

## 方向制約を伴う施設配置問題

近畿大学工学部 松富 達夫 (Tatsuo Matsutomi)

岡山大学工学部 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)

### 序論

施設配置の問題は、複数個の需要点に対して最も良いサービスを提供するように、いくつかの施設を適切な位置に配置することを目的としている。

適切さの評価にはさまざまな型が考えられるが、一般的には複数の需要点と施設間の距離の最大値を最小化する minimax 問題や、あまり好ましくない施設を配置する場合の maximin 問題また各需要点と施設間の距離の総和を最小化する minisum 問題がよく研究されている。

このような配置問題を考える上で重要なことの一つに距離の尺度をどのように定めるかということがある。平面上での配置を考える場合、これまでは、距離、ユークリッド距離あるいは直角距離が使われてきたが、今日ではより現実に近いものとして非対象距離などの研究がされるようになってきた。ここでは、直角距離の拡張と考えられる P. Widmayer, Y. F. Wu and C. K. Wong [1] によって提案された A-metric の場合の施設配置問題を考える。

第 1 章では、A-metric について簡単に紹介し、第 2 章では需要点と施設間の距離を考慮した配置モデルについて述べ、J. Elzinga and D. W. Hearn [2] の方法を拡張した幾何学的解法を与え、第 3 章ではメッセンジャーボーイ問題についてその解法アルゴリズムを示す。

#### 1. 方向制約を伴う場合の距離 (A-distance)

##### 1-1 A-distance

A-distance とは、事前に与えられた複数の方向のみによって定義される距離であり、P. Widmayer, Y. F. Wu and C. K. Wong [1] によって提案されたものである。

ここでは、同文献において示された定義を示すとともに、minimax 型の施設配置問題の解法に有効ないくつかの定理を整理する。

## &lt; 定義 1.1 &gt;

(1) 平面において与えられた複数の方向の集合 :  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

但し、 $\alpha_i$  は直交座標系において  $x$  軸となす角度で、

$0^\circ \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 180^\circ$  とする。

(2) 直線、半直線、線分の方向が  $A$  に属しているとき、それらは  $A$ -方向 ( $A$ -oriented) であるという。

(3) 2点  $p_1, p_2$  間の  $A$ -距離  $d_A$  ( $A$ -distance) を次のように定義する。

$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2 :$

$d_A(p_1, p_2) = d_2(p_1, p_2) :$   $p_1, p_2$  が一つの  $A$ -方向  
直線上にあるとき

$or = \min_{p_3 \in \mathbb{R}^2} \{d_A(p_1, p_3) + d_A(p_3, p_2)\}$

: その他の場合

但し、 $d_2(p_1, p_2) :$   $p_1, p_2$  間のユークリッド距離

直角距離  $d_1(p_1, p_2)$  は  $A$ -距離の特別な場合で  $A = \{0^\circ, 90^\circ\}$  であると考えられるし、ユークリッド距離は方向の数が無限大の場合で  $A$ -距離の極限と考えられる。

また、距離  $d_A$  に関して次の定理が証明されている。

## &lt; 定理 1.2 &gt;

$d_A$  は常に、たかだか 2 つの線分から構成される折れ線によって実現される (図 1.1)。すなわち次の式が成り立つ。

$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2 : \exists p_3 \in \mathbb{R}^2 :$

$$d_A(p_1, p_2) = d_2(p_1, p_3) + d_2(p_3, p_2)$$

ここで  $p_3$  は線分  $p_1 p_2$  が  $A$ -方向ならば、 $p_3 = p_1 or p_2$  となる。そうでないときは、線分  $p_1 p_2$  の角度をはさむもっとも内側の  $A$ -方向  $\alpha_i, \alpha_j$  と  $p_1, p_2$  から作られる平行四辺形で、 $p_1, p_2$  以外の 2 頂点のどちらからを  $p_3$  とすればよい。

また、この定理より、

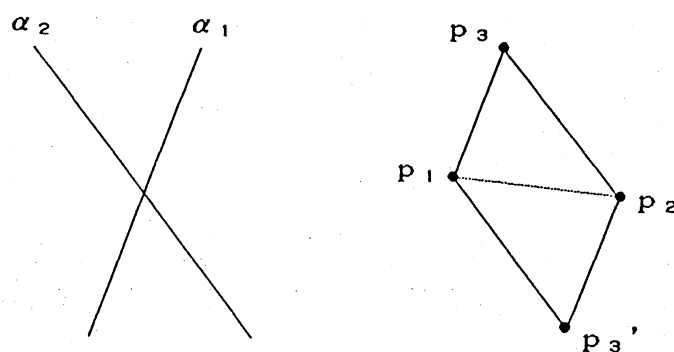


図 1.1 A-距離

<系 1.3>

$$(1) \forall p_1, p_2 \in R^2 : d_A(p_1, p_2) \geq d_2(p_1, p_2)$$

(2)  $d_A$  は与えられた任意の  $A$  に対して、 $R^2$  における metric を導入する ( $A$ -metric)。すなわち、

$$a) d_A(p, q) \geq 0 \text{ かつ } d_A(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$$

$$b) d_A(p, q) = d_A(q, p)$$

c) 任意の 3 点  $p, q, r$  について

$$d_A(p, q) + d_A(q, r) \geq d_A(p, r) \quad (\text{三角不等式})$$

### 1.2 A-平面・A-円・二等分線

いろいろな  $A$ -metric における定義・性質・得られている結果を示す。まず、 $A$ -平面を定義する。

<定義 1.4>

$A$ -平面  $R_A^2$  ( $A$ -plane) : すべての直線、半直線、線分などの方向が  $A$  に属する平面。

次に、 $A$ -平面上での円を定義する。

<定義 1.5>

ある点  $p$  と距離  $r$  に対して、 $d_A(p, p') = r$  を満たす点  $p'$  の軌跡を中心  $p$ 、半径  $r$  の  $A$ -円 ( $A$ -circle) と呼ぶ。

<定理 1.6>

中心が  $p$ 、半径  $r$  の  $A$ -円は、 $p$  を通る  $A$ -方向直線と中心  $P$ 、半径  $r$  の円 (ユークリッド距離における) との交点を頂点とする  $2a$  角形となる。(図 1.2)

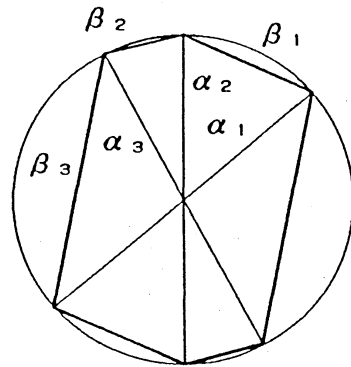


図 1.2 A-円

<定義 1.7>

A-円の辺の方向の集合を  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  とする。

A-平面上の2点  $p_1, p_2$  に対する二等分線 (bisector)  $B_A(p_1, p_2)$  は次のように定義される。

<定義 1.8>

$$B_A(p_1, p_2) = \{p \in \mathbb{R}_A^2 \mid d_A(p_1, p) = d_A(p, p_2)\}$$

また、点の集合  $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}_A^2$  に対して次の定義ができる。

<定義 1.9>

(1)  $P_1, P_2$  間の距離

$$d_A(P_1, P_2) = \min_{p_1 \in P_1, p_2 \in P_2} d_A(p_1, p_2)$$

(2)  $P_1$  と  $P_2$  の二等分線

$$B_A(P_1, P_2) = \{p \in \mathbb{R}_A^2 \mid d_A(P_1, p) = d_A(P_2, p)\}$$

さらに  $B_A(p_1, p_2)$  に関して、次の定理がある。

<定理 1.10>

(1)  $B_A(p_1, p_2)$  は  $p_1, p_2$  の anchor point (ユークリッド距離における中点) を通る。

(2)  $B_A(p_1, p_2)$  は  $\alpha, \beta$  によって決定された折れ線になる。

$B_A(p_1, p_2)$  は具体的には  $p_1, p_2$  を通る  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  方向の直線によって平面を領域に分割し、anchor point から出発して、各領域に対しては境界線の方に依存して二等分線を決める。各境界に含まれる二等分線は、空か、1つの線分か、その境界全部かのいずれかである。(図1.3)

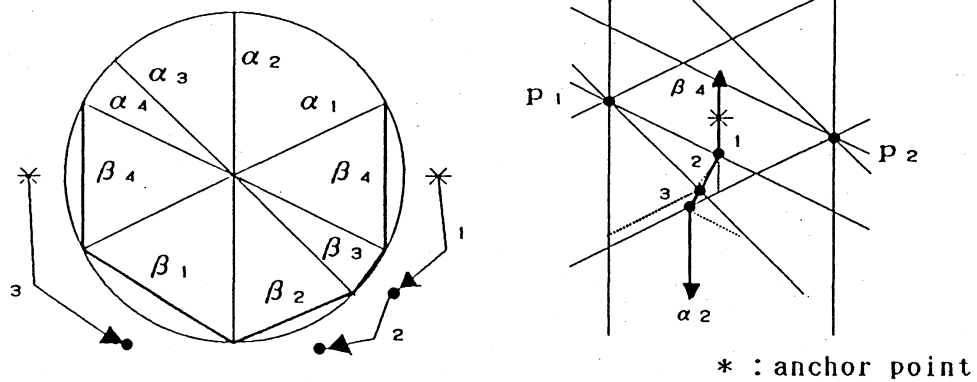


図1.3 A-円と二等分線

1.3 ボロノイ図 (Voronoi diagram)

ここで幾何学問題において重要なボロノイ図 (Voronoi diagram) を説明する。平面上  $n$  個の点  $p_i (i=1, \dots, n)$  が与えられたとき、点  $p_i$  の“支配領域”である  $V_i(p_i)$  を

$$V_i(p_i) = \bigcap_{j \neq i} \{p \mid d(p, p_i) < d(p, p_j)\}$$

と定義する。このとき  $V_i(p_i)$  による平面の分割をボロノイ図という。この分割された平面を点  $p_i$  に対するボロノイ多角形という。また、点  $p_i$  を母点、ボロノイ多角形の頂点をボロノイ点、辺をボロノイ辺という。ボロノイ辺は、その両側にある母点から等距離にある点の軌跡の一部、つまり2つの母点の二等分線の一部である。

$B_A(p_1, p_2)$  が先に定義されているので、 $A$ -metric に関してボロノイ図  $V_A$  を作ることができる。(付録. 図1.4)

また、 $V_A$  に関して次の定理が証明されている。

<定理1.11>

$n$  個の点に対して、 $A$ -metric に関するボロノイ図  $V_A$  は  $O(n \log n)$  時間で作ることができる。

### 1. 4 2方向によって実現される距離

次に  $a = 2$  のとき、すなわち  $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  と2方向だけが許される場合を考える。このとき2点  $p_1(a_1, a_2), p_2(b_1, b_2)$  について  $d_A(p_1, p_2)$  は、

$$d_A(p_1, p_2) = M_1 |m_2(a_1, b_1) - (a_2, b_2)| \\ + M_2 |m_1(a_1, b_1) - (a_2, b_2)|$$

ここで、 $m_1 = \max(\tan \alpha_1, \tan \alpha_2)$

$m_2 = \min(\tan \alpha_1, \tan \alpha_2)$

$M_1 = \sqrt{1 + m_1^2} / (m_1 - m_2)$

$M_2 = \sqrt{1 + m_2^2} / (m_1 - m_2)$  とする。

$\alpha_1$  or  $\alpha_2 = 90^\circ$  のときは  $m_1 = \infty$ 、すなわち極限操作を行う。 $\alpha_1 = 0^\circ$

$\alpha_2 = 90^\circ$  のときはこの極限操作を行うと、 $m_2 = 0, M_1 = 1$

$M_2 |m_1(a_1, b_1) - (a_2, b_2)| = |a_1 - b_1|$  となり、

$d_A(p_1, p_2) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$  となる。すなわち、直角距離の場合に帰着される。

以上から、A-metric という概念は従来のユークリッド距離  $d_2$  と直角距離  $d_1$  との“中間”的意味あいがあることが分かる。

## 2 A-metricにおけるminimax型施設配置問題

### 2-1 minimax型配置問題のモデル

ここで、配置問題のモデルを示す。配置問題のモデルとしては minimax 型、maxmini 型、minisum 型などがあるが、ここでは minimax 型配置問題について考える [3]。一般の minimax 型配置問題は次のように定式化される。

$$\min_{P \in V} \max_{Q \in V} \{ w_q d(P, Q) + k_q \} \quad (\text{式 2.1})$$

但し、 $V$  : 施設の配置の可能な領域 (feasible region)

$Q = (a, b)$  : 需要点の位置

$p = (x, y)$  : 配置すべき施設 (消防署) の位置

$w_q$  : 需要点に付随する重み

$d(P, Q)$  :  $P, Q$  間の A-距離

$k_q$  : 非負の定数

ここでは  $w_q$  (重み) がすべて等しいものとして、

$$\min_{P \in V} \max_{Q \in V} \{ d(P, Q) + k q \} \quad (\text{式 2.2})$$

の問題を考える。

$k q = 0$  か  $k q \neq 0$  によって (式 2.2) は 2 つの問題に分けられる。 [2]

(1)  $k q = 0$  の問題をデリバリーボーイ問題という。この場合は、施設から各需要点までの最大の距離を最小にするように施設を配置するということを表している。例としてある都市に消防署を配置する問題がある。

(2)  $k q \neq 0$  の問題をメッセンジャーボーイ問題という。この場合は、施設からの距離と各需要点に付随した移動距離  $k q$  の和のうち最大のものを最小にするように施設を配置すること目的にしている。

## 2.2 A-metric におけるデリバリーボーイ問題の幾何学的解法

ここでは、ユークリッド距離についてのデリバリーボーイ問題に対して与えられた、Elzinga & Hearn [2] のアルゴリズムを A-metric に応用する。

A-metric におけるデリバリーボーイ問題として、ある閉凸多角形領域内に消防署を配置する問題を考える。つまり消防署から需要点 (建築物) までの最長距離を最小にするように消防署を配置する問題である。この問題の定式化を次に示す。

$$\min_{P \in V} \max_{Q \in V} d_A(P, Q) \quad (\text{式 2.3})$$

但し、 $V$  : 施設の配置の可能な多角形領域  $V_0, V_1, \dots, V_m$  ( $V_0 = V_m$ )

$Q = (a, b)$  : 需要点の位置

$d_A$  : 2点間の A-距離

$P = (x, y)$  : 配置すべき施設 (消防署) の位置

さて需要点として多角形領域  $V$  内のすべてについて考えなければならないわけだが、領域内のある点からの A-距離が最長となるのは領域の境界線上の点となることは明か。よって需要点として多角形領域  $V$  の境界線上の点についてのみ考えればよいことになる。

また次の定理により、考える需要点はさらに限定される。

## &lt; 定理 2.1 &gt;

平面上のある線分  $AB$  上で、ある点  $P$  からその線分上の点  $Q$  までの  $A$ -距離  $d_A$  を最大にする点はこの線分の両端のうちどちらかである。

よって < 定理 2.1 > よりこの問題で考える点  $p$  は、多角形領域  $V$  の頂点のみについて考えればよいことになる。

さて、(式 2.3) は次の様に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \min_{(x, y, Z)} Z & \quad \text{(式 2.4)} \\ \text{subject to } d_A(P, Q_i) & \leq Z \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

これは多角形領域  $V$  を覆う最小半径の  $A$ -円とその中心を求めることにほかならない。

次にこの多角形領域  $V$  を覆う最小半径の  $A$ -円を求めるために、ユークリッド距離の問題に対して与えられた Elzinga & Hearn のアルゴリズムを  $A$ -metric の問題に拡張する。

## &lt; アルゴリズム 1 &gt;

- ステップ 1  $m$  個の頂点間で、 $A$ -距離が最大となる 2 点  $A, B$  を取ってステップ 2 へ。
- ステップ 2 2 点を直径とする  $A$ -円 (2 点の anchor point を中心とする 2 点を通る  $A$ -円) を定義する。もしこの  $A$ -円がすべての頂点を被覆すれば終了。そうでなければ  $A$ -円の外部にある 1 点取り  $C$  としてステップ 3 へ。
- ステップ 3 もし、3 点で定義された  $A$ -円 ( $A$ -距離で 3 点から等しい距離の点を中心とする  $A$ -円) がすべての頂点を被覆すれば終了。そうでなければ  $A$ -円の外部の 1 点を取って  $D$  としてステップ 4 へ。
- ステップ 4  $A, B, C$  の 3 点のうち  $D$  から  $A$ -距離が最も離れた点を  $A$  とする。  $A$  と中心を通る直線で平面を 2 つの半平面に分ける。  $D$  と同じ半平面にある点を  $B$  とし、残った点を  $C$  とする。  $A, C, D$  を残してステップ 3 へ。

このアルゴリズムの収束性は同じ点の組合せを繰り返さないことと、点の数が有限個であることから言える。



### 3 収容施設までの距離を考慮したminimax型施設配置問題

ここでは、ユークリッド距離でのメッセンジャーボーイ問題に対して与えられた Elzinga & Hearn のアルゴリズムを A-metric に応用する。そのために、収容施設までの距離を考慮した minimax型配置問題の場合について考える。救急車の基地の配置を例にとって問題を説明する。平面上のある閉凸多面体領域 V 内で事故が発生した時、救急車が事故現場を經由して収容施設すなわち病院に行く場合に、救急車の基地から病院までの最長距離を最小にするように基地を配置する問題である。その問題の定式化を次に示す。

$$\min_{(x,y)} \max_{Q \in V} R_A(P, Q) = d_A(P, Q) + d_A(Q, H_q) \quad (\text{式 3.1})$$

但し、V : 基地が救助すべき多角形領域  $V_0, V_1, \dots, V_m$  ( $V_0 = V_m$ )

Q : 需要点(緊急事態の発生点)の位置

P : 配置する救急車の位置

$H_q$  : q に最も近い収容施設の位置 (複数存在するときは添字の小さいもの) 収容施設は N 個存在

$R_A(P, Q)$  : P から Q を經由して  $H_q$  までの A-距離での経路長

さて需要点として多角形領域 V 内のすべての点について考えなければならないわけだが、次の定理によって考える需要点は限定される。

#### <定理 3.1>

収容施設  $H_i$  を母点とするボロノイ図を描く。このとき、 $H_i$  の支配する領域  $D_i$  上においてボロノイ辺上か多角形領域 V の境界線上に  $R_A(P, Q)$  を最も大きくする点が存在する。

#### <定理 3.2>

平面上で線分 AB を考え、ある点 S から線分上の 1 点 Q を經由して点 T に至るときの経路長を最大にするのは点 A か B のどちらかを通るときである。ただし(図 3.1) の様に線分 TA, TB は A-方向のとなりあう 2 つの方向として、つまり点 T から線分上のどの点への距離も A-方向 TA, TB の 2 つの方向によって実現できるものとする。

## &lt; 定理 3.3 &gt;

平面上で線分  $AB$  を考え、ある点  $P$  から線分上の 1 点  $Q$  を経由して点  $H$  に至るときの経路長を最大にするのは点  $A$  か  $B$  のどちらかを通るときである。

以上の < 定理 3.1 >, < 定理 3.3 > より次の定理が導かれる。

## &lt; 定理 3.4 &gt;

需要点として、次の 2 種類の点についてのみ考えれば良い

- ① 多角形領域  $V$  の境界線の頂点。
- ② 多角形領域  $V$  の境界線とポロノイ辺との交点。

さてここで、(式 3.1) の  $d_A(Q, Hq)$  についてだがこれは需要点  $Q$  が決まれば自動的にもとまる定数となる。よって  $d_A(Q, Hq) = k_q$  とおくことができ、これはメッセンジャー問題にはほかならない。

次に、(式 3.1) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \min_{(x, y, Z)} Z & & & \text{(式 3.2)} \\ \text{subject to } d_A(P, Q_i) + k_i & \leq Z & (i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

今、半径  $k_i$  で中心が点  $Q_i$  の  $A$ -円を  $C_i$  で表す。このとき  $k_i$  と  $P$  から  $Q_i$  までの  $A$ -距離の和は  $P$  から  $Q_i$  まで行きさらに  $C_i$  上の任意の点まで行く  $A$ -距離と等しくなる。よって (式 3.2) はすべての  $C_i$  を覆う最小半径の  $A$ -円を見つけることになる。即ち、解は  $C_i$  の中の 2 つ、もしくは 3 つに外接する  $A$ -円およびその中心として与えられる。

解を求めるために Elzinga & Hearn のアルゴリズムを  $A$ -metric に拡張する。

## &lt; アルゴリズム 2 &gt;

ステップ 1  $n$  個の点  $Q_i$  についてそれぞれ  $C_i$  を書く。最も大きいものを  $C_s$  とし、もし  $C_s$  が  $C_t$  以外の  $C_i$  を覆っていれば  $C_s$  が解となり終了。そうでなければ、

$$\max_{(s, t \ s \neq t)} \{d_A(Q_s, Q_t) + k_s + k_t\}$$

を満たす  $C_s$  と  $C_t$  を持ってステップ 2 へ。

- ステップ 2  $C_0$  と  $C_1$  とを結ぶ直線と  $C_A(C_0, C_1)$  との交点  $P_0$  を中心とする  $C_0, C_1$  に外接する最小半径の  $A$ -円  $C_0$  を書く。もし  $C_0$  がすべての  $C_i$  を覆っていれば  $C_0$  が解となり終了。そうでなければ  $A$ -円外の  $C_i$  を 1 つ取って  $C_0$  としてステップ 3 へ。
- ステップ 3  $C_A(C_0, C_1) = C_A(C_1, C_2) = C_A(C_0, C_2)$  を満たす点  $P_0$  を中心とする  $C_0, C_1, C_2$  に外接する最小半径の  $A$ -円  $C_0$  を書く。もし  $C_0$  がすべての  $C_i$  を覆っていれば  $C_0$  が解となり終了。そうでなければ  $A$ -円外の  $C_i$  を 1 つ取って  $C_0$  として、 $C_0, C_1, C_2, C_3$  の 4 つの  $A$ -円を持ってステップ 4 へ。
- ステップ 4 ステップ 3 での  $P_0$  から  $Q_0$  を通る直線を延ばし、 $C_3$  と交わる点で  $P_0$  から遠い方の点を  $Z_0$  とする。同様に  $C_0, C_1, C_2$  についても行いそれぞれ  $Z_1, Z_2, Z_3$  とする。 $Z_0$  を  $D$  として、他の 3 点のうち  $D$  から最も遠い点を  $A$  とする。 $A$  と  $P_0$  を通る直線を延ばし、平面を 2 つの半平面に分ける。このうち  $D$  と同じ半平面上にある点を  $B$  として、残った点を  $C$  とする。 $A, C, D$  から得られる 3 つの  $C_i$  を持って再び  $C_0, C_1, C_2$  としてステップ 3 へ。

このアルゴリズムの収束性は同じ円の組合せを繰り返さないことと、円の数が有限個であることから言える。

以上のアルゴリズムによって求められた  $A$ -円の中心が求める最適な救急車の基地の配置位置である。

ここで第 2 章のデリバリーボーイ問題のときと同様に、最適解は必ずしもただ一点とはならないことを付け加える。上記のアルゴリズムのステップ 2 で得られた  $A$ -円  $C_0$  が解となる場合、つまり 2 つの  $C_i$  によって解がもとまる場合は、2 つの  $C_i$  点が接している  $C_0$  の辺と平行に半径を変えずに  $C_0$  を移動させる。すべての  $C_i$  が  $A$ -円内にあればすべて最適となり、求める最適解はその時の  $A$ -円の中心すべてとなる。

#### 参考文献

- [1] P. Widmayer, Y. F. Wu and C. K. Wong "On some distance problems in fixed orientations", SIAM J Comput., 16(1987), 728-746.
- [2] J. Elzinga and D. W. Hearn "Geometrical solutions for some minimax location problem", Trans. Sci., 6(1972), 379-394.