数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 151-159

ファジィ数の順序関係・基本演算とファジィ非線形計画への応用

古 川 長 太
九州大学理学部

1. はじめに

通常の線形計画問題をファジィ線形計画問題に拡張するときにまず始めに考えなければならないのは、ファジィ数の間の基本演算の定義と、不等号の解釈をどうするかについてである。この２つのことについて、既に代表的な研究として D.Dubois, H. Prade による [1],[3],[4] 等がある。それ以後、彼等の定義に基づいたファジィ線形計画に関する研究が多くの人達によって為されてきた。

ここであらためて考えてみたい点がある。その第１は Dubois,Pradeによって定義された演算が線形演算ではないこと、第２は同じく彼等によるファジィ数間の大小関係が実数の大小関係の自然なファジィ化とは異なる概念であることである。第１の点はファジィ線形計画に対しては殆ど支障はないが、ファジィ非線形計画に応用するためには、このことが大きな障害になる。また第２の点については、ファジィ線形計画に適用して非ファジィな問題に変換した結果が、ファジィ数のレベルに依存することになるという性質がある。不等号をファジィ数間の包含関係でおきかえた問題を解く方法も研究されているが（ e.g. [2]）、一般のファジィ集合の場合とは違って、ファジィ数間の包含関係でおきかえると非常に窮屈な制約条件を考えることになってしまう。

以上の理由から、本報告は通常の線形計画の出来るだけ自然なファジィ化が為されるように、かつまたそれがファジィ非線形計画にも十分適合し得るように基本概念の設定から考え直し、理論を組み立てて行こうとする試みを与えるものである。

2. ファジィ数の順序関係

一般にファジィ集合Ａ，Ｂのメンバーシップ関数をμ_A，μ_Bで表す。

<u>定 義 2.1</u> ファジィ集合Ａのメンバーシップ関数 μ_A が実数の全体 $\mathbf{R}$ 上で定義された [0, 1] への関数で、次のことを満たすときＡはファジィ数であるという：

実数ｍが一意に存在して

(a)　μ_A（m）＝1，
(b)　μ_A は（$-\infty$，m］上で広義単調増加　，
(c)　μ_A は［m，$+\infty$）上で広義単調減少　．

通常のファジイ数の定義では上記のmの一意性は仮定していないが、ここでは一意としておく。ファジイ数Aに対して定まる上記のmをAのセンターと呼び、m_A で表す。同様にしてファジィ数B，Cのセンターをm_B，m_C とかく。

ファジィ数の全体からなる集合を　F　とかくことにする。実数のメンバーシップ関数はその特性関数であり、特性関数は明らかに上の定義をみたすから、次の関係が成り立つ。

$$R \subset F .$$

定　義　2.2　2つのファジィ数A，Bに対して、次の (a)，(b) が成立することをもって『AはBより大である』といい、これを記号で

$$A \gtrsim B$$

とかく。

(a)　$m_B \leqq m_A$，
(b)　$m_B \leqq c \leqq m_A$　なるcが存在して
$\mu_A(x) \leqq \mu_B(x) \quad \forall x < c$，
$\mu_A(x) \geqq \mu_B(x) \quad \forall x > c$，
をみたす。

命　題　2.1　実数α，βに定義 2.2で導入した大小関係をあてはめると、

$$\alpha \gtrsim \beta \iff \alpha \geqq \beta$$

が成り立つ。

命　題　2.2　α　R，A　F　にたいして
(a)　$\alpha \lesssim A \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x < \alpha$，
(b)　$A \lesssim \alpha \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x > \alpha$．

系　2.1
(a)　$0 \lesssim A \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x < 0$，
(b)　$A \lesssim 0 \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x > 0$．

定　理　2.1　定義 2.2で導入した大小関係は、F上で半順序の公理をみたす。

命題 2.1　はファジィ数の集合上で定義した大小関係が、実数上では通常の実数の

大小関係と一致することを示している。また、系 2.1(a) の右辺の式は、従来から使われている正のファジィ数の定義に等しく、同じく (b)の右辺の式は負のファジィ数の定義に等しい。これらの結果と定理 2.1により、はじめに定義したファジィ数間の順序が、実数間の順序のひとつの自然なファジィ化としての拡張であることが分かる。

3. L－ファジィ数の基本演算

定　義　3.1　R上で定義された実数値関数Lは次の条件をみたすものとする。

1. $L(x) = L(-x) \quad \forall x \in R$,
2. $L(0) = 1$,
3. Lは $[0, +\infty)$ 上で狭義単調減少,
4. $L(x_0) = 0$　をみたす正数 x_0 が存在する.

このとき関数Lを shape function と呼び、4.の x_0 をLの零点と呼ぶ。

定　義　3.2　m, α $(\alpha \neq 0)$を任意の実数とする。ファジィ数Aのメンバーシップ関数 μ_A が shape function L　を使って

$$\mu_A(x) = L((x-m)/\alpha) \vee 0, \quad x \in R, \tag{1}$$

で表されるとき、AをL－ファジィ数と呼ぶ。このとき定義 2.1で定めたことによりmはAのセンターになる。αをAの偏差係数と呼ぶ。

αの絶対値が小さいほど (1)の曲線は、$x = m$　のまわりに集中してくる。そこで $\alpha \to 0$　のときの極限として$\alpha = 0$ の時 (1)は、

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = m \\ 0 & \text{if } x \neq m, \end{cases} \tag{2}$$

であると解釈することにする。以下、(1), (2)を併せてあらためてL－ファジィ数と呼ぶことにする。

（注）　通常のL－Rファジィ数の定義ではαは正の値だけに限って定義しているが、ここでは負、零の値も許していることが従来とは異なる点である。

L－ファジィ数を、記号で簡単に

$$A = (m, \alpha)_L, \tag{3}$$

と表すことにする。(2)　によって$\alpha = 0$ のときは

$$(m, 0)_L = m, \tag{4}$$

となる。

shape function　Lを任意にとったとき、L－ファジィ数の全体からなる集合を

F_L とかく。即ち

$$F_L = \{A=(m,\ \alpha)_L \mid m,\ \alpha \in R\}\ . \tag{5}$$

<u>定　義　3.3</u>　F_L 上に次の演算を導入する：
$A=(m,\ \alpha)_L$，$B=(n,\ \beta)_L$，$\lambda \in R$ に対し

1.　$A+B=(m+n,\ \alpha+\beta)_L$　，
2.　$A-B=(m-n,\ \alpha-\beta)_L$　，
3.　$\lambda A\ =(\lambda m,\ \lambda\alpha)_L$　.

<u>命　題　3.1</u>

(a)　定義 3.3の演算の下で F_L は線形空間をなす。このとき、F_L の零元は $(0,\ 0)_L$ である。

(b)　定義 3.3の演算をR上に制限したものは、通常の実数間の演算と一致する。

F_L の零元は (4)により本質的には実数の零に等しいが、F_L の元であるから形式的に区別して

$$\theta=(0,\ 0)_L\quad , \tag{6}$$

とおく。

4.　L－ファジィ数の順序関係

<u>定　理　4.1</u>

$A=(m,\ \alpha)_L$，$B=(n,\ \beta)_L$，x_0 をLの零点とする。$\alpha\beta \geqq 0$　とする。このとき次の関係が成立する。

$$A \gtrsim B \iff \begin{cases} m \geqq n\ , \\ \\ |\alpha-\beta| \leqq (m-n)/x_0\ . \end{cases} \tag{7}$$

<u>定　理　4.2</u>

A，B，x_0 は定理 4.1に同じとする。$\alpha\beta < 0$　とする。このとき次の関係が成立する。

$$A \gtrsim B \iff \begin{cases} m \geqq n\ , \\ \\ |\alpha+\beta| \leqq (m-n)/x_0\ . \end{cases} \tag{8}$$

命　題　4.1

$A=(m,\ \alpha)_L$，$B=(n,\ \beta)_L$，に対して次のことが成立する。

(a)　$A \gtrsim \theta \iff [m \geqq 0,\ |\alpha| \leqq m/x_0]$，

(b)　$A \lesssim \theta \iff [m \leqq 0,\ |\alpha| \leqq (-m)/x_0]$，

(c)　$A \gtrsim \theta \iff (-A) \lesssim \theta$，

(d)　$A \gtrsim B \iff \lambda A \gtrsim \lambda B \quad \forall \lambda > 0$，

(e)　$A \gtrsim B \iff \lambda A \lesssim \lambda B \quad \forall \lambda < 0$．

(f)　$A \gtrsim \theta,\ B \gtrsim \theta \implies A+B \gtrsim \theta$．

系　4.1　$A \gtrsim \theta$をみたすL－ファジィ数Aの全体をK_Lとおくと、K_LはF_Lにおける凸錐である。

命　題　4.2

$A=(m,\ \alpha)_L$，$B=(n,\ \beta)_L$，$\alpha\beta \geqq 0$　とする。このとき

$$A \gtrsim B \iff A-B \gtrsim \theta \iff B-A \lesssim \theta.$$

命　題　4.3

命題 4.2のA，Bにおいて　$\alpha\beta < 0$　とする。このとき次のことが成立する：

$$A-B \gtrsim \theta \implies A \gtrsim B. \tag{9}$$

5.　ファジィ線形計画への応用

これまでに与えた概念と定義を使って、２つの型のファジィ線形計画問題を定式化する。形式的には従来のものとおなじであるが、意味的には新しい問題である。更にこれらの問題がここで得られた定理を使って非ファジィな最適化問題に変換されることが示される。

5．1　目的関数の係数が実数の場合

$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$を与えられた任意の実数、$L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_m$を与えられた任意の shape　function　とする。各 i にたいして、L_iの零点をx_{i0}とおく。また各 i (i=1,2,...,m) に対して

$$A_{ij}=(m_{ij},\ \alpha_{ij})_{L_i}, \qquad j=1,2,\ldots,n,$$

$$B_i=(n_i,\ \beta_i)_{L_i},$$

をいずれも与えられたL_i－ファジィ数とする。ここでm_{ij}，n_iはすべて任意の実数、α_{ij}，β_iはすべて任意の非負の実数とする。次の最小化問題を考える。

(FLP1)

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

suject to

$$x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \cdots + x_n A_{in} \lesssim B_i \ , \qquad i=1,2,\ldots,m \ ,$$

$$x_j \geqq 0 \ , \qquad j=1,2,\ldots,n$$

定理 4.1を使って次の定理が導かれる。

<u>定　理　5.1</u>　問題（FLP1）は次の線形計画問題と同値である。

(LP1)

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j \leqq n_i \ , \qquad i=1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} (m_{ij} + x_{i0} \alpha_{ij}) x_j \leqq n_i + x_{i0} \beta_i \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (m_{ij} - x_{i0} \alpha_{ij}) x_j \leqq n_i - x_{i0} \beta_i \ ,$$

$$i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geqq 0 \ , \qquad j=1,2,\ldots,n$$

5．2　目的関数の係数がファジィ数の場合

L_0 を与えられた任意の shape function とし、L_0 の零点を x_0 とおく。

$$C_j = (l_j \ , \ \gamma_j)L_0 \ , \qquad j=1,2,\ldots,n$$

を与えられた L_0 ファジィ数とし、l_j は任意の実数、γ_j は任意の非負実数とする。このとき次の問題を考える。

$$\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$$

(FLP2) subject to

$$x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \cdots + x_n A_{in} \lesssim B_i, \quad i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geqq 0, \qquad j=1.2.\ldots,n$$

上の問題で“minimize”の意味は、２節で導入した半順序に関するものとする。したがって一般に（FLP2）の最小解が存在するとは限らないので次の定義をする。

定　義　5.1　(FLP2)における制約条件のすべてをみたす点　$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の全体の集合をＳ　とおく。Ｓの点$X^*$が次の関係をみたすとき、$X^*$は（FLP2）の efficient solution であるという。即ち

$$[X \in S,\ CX < CX^* \implies CX = CX^*],$$

但し$C=(C_1, C_2, \cdots, C_n)$, CXは内積を表す。

定理 4.1により、次の定理を得る。

定　理　5.2　問題（FLP2）の efficient solution を求めることは、次の問題を解くことと同値である。

Find $X^* \in S$

such that :

$$X \in S, \quad \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j^* - x_j) \geqq 0,$$

(P2)

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (x_j^* - x_j) \right| \leqq \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j^* - x_j) / x_0,$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} l_j (x_j^* - x_j) = 0.$$

ただし x_j^*, x_j はそれぞれX^*, Ｘの第ｊ成分を表す。

6. F_L に値をとる写像の基本的性質

<u>定　義　6.1</u>　(m, α)　F_L に対し、ノルムを次式で定義する。

$$\|(m, \alpha)\| = |m| + |\alpha|$$

<u>命　題　6.1</u>　F_L は定義 6.1により線形ノルム空間をなす。

以下Xは線形ノルム空間で、Xの点をx，yなどで表す。

<u>定　義　6.2</u>　$T : X \to F_L$　に対し次のことが成り立つとき、Tは convex map であるという。

$$\forall x,\ y \in X,\quad 0 \leqq \forall\lambda \leqq 1 \text{ に対して}$$

$$T(\lambda x + (1-\lambda)y) \lesssim \lambda T(x) + (1-\lambda) T(y).$$

<u>定　理　6.1</u>

$$T(x) = (m(x), \alpha(x))_L, \quad x \in X$$

と表される写像　$T : X \to F_L$ に対してTが convex map であるための必要十分条件は、次の (1),(2)が成り立つことである。

(1)　$m(x)$ が通常の意味の凸関数，

(2)　$\forall x, \forall y \in X,\quad 0 \leqq \forall\lambda \leqq 1$ に対して

$$|\lambda \alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(y) \ \# \ \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y)|$$
$$\leqq \{\lambda m(x) + (1-\lambda) m(y) - m(\lambda x + (1-\lambda)y)\} / x_0 .$$

ここに x_0 はLの零点、# は次式により定義されるものとする.

$$\# = \begin{cases} - \quad \text{if} \quad (\lambda \alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(y)) \times \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq 0 \\ \\ + \quad \text{if} \quad (\lambda \alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(y)) \times \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) < 0 . \end{cases}$$

<u>定　義　6.3</u>　$T(x) = (m(x), \alpha(x))_L$　, $x \in X$　において、$m(x)$ と $\alpha(x)$ が共に affine linear　のとき、Tは affine linearであるという。

<u>命　題　6.2</u>　$T : X \to F_L$　が affine linear　なら、Tは convex map である。

<u>命　題　6.3</u>　mをX上の任意の凸関数、cを　$|c| \leqq 1$ をみたす任意の実数とする。$\alpha(x)$ を

$$\alpha(x) = c\, m(x), \quad x \in X$$

で定めるとき、$T(x) = (m(x), \alpha(x))_L$ は convex map である。

<u>定　義　6.4</u>　$T : X \to F_L$　，$S \subset X$　に対し、F_L の元 K_0 が存在して

$$T(x) \lesssim K_0 \qquad \forall x \in S ,$$

が成り立つとき、TはSにおいて上方に有界であるという。

<u>定　理　6.2</u>　ΩをXの開凸部分集合、$T : \Omega \to F_L$　をconvex map、 $x_0 \in \Omega$ とする。このときTが x_0 のある近傍において上方に有界ならば、Tは x_0 において連続である。

<u>定　理　6.3</u>　$T(x) = (m(x), \alpha(x))_L$　は convex map であるとする。 z, h をXの点とし、次の仮定をおく：

正数 λ_0 が存在して

$$\alpha(z+\lambda h) \geqq \alpha(z) \qquad \forall \lambda \in [0, \lambda_0]$$

または

$$\alpha(z+\lambda h) \leqq \alpha(z) \qquad \forall \lambda \in [0, \lambda_0]$$

のどちらかが成立する。

このとき

(1)　m, α のz における h方向の片側方向微分　$m'(z;h)$, $\alpha'(z;h)$が存在する。

(2)　Tのz における h方向の片側方向微分　$F'(z;h)$が存在して

$$F'(z;h) = (m'(z;h), \alpha'(z;h))_L$$

と表される。

参考文献

[1]　D.Dubois and H.Prade, Operations on fuzzy numbers, Int. J. Systems Science 9(1978),613-626.

[2]　D.Dubois and H.Prade, Systems of linear fuzzy constraints, Fuzzy Sets and Systems 3(1980),37-48.

[3]　D.Dubois and H.Prade, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Informatin Sciences 30(1983),183-224.

[4]　H.Prade, Model semantics and fuzzy ste theory, in "Fuzzy Set and Possibility Theory " (R.R.Yager,ed.),232-246, Pergamon Press,Oxford-New York,1982.