 102-109

Hasse-Weil L函数のε因子.

東大理 斎藤 毅 (Takeshi Saito)

一般に代数体上の代数多様体に対し. そのHasse-Weil L函数が定義されるが. これは全平面に解析接続され函数等式を満たすと予想される. ε-factorというのはその函数等式にあらわれる定数のことであるが. これは各素点ごとに定義される局所因子の積に分解されると予想されている. ここではこの局所因子をtamely ramifiedな場合に計算する公式を与える.

証明など詳細については.

"ε-factor of a tamely ramified sheaf on a variety"

東大プレプリントシリーズ (1991)

他には.

"Chern類のあるrefinementとそのL函数への応用"

代数幾何学シンポジウム報告集 (1991. 城崎)

"数論におけるvanishing cycle"

代数幾何とHodge理論報告集 (1991. 数理研)

をみて下さい

§1. 一般論の復習.

はじめに Hasse-Weil L 函数と局所 ε 因子の一般論をおおまかに復習する. くわしくは.

J.-P. Serre. Facteurs locaux des fonctions zeta des variétés algébriques 全集 vol 2. 581-592.

P. Deligne Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L. Spr LNM 349.

k を代数体 X を k 上射影的かつ smooth な多様体とし. m を整数 ≥ 0 とする. このとき X の m-th Hasse-Weil L 函数は

$$L(H^m(X), s) = \prod_{p : k\text{の有限素点}} P_p(H^m(X), Np^{-s})^{-1}$$

と無限積で定義される. ここで右辺は

$$P_p(H^m(X), t) = \det(1 - Fr_p t : H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_p})$$

と定義される t の多項式である. Fr_p は p での幾何的 Frobenius (i.e. Np 乗写像の逆), ℓ は p でわれない素数. I_p は p での惰性群. 上つき添字は不変部分を意味し. 右辺は ℓ によらない $\mathbb{Z}$ 係数の多項式と予想される. Weil 予想により X が p で good reduction ならばこの予想は正しく. さらに無限積が. $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{m}{2}+1$ で絶対収束することが従う.

Hasse-Weil L 函数 $L(H^m(X), s)$ は全 s 平面に解析接続され. 次のような函数等式をみたすと予想されている. 各無限素点に対しそこでの Hodge 構造から Γ-factor が定まり (定義は略).

$\Lambda(H^m(X), s) = L(H^m(X), s) \times \Gamma$-factor とおくと

$$\Lambda(H^m(X), s) = E\cdot F^{-s}\cdot \Lambda(H^m(X), m+1-s)$$

をみたす．ここでEとFは次のような定数である．まずFは，Dをkの絶対判別式$D_{k/\mathbb{Q}}$，b_mをBetti数$\dim H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$，$f$を$H^m$のArtin導手とすると$F = D^{b_m}\cdot N(f)$である．ここで$f=\prod_{p:有限} p^{f_p}$は$k$の整idealで，各$p$に対し，

$$f_p = \dim H^m - \dim (H^m)^{I_p} + Sw_p H^m$$

ここで$Sw_p H^m \in \mathbb{N}$はSwan導手とよばれる．H^mのpでのwildな分岐のmeasureである．H^mがpで不分岐であることとf_pが0であることとは同値であり，fの台は有限となる．Eは$E^2=F^{m+1}$をみたす．つまり，Fは各素点でのH^mの分岐に関する量の寄与の積となっている．さらにEの符号は以下でみるようにもう少し微妙な量であるが，やはり各素点の寄与の積となる．

以上$H^m(X)$のL函数についてみたが，一般のmotif Vに対しても（これは大体，Dedekind ζに対しArtin Lを考えることに相当する）L函数の定義，解析接続，函数等式などが同様に予想される．但し函数等式についてはVのLとVの双対のLとの関係式になる．このとき定数Fについては上と全く同様な式がなりたつと予想されるが，Vは一般には自己双対的でないからEとFの関係は$E\cdot\bar{E} = F^{w+1}$となる（wはVのweight）．

しかしその場合にも上と同様にEを各素点の寄与の積にかけると予想される。それが以下に述べる局所ε因子の理論である。

Kを非archimedes局所体とし、VをKの絶対Galois群G_Kのl進表現とする($l \neq p$:剰余標数)。このときKの加法的指標ψとHaar measure dxをとると局所ε因子$\varepsilon_K(V,\psi,dx)$が定義される。詳細は略すが、これは次のような性質で特徴づけられるものである。

0. ψ, dxの変更に関する変換則。
1. Vの完全列に対し乗法的。
2. 次数0の仮想表現のKの有限次拡大からの誘導表現での不変性。
3. 1次表現の場合の具体的定義。

Kがarchimedes的の場合にはHodge構造Vに対して局所ε因子$\varepsilon_K(V,\psi,dx)$が定義される。それを用いると、Kを大域体、VをK上のmotifとするとき、$dx = \otimes dx_v$をアデール$\mathbb{A}_K$の玉河測度 i.e. $\int_{\mathbb{A}_K/K} dx = 1$ かつほとんどすべてのvで$\int_{O_v} dx_v = 1$とし$\psi = (\psi_v)_v$を$\mathbb{A}_K/K$の加法的指標とすると

$$E = \prod_v \varepsilon_{K_v}(V_v, \psi_v, dx_v)$$

となると予想される。右辺はV_vが不分岐、$\mathrm{ord}\,\psi_v = 0$、$\int_{O_v} dx_v = 1$なら1だから有限積となる。

局所ε因子は定義をよくみると実質的にGauss和であることがわかる．特にVがtamely ramifiedな場合には具体的に次のように書ける．εの変種ε_0を

$$\varepsilon_K(V,\psi,dx) = \varepsilon_{0,K}(V,\psi,dx)\cdot\det(-Fr, V^I)$$

で定義する．V^Iは惰性群による不変部分．Frは剰余体のgeom. Frobeniusである．ε_0も上の0〜3で特徴づけられる．以下VはG_Kのtamely ramifiedな表現とし，$\int_{m_K} dx=1$．$\mathrm{ord}\,\psi=-1$とする．ψが誘導する$F=O_K/m_K$の指標$(\neq 1)$をψ_0とする．Vは制限により惰性群のtameな商群$\hat{\mathbb{Z}}'(1)=\varprojlim_{p\nmid m}\mu_m(\bar{F})$の表現$V_0$を定める．このとき局所ε因子$\varepsilon_{0K}(V,\psi,dx)$は，$V_0$(と$\psi_0$)のみで定まり，次のようにGauss和の積として定義される$\tau_F(V_0,\psi_0)$と一致する．V_0は$V_\chi=\bigoplus_{i=0}^{f-1} g^{i*}\chi$の形の表現いくつかの直和にかける．ここで$\chi$は$\hat{\mathbb{Z}}'(1)$の1次指標であり，．．を$\chi$の位数としたとき，$f$は$F$の位数$q$の$(\mathbb{Z}/m)^\times$での位数で，$g^{i*}$は$\hat{\mathbb{Z}}'(1)$の自己同型$q^i$倍によるひきもどしである．このとき$E$を$F$の$f$次拡大として，$\chi$を$E^\times \xrightarrow{\text{引集}} \mu_m(F)$により$E^\times$の指標とみて$\tau_F(V_\chi,\psi_0)=-\sum_{a\in E^\times}\chi^{-1}(a)\,\psi_0(\mathrm{Tr}_{E/F}(a))$とおき，$V_0=\bigoplus_i V_{\chi_i}$に対しては$\tau_F(V_0,\psi_0)=\prod_i \tau_F(V_{\chi_i},\psi_0)$と定義する．こうすると

$$\varepsilon_{0K}(V,\psi,dx)=\tau_F(V_0,\psi_0)=\prod_i \tau_F(V_{\chi_i},\psi_0).$$

§2. 幾何的な場合

ここでは局所体のℓ進表現が多様体(上のℓ進層)のcohomologyからくる場合について、その局所ε因子の具体的な公式を説明する。応用として有限体上の多様体上のℓ進層についてそのcohomologyのdeterminantへのFrobeniusの作用を与える公式について述べる。

Kを非archimedes局所体、O_Kをその整数環とする。XをO_K上proper regularなschemeでそのgeneric fiber X_Kがsmoothなものとする。$U\subset X_K$をopenとし、$D=X-U$がXの単純正規交叉因子になるとする。XはO_K上log smoothであると仮定する。すなわち、$\Omega^1_{X/O_K}(\log D/\log F)=(\Omega^1_{X/O_K}\oplus O_X\otimes j_*O_U^\times/da-a\otimes a,\ a\in O_X\cap j_*O_U^\times;\ 1\otimes b,\ b\in K^\times)$ (ここで$j:U\hookrightarrow X$)と定義したときこれが局所的に自由となると仮定する。この条件は例えばclosed fiber $X_F=\sum r_iD_i$の各既約成分D_iでの重複度r_iが剰余体Fの標数pで割れなければ満たされる。さらに$\mathcal{F}$をU上の$\ell(\neq p)$進層とし、Dにそう分岐がtameと仮定する。次の局所ε因子を考える。

$$\varepsilon_0(U/K,\mathcal{F},\psi,dx)=\prod\varepsilon_{0K}(\quad U_{\bar K},\mathcal{F}),\psi,dx)^{(-1)^i}.$$

ここでψ, dxは前節と同様にそれぞれ$\mathrm{ord}\,\psi=-1$, $\int_{m_K}dx=1$をみたす加法的指標、Haar測度である。このとき次の公式がなりたつ。

定理　上の記号のもとで、

$$\varepsilon_0(U/K,\mathcal{F},\psi,dx)=\chi(-c_{X,U/O_K})\times\tau_{D/F}(\mathcal{F},\psi_0)$$
$$\times\,\varepsilon_0(U/K,\mathbb{Q}_\ell,\psi,dx)^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}$$

$$\varepsilon_0(U/K,\mathbb{Q}_\ell,\psi,dx)=\prod_i\tau_F(V_{m_i},\psi_0)^{[F_i:F]\times c_i}\times(-1)^{\chi_c(U_{\bar K})}$$

右辺を説明する。詳細については冒頭の引用文献をみて下さい。まず大雑把にいうと、第一式右辺第一項は、$\mathcal{F}$に対応する基本群のℓ進表現の行列式指標を類体論の相互写像を使って(X,U)の相対標準類でとらせた値、第二項は$\mathcal{F}$のDにそっての分岐で定まるGauss和の積。第2式の右辺はclosed fiberの重複度で定まるGauss和の積である。順にくわしくみよう。

ℓ進層$\mathcal{F}$は基本群$\pi_1(U)^{\mathrm{tame}}$のℓ進表現ρと対応する。すると$\chi=\det\rho$は$\pi_1(U)^{\mathrm{ab,tame}}$の指標を定める。類体論の相互写像$CH^n_{X_F}(X,D)\to\pi_1(U)^{\mathrm{ab,tame}}$により$\chi$は$CH^n_{X_F}(X,D)$の指標とみなせる。ここで$n=\dim X$で$CH^n_{X_F}(X,D)$は(台つき)相対Chow群である。$(X,U)$の相対標準類$c_{X,U/O_K}$は今log smoothと仮定しているので$(-1)^n\sum_i m_i\otimes c_{n-1}(\Omega^1_{D_i/F_i}(\log D_i-D_i^*))$と定義される。ここで$m_i$は重複度$\nu_i$の$p$と素な部分、$D_i^*$は既約成分$D_i$から他の$D$の成分との共通部分をひいたものである。

ℓ進表現ρ　制限により定まる各D_iでの惰性群のtameな商$\hat{\mathbb{Z}}'(1)$の表現をρとし、D_iの定数体をF_iとする。またD_i^*のEuler

数を $c_i = \chi_c(D_i^* \otimes_{F_i} \bar{F}_i)$ とおく。各重複度 r_i の p 巾部分を g_i とし、$\psi_0^{(g_i)}(a) = \psi_0(a^{g_i})$ とする。前節で定めた Gauss 和を用いて $\tau_{D/F}(\mathcal{F}, \psi_0) = \prod_i \tau_{F_i}(\rho_i, \psi_0^{(g_i)} \circ \mathrm{Tr}_{F_i/F})^{c_i}$ と定義する。最後に V_{m_i} は $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の商 μ_{m_i} の正則表現を $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の表現とみたもので、これについても前節のように Gauss 和を定義する。

定理の証明は vanishing cycle を計算することによりなされる。これについてくわしくは引用文献をみて下さい。

最後に上で述べた応用についてのべる。F を有限体とし、X を F 上 projective smooth な多様体、U をその open で $D = X - U$ が単純正規交叉因子となるものとする。$\mathcal{F}$ を U 上の smooth な $\ell(\neq \mathrm{ch} F)$ 進層で D にそう分岐が tame なものとする。ここで F の geom. Frobenius の $\mathcal{F}$ 係数の cohomology への作用の行列式

$\prod_i \det(Fr; H_c^i(U_{\bar F}, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}} \overset{\mathrm{def}}{=} \det(Fr; R\Gamma_c(U_{\bar F}, \mathcal{F}))$ を考える。

すると

定理
$$\frac{\det(Fr; R\Gamma_c(U_{\bar F}, \mathcal{F}))}{\det(Fr; R\Gamma_c(U_{\bar F}, \mathbb{Q}_\ell))^{\mathrm{rk}\,\mathcal{F}}} = \chi(-c_{X,U/F}) \cdot \tau_{D/F}(\mathcal{F}, \psi_0)$$

がなりたつ。ここで右辺は前と同様に $\mathcal{F}$ に対応する ℓ 進表現 ρ の行列式 χ の相対標準類での値と、Gauss 和の積である。証明は次元に関する帰納法により、Lefschetz pencil をとって上の定理と、標数 p の大域体の場合には ε の積表示が Laumon により示されていることから従う。