数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 27-37

年齢に依存した費用構造を持つ最適な小修理・取替え問題について

瀬川　良之
京都学園大学　経営学部
大西　匡光，　茨木　俊秀
京都大学　工学部　数理工学科

あらまし—平均費用規範のもとでの信頼性システムの最適小修理・取替え問題をセミ・マルコフ決定過程として定式化する．システムの費用構造は年齢に依存すると仮定する．これまでの研究に比べより弱い仮定のもとで，全ての政策の中で最適政策が t –政策であることが示される．すなわち，年齢 t 以前の故障に対しては小修理が行われ，年齢 t 以後の故障に対しては取替えを行うことが最適である．

1. はじめに

小修理と取替えは実際の信頼性システムに対して実践的な保全活動を表現するのに有効な数学的モデルである．小修理とは年齢が変わらないことを除いてその機能は回復するように故障したシステムを修理する保全活動のことであり，一方，取替えとは全体のシステムを置き換えることである．この３０年余りの間多くの研究がこの様な保全活動を含んだ様々な保全問題に対してなされてきた．小修理を含むこの様な保全問題の最初の研究は Barlow and Hunter [1] によって 1960 年になされた．彼らは保全活動として小修理と予防取替えを考慮した．一方，Phelps [3] は平均費用規範のもとで小修理と取替えを扱った保全問題を議論し，セミ・マルコフ決定過程として定式化した．故障時間分布が IFR という仮定のもとで全ての許容政策の中で最適政策が t 政策であること，すなわち，t 以前の故障に対しては小修理を行い，t 以後の故障に対しては取替えを行うようなしきい年齢 t が存在することを証明した．

この論文では，費用構造が年齢に依存すると仮定した上で，平均費用規範のもとでの小修理・取替え問題を議論する．この問題はセミ・マルコフ決定過程として定式化され Phelps [3] のそれより弱い仮定のもとで全ての政策の中で最適政策が t 政策のクラスの中に存在することを示す．

2. モデルと最適性方程式

以下に表されるような信頼性システムを考えよう．保全活動は故障取替えと小修理である。年齢 x における故障取替えとは故障したシステムを新しいものに取り替える保全活動である，すなわち，システムの年齢は 0 になり $c_f(x)$ のコストを必要とする．年齢 x における小修理とは故障したシステムをその年齢を変える事なく機能を回復させるような保全活動であり，$c_m(x)$ のコストを必要とする．これらの保全活動に要する時間は無視できるものと仮定する．システムの故障時間分布関数は $F(x)$ であり，それは連続な密度関数 $f(x)$ を持つものとする．信頼度関数を $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, 故障率関数を $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ で表すものとする．全ての $x \in [0, \infty)$ に対して $\bar{F}(x)$ は正であるとする．問題は平均費用，すなわち，無限期間にわたって平均を取った単位時間当りの保全費用の和の期待値を最小化するような小修理・取替え政策を見い出すことである．

以下の仮定を設ける．

仮定 1　$c_f(x)$ と $c_m(x)$ は x に関して微分可能，非減少，有界な関数であり，

$$c_f(x) > c_m(x) > 0, \quad \forall x \in [0, \infty) \tag{2.1}$$

を満たす．

仮定 2　以下に定義される関数は準凸である，

$$Y(x) = \frac{1}{x}\left\{c_f(x) - c_m(x) + \int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds\right\} \tag{2.2}$$

すなわち，ある $\bar{x} \in [0, \infty]$ が存在して $Y(x)$ は $(0, \bar{x})$ において非増加であり $[\bar{x}, \infty)$ において非減少である．($\bar{x} = 0$ と $\bar{x} = \infty$ は $(0, \infty)$ の全区間においてそれぞれ $Y(x)$ が非減少であること，および，非増加であることを意味する.)

仮定 1 は取替えが小修理より多くの費用を必要とすることを述べているので合理的なものである. 仮定 2 は Phelps [3] より弱いものである, すなわち, $c_f(x)$ と $c_m(x)$ が年齢 x に対して一定であり, 故障時間分布 $F(x)$ が IFR であるときそれは満足されている. (付録 A を参照).

以上の仮定のもとに, このシステムに対して最適な小修理・取替え問題を議論する. この問題はシステムの年齢が状態と見なされ, 保全活動の決定がシステムの故障が起こったその直後になされるようなセミ・マルコフ決定過程として定式化することが出来る.

次の定理は平均費用規範のセミ・マルコフ決定過程に対してよく知られたものである (Ross [4] の定理 2 を参照)

定理 *2.1* もしある定数 g と有界な関数 $v(\cdot)$ が存在して最適性方程式と呼ばれる以下の方程式を満たすならば, g は最適な平均費用であり, これらから導かれる政策が最適政策である.

最適性方程式:

$$v(x) = \min \left\{ \begin{array}{l} c_m(x) + \dfrac{1}{\bar{F}(x)} \displaystyle\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds - g\dfrac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds, \\ c_f(x) + \displaystyle\int_0^\infty v(s)f(s)\,ds - g\int_0^\infty \bar{F}(s)\,ds \end{array} \right\}. \tag{2.3}$$

上の最適性方程式の関数 $v(\cdot)$ は相対費用関数と呼ばれる. というのは, $v(\cdot)$ は付加定数を除いて一意的であるからである, そこで, 単純化のために一般性を失う事なく, 上の最適性方程式に一つの方程式を付け加え正規化することができる.

簡単化された最適性方程式:

$$v(x) = \min \left\{ \begin{array}{l} c_m(x) + \dfrac{1}{\bar{F}(x)} \displaystyle\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds - g\dfrac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds, \\ c_f(x) \end{array} \right\}, \tag{2.4}$$

$$\int_0^\infty v(s)f(s)\,ds - g\int_0^\infty \bar{F}(s)\,ds = 0. \tag{2.5}$$

3. 最適政策

以下のように小修理・取替え政策のいくつかのクラスを定義する. 最初に, 厳密な t 政策とはある $t \in (0,\infty)$ が存在して年齢 t 以前の故障に対しては小修理を行い, 年齢 t 以後の故障に対しては取替えを行うような政策とする. 次に, 小修理のみの政策とは全ての故障に対して, 常に小修理のみを行うような政策である. 最後に, t 政策とは厳密な t 政策もしくは小修理のみの政策のことである.

ここで以後の議論に重要な役割を果たす 3 つの関数を定義しよう:

$$L(x,g) = -(c_f(x) - c_m(x))\bar{F}(x) + \int_x^\infty c_f(s)f(s)\,ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds, \tag{3.1}$$

$$M(x,g) = c_f(x) - c_m(x) + \int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds - gx, \tag{3.2}$$

$$Z(x) = \frac{-(c_f(x) - c_m(x))\bar{F}(x) + \displaystyle\int_x^\infty c_f(s)f(s)\,ds}{\displaystyle\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds}. \tag{3.3}$$

補題 *3.1* 仮定 1 のもとで仮定 2 における $\bar{x}$ は正である (無限大も可とする).

(証明) まず

$$c_f(0) - c_m(0) > 0,$$

であるから

$$\lim_{x \downarrow +0} Y(x) = \infty. \tag{3.4}$$

$Y(x)$ は x において連続であるので, ある δ が存在して $Y(x)$ は $(0,\delta)$ 上で非増加である, このように $\bar{x} > 0$. Q.E.D.

注 *3.1*　簡単のために, $Y(+0)$, $Y(\infty)$ などの表現を用いても混乱はないであろう.

補題 *3.2*　$\bar{x}$ が有限であるならば, ある $t^* \in (0,\bar{x}]$ が存在して

$$Y(t^*) = Z(t^*) \tag{3.5}$$

である.

(証明)　$L(x,g)$ と $M(x,g)$ を x で偏微分すると

$$\frac{\partial L(x,g)}{\partial x} = -\bar{F}(x)(c_f'(x) - c_m'(x) + c_m(x)\lambda(x) - g),$$
$$\frac{\partial M(x,g)}{\partial x} = c_f'(x) - c_m'(x) + c_m(x)\lambda(x) - g$$

を得る, ここで $'$ は x に関する微分を表すとする. このように

$$\frac{\partial L(x,g)}{\partial x} = -\bar{F}(x)\frac{\partial M(x,g)}{\partial x} \tag{3.6}$$

を得る. 一方, 関数 $Y(x)$ と $Z(x)$ を使うと

$$L(x,g) = \left(\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\right)(Z(x) - g), \tag{3.7}$$
$$M(x,g) = x(Y(x) - g) \tag{3.8}$$

と表される. $M(x,g)$ の上の表現を微分すると

$$\frac{\partial M(x,g)}{\partial x} = Y(x) - g + xY'(x)$$

を得る. $Y(x)$ は $\bar{x}$ にて最小値を達成しており, 全ての x に対して $Y(x) > 0$ であるので次の式によって正の値 $\bar{g}$ を定義することが出来る,

$$\bar{g} = Y(\bar{x}). \tag{3.9}$$

$Y(x)$ は $[\bar{x},\infty)$ で非減少である, すなわち $Y'(x) \geq 0$, そこで

$$\frac{\partial M(x,\bar{g})}{\partial x} = Y(x) - \bar{g} + xY'(x) \geq 0$$

である. このように 式 (3.6) から

$$\frac{\partial L(x,\bar{g})}{\partial x} \leq 0, \quad x \in [\bar{x},\infty),$$

すなわち $L(x,\bar{g})$ は x について $[\bar{x},\infty)$ において非増加である. さらに, $c_f(\cdot)$ と $c_m(\cdot)$ は有界であるので,

$$\lim_{x\to\infty} L(x,\bar{g}) = 0$$

である. それ故に $L(\bar{x},\bar{g}) \geq 0$ と結論出来る. 式 (3.7) をもちいると

$$Z(\bar{x}) \geq \bar{g} \tag{3.10}$$

を得る. 結果的に, $Y(+0)=\infty$, $Z(0)$ is が有限, $Y(\bar{x})=\bar{g}$, $Z(\bar{x})\geq\bar{g}$, であり $Z(x)$ と $Y(x)$ が共に x に関して連続であることから, ある $t^*\in(0,\bar{x}]$ が存在して $Z(t^*)=Y(t^*)$ である. Q.E.D.

補題 *3.3* もし仮定 2 の $\bar{x}$ が有限であるならば, 厳密な $t=t^*$ に対応する t 政策が最適である, ここで $t^*\in(0,\infty)$ は補題 3.2.

(証明) まず

$$g=Y(t^*) \tag{3.11}$$

と

$$v(x)=\begin{cases} c_m(x)-\displaystyle\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds+gx, & x\in[0,t^*),\\ c_f(x), & x\in[t^*,\infty)\end{cases} \tag{3.12}$$

を定義する. 明らかに $v(\cdot)$ は有界な関数である ($v(\cdot)$ の有界性は $c_f(\cdot)$ の有界性により従う). そこで

$$c_f(x)-v(x)=c_f(x)-c_m(x)+\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds-gx=M(x,g)=x(Y(x)-g)\geq 0,\quad x\in(0,t^*], \tag{3.13}$$

である, ただし最後の不等式は $Y(x)$ が $(0,t^*]$ の x に対して非増加であることと $g=Y(t^*)$ により従う.

$x\in(0,t^*)$ に対して

$$\begin{aligned}
&c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\\
=&c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^{t^*}\left(c_m(s)-\int_0^s c_m(u)\lambda(u)\,du+gs\right)f(s)\,ds+\int_{t^*}^\infty c_f(s)f(s)\,ds\right\}-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\\
=&c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^{t^*}c_m(s)f(s)\,ds-\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^{t^*}\left(\int_0^s c_m(u)\lambda(u)f(s)\,du\right)ds+g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^{t^*}sf(s)\,ds\\
&+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_{t^*}^\infty c_f(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\\
=&c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^{t^*}c_m(s)f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{\bar{F}(x)}\left\{\int_0^x\left(\int_x^{t^*}c_m(u)\lambda(u)f(s)\,ds\right)du+\int_x^{t^*}\left(\int_u^{t^*}c_m(u)\lambda(u)f(s)\,ds\right)du\right\}\\
&+g\frac{1}{\bar{F}(x)}\left\{x\bar{F}(x)-t^*\bar{F}(t^*)+\int_x^{t^*}\bar{F}(s)\,ds\right\}+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_{t^*}^\infty c_f(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\\
=&c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^{t^*}c_m(s)f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{\bar{F}(x)}\left\{\bar{F}(x)\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds-\bar{F}(t^*)\int_0^{t^*}c_m(s)\lambda(s)\,ds+\int_x^{t^*}c_m(s)f(s)\,ds\right\}\\
&+g\frac{1}{\bar{F}(x)}\left\{x\bar{F}(x)-t^*\bar{F}(t^*)+\int_x^{t^*}\bar{F}(s)\,ds\right\}+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_{t^*}^\infty c_f(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\\
=&c_m(x)-\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds+gx+\frac{\bar{F}(t^*)}{\bar{F}(x)}\left\{c_f(t^*)-c_m(t^*)+\int_0^{t^*}c_m(s)\lambda(s)\,ds-gt^*\right\}\\
&+\frac{1}{\bar{F}(x)}\left\{-(c_f(t^*)-c_m(t^*))\bar{F}(t^*)+\int_{t^*}^\infty c_f(s)f(s)\,ds-g\int_{t^*}^\infty \bar{F}(s)\,ds\right\}\\
=&c_m(x)-\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds+gx\\
=&v(x),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

を得る，ここで最後から２つ目の不等式は 式 (3.5) と (3.11) から従う．同様にして $v(\cdot)$ は

$$\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_0^\infty v(s)f(s)\,ds - g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_0^\infty \bar{F}(s)\,ds = 0,$$

を満たす，すなわちこれは 式 (2.5) である．それ故に式 (3.13) と (3.14) より

$$\begin{aligned} v(x) &= \min\left\{\begin{array}{l} c_m(x) + \dfrac{1}{\bar{F}(x)}\displaystyle\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds - g\dfrac{1}{\bar{F}(x)}\displaystyle\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds, \\ c_f(x) \end{array}\right\} \\ &= c_m(x) + \frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds - g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds, \quad x \in [0, t^*), \end{aligned} \tag{3.15}$$

を得る，すなわち 式 (2.4) が $x \in [0, t^*)$ に対して成り立つ．

そこで $x \in [t^*, \infty)$ に対して

$$\begin{aligned} & v(x) - \left\{c_m(x) + \frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds - g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\right\} \\ =& c_f(x) - c_m(x) - \frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty c_f(s)f(s)\,ds + g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds. \\ =& -\frac{1}{\bar{F}(x)}L(x,g) \end{aligned}$$

である．par (1)　まず，$t^* < \bar{x}$ の場合を考えよう．

(1.i)　ある有限な $\tilde{t}\ (> t^*)$ が存在して $Y(\tilde{t}) = Y(t^*) = g$ を満たす場合を考える．このとき $x \in [\tilde{t}, \infty)$ に対して

$$Y(x) - g \geq 0$$

と

$$Y'(x) \geq 0$$

が成り立つ，すなわち，

$$\frac{\partial M(x,g)}{\partial x} = Y(x) - g + xY'(x) \geq 0, \quad x \in [\tilde{t}, \infty)$$

であり，式 (3.4) から

$$\frac{\partial L(x,g)}{\partial x} \leq 0, \quad x \in [\tilde{t}, \infty)$$

が成り立つ．$L(x,g)$ は $[\tilde{t}, \infty)$ 上の x に対して非増加であり $L(\infty, g) = 0$ であるので

$$L(x,g) \geq 0, \quad x \in [\tilde{t}, \infty) \tag{3.16}$$

を得る．任意に固定された $x \in [t^*, \tilde{t})$ に対して式 (3.4) の両辺を積分すると:

$$\int_{t^*}^x \frac{\partial L(s,g)}{\partial s}\,ds = \int_{t^*}^x \left(-\bar{F}(s)\frac{\partial M(s,g)}{\partial s}\right)ds$$

となり

$$L(x,g) - L(t^*,g) = \bar{F}(t^*)M(t^*,g) - \bar{F}(x)M(x,g) - \int_{t^*}^x M(s,g)f(s)\,ds \tag{3.17}$$

を得る．$Y(t^*) = Z(t^*) = g$ が 式 (3.7) と (3.8) から言えるので

$$\begin{aligned} L(t^*,g) &= \left(\int_{t^*}^\infty \bar{F}(s)\,ds\right)(Z(t^*) - g) = 0, \\ M(t^*,g) &= t^*(Y(t^*) - g) = 0 \end{aligned}$$

が解る. それ故に 式 (3.17) は

$$L(x,g) = -\bar{F}(x)M(x,g) - \int_{t^*}^{x} M(s,g)f(s)\,ds \tag{3.18}$$

となる. さて

$$M(x,g) = x(Y(x)-g) \leq 0, \quad x \in [t^*, \tilde{t})$$

であるから, これと 式 (3.6) より

$$L(x,g) \geq 0, \quad x \in [t^*, \tilde{t}) \tag{3.19}$$

を得る. このように 式 (3.16) と (3.19) から,

$$L(x,g) \geq 0, \quad x \in [t^*, \infty)$$

が決論される.

(1.ii) もし $Y(\tilde{t}) = Y(t^*)$ であるような $\tilde{t}\,(> t^*)$ が存在しないならば, $x \in (t^*, \infty)$ に対して $Y(x) < g$ である. この様に 式 (3.8) より

$$M(x,g) \leq 0, \quad x \in [t^*, \infty).$$

が成り立つ. よって 式 (3.18) から

$$L(x,g) = -\bar{F}(x)M(x,g) - \int_{t^*}^{x} M(s,g)f(s)\,ds \geq 0, \quad x \in [t^*, \infty)$$

が成立する.

(2) 次に $t^* = \bar{x}$ の場合を考えよう. $x \in [t^*, \infty)$ に対して

$$Y(x) - g \geq 0$$

であり,

$$Y'(x) \geq 0$$

であるから,

$$\frac{\partial L(x,g)}{\partial x} \leq 0$$

が成り立つ. それ故に

$$L(x,g) \geq L(\infty, g) = 0, \quad x \in [t^*, \infty)$$

である.

以上の義論 (1) と (2) から

$$v(x) = c_f(x) \leq \left\{ c_m(x) + \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^{\infty} v(s)f(s)\,ds - g\frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^{\infty} \bar{F}(s)\,ds \right\}, \quad x \in [t^*, \infty) \tag{3.20}$$

を得る, これは

$$\begin{aligned} v(x) &= \min \left\{ \begin{array}{l} c_m(x) + \dfrac{1}{\bar{F}(x)} \displaystyle\int_x^{\infty} v(s)f(s)\,ds - g\dfrac{1}{\bar{F}(x)} \displaystyle\int_x^{\infty} \bar{F}(s)\,ds, \\ c_f(x) \end{array} \right\} \\ &= c_f(x), \quad x \in [t^*, \infty), \end{aligned} \tag{3.21}$$

とも同じである, すなわち, 式 (2.4) が $x \in [t^*, \infty)$ に対して成り立つ.

結局, g と $v(\cdot)$ をそれぞれ (3.11) と (3.12) によって定義するならば, 簡単化された最適方程式 (2.4) と (2.5) が成り立つ. 従って定理 2.1 により g が最適な平均費用であることが分かる. さらに, 式 (3.15) は年齢 t^* 以前の故障に対しては小修理を行うことが最適であることを意味している, 一方, t^* 以後の故障に対しては 式 (3.21) は取替えを行うことが最適であることを述べている.

結局, $t = t^*$ で与えられる t 政策が最適である. Q.E.D.

補題 *3.4*　もし仮定 2 において $\bar{x}=\infty$ であるならば小修理のみの政策が最適である.

(証明)　$Y(x)$ は区間 $(0,\infty)$ の間で非増加であり下に有界であるので $x\to\infty$ のとき $Y(x)$ の極限が存在する:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} Y(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{c_f(x)-c_m(x)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds\right)}{\dfrac{d}{dx}x}\\ &= \lim_{x\to\infty} c_m(x)\lambda(x)\\ &= c_m(\infty)\lambda(\infty),\end{aligned}$$

ここで最初の等号はロピタルの法則により成り立つ.

次のように置く

$$g=Y(\infty)=c_m(\infty)\lambda(\infty), \tag{3.22}$$

$$v(x)=c_m(x)-\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds+gx,\quad x\in[0,\infty). \tag{3.23}$$

すると

$$c_f(x)-v(x)=c_f(x)-c_m(x)+\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds-g=M(x,g)=x(Y(x)-g)\geq 0,\quad x\in[0,\infty), \tag{3.24}$$

最後の不等号は次の式により成り立つ,

$$Y(x)-g\geq 0,\quad x\in(0,\infty).$$

さらに, 式 (3.14) と同じように $x\in[0,\infty)$ に対して

$$c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds=c_m(x)+\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds-gx=v(x) \tag{3.25}$$

である. さらに, 式 (3.24) と (3.25) から

$$v(x)=c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds\leq c_f(x),\quad x\in(0,\infty), \tag{3.26}$$

同様に

$$\begin{aligned}v(x)&=\min\left\{\begin{array}{l} c_m(x)+\dfrac{1}{\bar{F}(x)}\displaystyle\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds-g\dfrac{1}{\bar{F}(x)}\displaystyle\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds,\\ c_f(x)\end{array}\right\}\\ &=c_m(x)+\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty v(s)f(s)\,ds-g\frac{1}{\bar{F}(x)}\int_x^\infty \bar{F}(s)\,ds,\quad x\in[0,\infty)\end{aligned} \tag{3.27}$$

が得られる, すなわち, 式 (2.4) は $x\in[0,\infty)$ に対して成り立つ.

結局, g と $v(\cdot)$ が式 (3.22) と (3.23) によって定義できれば, 簡単化された最適性方程式 (2.4) と (2.5) が成り立つ. しかしながら補題 3.3 と異なり, 不等式

$$v(x)\leq c_f(x),\quad x\in[0,\infty) \tag{3.28}$$

は $v(\cdot)$ が上に有界であることを保証するけれども下に有界であることを保証しない. それ故に, 定理 2.1 を直接使うことはできず, 以下のような証明の修正を必要とする.

$n = 1, 2, \cdots$ に対して, X_n を過程の n 番目の状態, すなはち, システムの年齢としよう, そして τ_n と C_n を $(n-1)$ 回目と n 回目の遷移の間の時間間隔と発生する費用としよう. Ross [4] の定理 2 の証明と同じように, 式 (3.27) から任意の政策 π に対して

$$g \leq \frac{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\right]}{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} + \frac{E_\pi\left[v(X_n) - v(X_0)\right]}{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} \tag{3.29}$$

が成り立つ, ここで, 等号は各 x に対して 式 (3.27) の右辺を最小化するように選ばれた政策, すなわち, 小修理のみの政策に対して成り立つ. 補題の前提のもとに故障率関数は有界であることになるので

$$\lim_{n\to\infty} E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right] = \infty$$

が成り立つ. さらに, 式 (3.28) から

$$g \leq \frac{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\right]}{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} + \frac{E_\pi\left[c_f(X_n) - v(X_0)\right]}{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} \tag{3.30}$$

である. $c_f(x)$ は x ついて有界なので 式 (3.30) の両辺の $n \to \infty$ としたときの上極限をとることによって

$$g \leq g_\pi, \tag{3.31}$$

を得る, ここで g_π は政策 π のもとでの平均費用である:

$$g_\pi = \limsup_{n\to\infty} \frac{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\right]}{E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]}.$$

小修理のみの政策 π_m のもとでは全てのシステムの故障に対して小修理のみが行われるので

$$\tau_i = X_i - X_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

である. このように

$$E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right] = E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1})\right] = E_{\pi_m}[X_n - X_0]$$

である. さらに 式 (3.29) は π_m に対して等号が成り立つので

$$\begin{aligned} g &= \frac{E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\right]}{E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} + \frac{E_{\pi_m}[v(X_n) - v(X_0)]}{E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} \\ &= \frac{E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\right]}{E_{\pi_m}\left[\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right]} + \frac{E_{\pi_m}[v(X_n) - v(X_0)]}{E_{\pi_m}[X_n - X_0]} \end{aligned} \tag{3.32}$$

が成り立つ．ここで

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{v(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{c_m(x)-\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds+gx}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{c_f(x)}{x}+g-Y(x)\right\} \\
&= 0 \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

ということに注意すると 付録 B の補題 B.1 を適用することができる．それ故に，式 (3.32) の $n\to\infty$ の上極限を取ることに依って

$$g = g_{\pi_m} \qquad (3.34)$$

を得る．結局，式 (3.31) と (3.34) から

$$g = g_{\pi_m} \le g_{\pi} \qquad (3.35)$$

が任意の政策に対して成り立つ，すなわち，任意の π に対して g が最適な平均費用であり，小修理のみの政策 π_m が最適である．

Q.E.D.

4. 結言

この論文においては平均費用規範のもとでの最適な小修理・取替え問題を扱った．この問題をセミ・マルコフ決定過程として定式化し，ある緩い条件のもとで全ての政策の中で最適政策が t 政策のクラスの中に有ることを示した．

しかし，予防取替えは大変重要な保全活動にもかかわらず今回は考慮することが出来なかった．この保全活動を考慮したモデルの研究は今後の課題である．

参考文献

[1] R. E. Barlow and L. C. Hunter, "Optimal Preventive Maintenance Policies", *Operations Research*, vol.8, pp.90–100 (1960).

[2] M. Ohnishi, T. Ibaraki, and H. Mine, "On the Optimality of (t,T)–Policy in the Minimal–Repair and Replacement Problem under the Average Cost Criterion", in Proceedings of International Symposium on Maintainability and Reliability 1990–TOKYO Held in Tokyo, Japan, June 5–8, 1990, pp. 329–334 (1990).

[3] R. I. Phelps, "Optimal Policy for Minimal Repair", *Journal of the Operational Research Society*, vol.34, pp.425–427 (1983).

[4] S. M. Ross, "Average Cost Semi-Markov Decision Processes", *Journal of Applied Probability*, vol.7, pp.649–656 (1970).

[5] A. Tahara and T. Nishida, "Optimal Replacement Policy for Minimal Repair Model", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol.18, pp.113–124 (1975).

付録 A

$Y(x)$ を x に関して微分することによって

$$Y'(x)=\frac{1}{x^2}\left\{x(c_f'(x)-c_m'(x)+c_m(x)\lambda(x))-\left(c_f(x)-c_m(x)+\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds\right)\right\} \qquad (A.1)$$

を得る．まず，

$$W(x)=x(c_f'(x)-c_m'(x)+c_m(x)\lambda(x))-\left(c_f(x)-c_m(x)+\int_0^x c_m(s)\lambda(s)\,ds\right) \qquad (A.2)$$

を定義する．

$c_f(x)$ と $c_m(x)$ は x に関して 2 回微分可能であり故障率関数 $\lambda(x)$ は x に関して 1 回微分可能であるとすると,

$$W'(x) = x(c_f''(x) - c_m''(x) + c_m'(x)\lambda(x) + c_m(x)\lambda'(x)) \tag{A.3}$$

が得られる.

以下の命題は Phelps [3] の条件のもとで仮定 1 および 2 は満たされていることを述べている.

命題 *A.1*　もし保全費用 $c_f(x)$ と $c_m(x)$ が定数で故障時間分布が IFR ならば, 仮定 2 は満たされている.

(証明)　簡単のために, 故障率関数 $\lambda(x)$ は x に関して微分可能であるとする.

ここで, $c_f(x) \equiv c_f$ および $c_m(x) \equiv c_m$ としよう. すると

$$W'(x) = xc_m\lambda'(x) \geq 0$$

である. これは $W(x)$ が x に関して非減少であることを意味する. 結局,

$$Y'(x) = \frac{1}{x^2}W(x) \tag{A.4}$$

は x が 0 から ∞ に動くとき負から正へ高々一回のみ符号を変える. この様に, $Y(x)$ は準凸である. Q.E.D.

命題 *A.2*　もし保全費用 $c_f(x)$ と $c_m(x)$ か定数であり, 故障率関数がバスタブ型と呼ばれるものであるとき, すなわち, ある $\tilde{x} \in [0,\infty]$ が存在して $x \in [0,\tilde{x})$ に対して $\lambda'(x) \leq 0$ また $x \in [\tilde{x},\infty)$ に対して $\lambda'(x) \geq 0$ ならば, 仮定 2 が満たされる.

(証明)　まず,

$$W(0) = -(c_f - c_m) < 0$$

と

$$W'(x) = xc_m\lambda'(x)$$

は明らかである. この様に $W(x)$ は x が 0 から ∞ に変わるときその符号を負から正へ高々 1 回のみ変化させる, すなわち, $Y(x)$ は x に関して準凸である. Q.E.D.

命題 *A.3*　もし保全費用の差 $c_f(x) - c_m(x)$ が x に関して凸であるとし, 故障時間分布が IFR であるとするならば, 仮定 2 は満たされている.

(証明)　まず,

$$Y'(x) = \frac{1}{x^2}W(x),$$
$$W'(x) = x\{(c_f(x) - c_m(x))'' + (c_m(x)\lambda(x))'\}.$$

である. $(c_f(x) - c_m(x))'' \geq 0$ であり, $(c_m(x)\lambda(x))' \geq 0$ であるので, $Y'(x)$ は x が 0 から ∞ に動くとき負から正に高々 1 回のみ符号を変化させる, すなわち, $Y(x)$ は x に関して準凸である. Q.E.D.

付録 B

補題 *B.1*　もし

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{x} = 0 \tag{B.1}$$

であり,

$$\lim_{x\to\infty} E[X_n] = \infty \tag{B.2}$$

であるならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E[v(X_n)]|}{E[X_n]} = 0 \tag{B.3}$$

である.

(証明)　まず,

$$u(x) = \frac{v(x)}{x} \tag{B.4}$$

と置こう, すると 式 (B.1) は

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \tag{B.5}$$

となる, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x_\varepsilon > 0$ が存在して

$$|u(x)| < \varepsilon, \quad x > x_\varepsilon$$

が成り立つ. さらに,

$$v_\varepsilon = \sup_{0\le x\le x_\varepsilon} |v(x)| = \sup_{0\le x\le x_\varepsilon} x|u(x)|$$

と置くと,

$$\begin{aligned}
\frac{|E[v(X_n)]|}{E[X_n]} &\le \frac{E[X_n|u(X_n)|]}{E[X_n]} \\
&= \frac{E[X_n|u(X_n)|; X_n \le x_\varepsilon]}{E[X_n]} + \frac{E[X_n|u(X_n)|; X_n > x_\varepsilon]}{E[X_n]} \\
&\le \frac{E[v_\varepsilon; X_n \le x_\varepsilon]}{E[X_n]} + \frac{\varepsilon E[X_n; X_n > x_\varepsilon]}{E[X_n]} \\
&= \frac{v_\varepsilon P(X_n \le x_\varepsilon)}{E[X_n]} + \frac{\varepsilon E[X_n; X_n > x_\varepsilon]}{E[X_n]} \\
&\le \frac{v_\varepsilon}{E[X_n]} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{B.6}$$

を得る. 式 (B.6) の両辺の上極限を取ると 式 (B.2) により

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|E[v(X_n)]|}{E[X_n]} \le \varepsilon \tag{B.7}$$

を得る. ε (> 0) は任意に小さく取れるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E[v(X_n)]|}{E[X_n]} = 0 \tag{B.8}$$

が得られる. これで証明は完結する. Q.E.D.