数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 160-170

Essential independence of random indices

福岡大・理　　杉万　郁夫 (Ikuo Sugiman)

§1　序

確率変数列 $\{Y_n\}$ が定義されている確率空間 (Ω, Θ, P) 上で定義された確率添字、即ち、正整数値の確率変数の列 $\{\tau_n\}$ が与えられているとき、

$$Y_{\tau_n}(\omega) = Y_{\tau_n(\omega)}(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

で定義される確率変数の列 $\{Y_{\tau_n}\}$ は”確率添字を伴った確率変数列”と呼ばれている。また、通常の極限定理、即ち、確率変数の列 $\{Y_n\}$ とその極限分布 F（$Y_n \Rightarrow F$）が与えられ、$\{\tau_n\}$ が ∞ に確率収束する（$\tau_n \longrightarrow \infty$）とき、$\{Y_{\tau_n}\}$ の分布が $\{Y_n\}$ と同じ F に収束する（$Y_{\tau_n} \Rightarrow F$）ことを、”確率添字を伴った極限定理（Random Limit Theorem, ＲＬＴ)”と呼び、この為の $\{Y_n\}$，$\{\tau_n\}$ に関する条件が数多く研究されてきた。

これまでに行われてきたＲＬＴに関する研究は、扱われている条件によって大きく二つに分類することができる。一方は、$\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性がＲＬＴの十分条件であることに着目し、この独立性の概念を弱めることでその適用範囲を広げようとするものである。しか

し、この類の条件は $\{\tau_n\}$ を停止規則の列とする最も一般的な実用例を考えれば、その応用的価値に基本的な問題点を持つものであることは明瞭である。他方、$\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性に関する仮定を全く設けず、$Y_{\tau_n} - Y_n$ の退化条件を一般化しようとするものは Anscombe 条件と呼ばれ、統計的逐次推定法や再生理論に幅広い応用を持つ為、研究成果も豊富である。しかし、この条件は、確率論的一様連続性という極めて強い制約を要求する為に、より一般化され、より広い適用範囲を持つ結果に拡張することが必要と思われる。

ここでは、独立性について I.Sugiman[9] により、また、Anscombe 条件について、D.Aldous 等 ([1],[3],[8]) により与えられたそれぞれの条件によって極限定理に導入できる確率添字の列の族の決定を統一的に扱うことを目的とする。この報告では、次節以降も次のことを仮定する。

(Ω, Θ, P) ; 確率空間

$\{Y_n\}$; (Ω, Θ, P) 上の実数値確率変数の列

F ; 分布関数

［仮定］　$Y_n \Rightarrow F$　（法則収束）

$\{\tau_n\}$; (Ω, Θ, P) 上の確率添字の列

［仮定］　$\tau_n \longrightarrow \infty$　（確率収束）

§ 2　一様 ε -独立性

この節では、§ 1 で述べた $\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性の中で最も適用範囲の広い一様 ε -独立性について述べる。

$\varepsilon > 0$

定義２．１

・ $\{\tau_n\}$ が x で $\{Y_n\}$ と一様 ε -独立であるとは、次の条件を満たす正整数 N, M が存在することである。

任意の $m_k \geq N(k \in \mathbf{N})$ を満たす数列 $\{m_k\}$ と任意の可算分割 $\{A_k\} \in \cup_{m \geq M} \Pi(\tau_m)$ に対して、

$$|\Sigma_{k=1}^{\infty} \Phi(\{Y_{m_k} < x\}, A_k)| < \varepsilon$$

が成り立つ。

・任意の $x \in C(F)$ について一様 ε -独立のとき、” x で” を省略する。

・任意の $\varepsilon > 0$ について一様 ε -独立のとき、単に” 一様独立” と呼ぶ。

（記号）

・ $\Phi(A, B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$

・ $\Pi(X)$ ； Ω の $\sigma(X)$ -可測な可算分割全体のなす族

・ $C(F)$ ； F の連続点の集合

定理２．２

$\{\tau_n\}$ が $\{Y_n\}$ と一様独立のとき、ＲＬＴ

$$Y_{\tau_n} \Rightarrow F$$

が成り立つ。

この結果を極限定理に導入できる確率添字の決定、または、導入できる確率添字の族による条件の特徴付けという立場から見ると次のような条件及び結果となる。

$\{\Theta_n\}$；Θ の sub-σ-algebra の列

定義２．１の $\sigma(\tau_n)$ を Θ_n に置きかえて ”$\{\Theta_n\}$ が $\{Y_n\}$ と一様独立” であることを定義することにより次の結果が得られる。

定理２．３

$\{\Theta_n\}$ が $\{Y_n\}$ と一様独立である為の必要十分条件は、ＲＬＴが条件

”τ_n が Θ_m-可測となる $m \geq n$ が存在する。”

を満たす全ての $\{\tau_n\}$ について成り立つことである。

§ 3　Anscombe 条件

ここでは、古典的な Anscombe 条件を τ_n/n が確率収束する速さによって $Y_{\tau_n}-Y_n$ の退化条件を細分化し、それぞれの条件について、導入できる確率添字の列の族による特徴付けを与える。

<u>定義３．１</u>

・ $\{Y_n\}$ が Anscombe 条件を満たすとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次式を満たす $\delta > 0$ が存在することである。

$$limsup_{n\to\infty} P(max_{i;|i-n|\le\delta n} \mid Y_i - Y_n \mid \ge \varepsilon) \le \varepsilon$$

・$\{\delta_n\}$ を非増加な正数列とするとき、$\{Y_n\}$ が条件 A（$\{\delta_n\}$）を満たすとは、

$$max_{i;|i-n|\le\delta_n n} \mid Y_i - Y_n \mid$$

が $n\to\infty$ のとき退化することである。

Γ；τ_n／$n \longrightarrow 1$ を満たす確率添字の列 $\{\tau_n\}$ の集合

$\Gamma(\{\delta_n\})$；$P(\mid(\tau_n/n)-1\mid > \delta_n)\to 0$ を満たす確率添字の列 $\{\tau_n\}$ の集合

定理３．２

・$\{Y_n\}$ が Anscombe 条件を満たす必要十分条件は、全ての $\{\tau_n\} \in \Gamma$ についてＲＬＴが成り立つことである。

・$\{Y_n\}$ が条件 A（$\{\delta_n\}$）を満たす必要十分条件は、全ての $\{\tau_n\} \in \Gamma(\{\delta_n\})$ についてＲＬＴが成り立つことである。

ここで、$\Gamma = \cup_{\delta_n \downarrow 0} \Gamma(\{\delta_n\})$ となることに注意すれば、次のように Anscombe 条件を細分化できる。

定理３．３

$\{Y_n\}$ が Anscombe 条件を満たす必要十分条件は、$\delta_n \downarrow 0$ を満たす任意の正数列 $\{\delta_n\}$ について、$\{Y_n\}$ が条件Ａ（$\{\delta_n\}$）を満たすことである。

§ 4　Essential part における一様 ε -独立性

$\{\Theta_{n,m}\}$；Θ の sub- σ -algebra の二重列

$\{D_n\}$；N の部分集合の列で、$l_n = minD_n \to \infty$ を満たすもの

$\varepsilon > 0$

定義４．１

・$\{\Theta_{n,m}\}$ が x で（$\{Y_n\}$，$\{D_n\}$）と ε-独立であるとは、次式を満たす正整数 N が存在することである。任意の正整数 n に対して、N から D_n への関数の m_n と可算分割 $\{A_{n,k}\}_k \in \cup_m \Pi(\Theta_{n,m})$ をとり、関数列 $\{m_n\}$ と可算分割の列 $\{A_{n,k}\}_k$ をつくると、

$$| \Sigma_{k=1}^{\infty} \Phi(\{Y_{m_n(k)} < x\}, A_{n,k}) | < \varepsilon$$

が成り立つ。

・”x で” と ε-の省略は定義２．１に同じ。

定理４．１

$\{\Theta_{n,m}\}$ が（$\{Y_n\}$，$\{D_n\}$）と独立である為の必要十分条件は、ＲＬＴが、次の二つの条件を満たす全ての $\{\tau_n\}$ について成り立つことである。

・τ_n が $\Theta_{n,m}$-可測となる m が存在する。

・$lim_{n\to\infty} P(\tau_n \in D_n) = 1$

（証明）

必要性を示す。任意の $\varepsilon > 0$ と $x \in C(F)$ に対して、正整数 N_1 が存在して、$n \geq N_1$ のとき、任意の $k \in D_n$ に対して、

$$| P(Y_k \leq x) - F(x) | < \varepsilon$$

が成り立つ。ここで、

$$\nu_n = \begin{cases} \tau_n & \text{on } \{\tau_n \in D_n\} \\ l_n & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと、ν_n は $\Theta_{n,m}$- 可測となる m が存在し、かつ $\nu_n \in D_n$ である。よって、$n \geq N_2$ のとき、

$$\begin{aligned} &|\, P(Y_{\tau_n} \leq x) - P(Y_{\nu_n} \leq x)\,| \\ &\leq 2P(\tau_n \neq \nu_n) \\ &= 2P(\tau_n \in D_n^c) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる正整数 N_2 が存在し、かつ、$n \geq N_1$ のとき、

$$\begin{aligned} &|\, P(Y_{\nu_n} \leq x) - F(x)\,| \\ &\leq |\, \Sigma_{k\in D_n}\Phi(\{Y_k \leq x\}, \{\nu_n = k\})\,| \\ &+\Sigma_{k\in D_n}\,|\, P(Y_k \leq x) - F(x)\,|\, P(\nu_n = k) \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。これらより、RLT が示される。

十分性を背理法で示す。独立性を否定すると、次の条件を満たす $x \in C(F), \varepsilon > 0$, N から D_n への関数列 m_n, 可算分割 $\{A_{n,k}\}_k \in \cup_m \Pi(\Theta_{n,m})$ の列と N の部分列 $\{n'\}$ が存在する。

$$|\, \Sigma_{k=1}^{\infty}\Phi(\{Y_{m_{n'}(k)} \leq x\}, A_{n',k})\,| \geq \varepsilon$$

ここで、$\nu_n = m_n(k)$ on $A_{n,k}$ とおくと、$\{\nu_n\}$ は定理の確率添字に対する条件を満たすが、

$$|\, P(Y_{\nu_{n'}} \leq x) - \Sigma_{k=1}^{\infty}P(Y_{m_{n'}(k)} \leq x)P(A_{n',k})\,| \geq \varepsilon$$

より、$Y_{\nu_n} \Rightarrow F$ が成り立たない。 $\square$

これを用いると、§２で述べた一様 ε -独立性に対する定理２．３は，定理４．１において、

$$\begin{aligned}\Theta_{n,m} &= \Theta_{n+m-1}\\ D_n &= [n, \infty)\end{aligned}$$

とおくことにより、$\{\Theta_{n,m}\}$ と $\{D_n\}$ の持つ単調減少性から得られる。また、§３で述べた細分化された Anscombe 条件Ａ（$\{\delta_n\}$）に対する定理３．３も、定理４．１において、

$$\begin{aligned}\Theta_{n,m} &= \Theta\\ D_n &= \{i \in \mathrm{N}; \mid i-n \mid \leq n\delta_n\}\end{aligned}$$

とおくことにより得られることが証明できる。

さらに、定理４．１は、これらの条件の導入できる確率添字の列の族による特徴付けを統一的に行えるだけでなく、今後発展するこれらの中間的条件の特徴付けも与えることができるものと思われる。

（参考文献）

[1] D.Aldous, Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.83 (1978) 117-126.

[2] F.J.Anscombe, Large sample theory of sequential estimation, Proc.Cambridge Philos.Soc.48 (1952) 600-607.

[3] M.Csörgő and Z.Rychlik, Weak convergence of sequences of random elements with random indices, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.88 (1980) 171-174.

[4] C.C.Y.Dorea, H.T.David and N.M.Werner, Uniform ε-independence and the convergence in distribution of randomly indexed sequences, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.96 (1984) 533-542.

[5] A.Gut, Stopped Random Walks : Limit Theorems and Applications (Springer-Verlag ,1988)

[6] H.Robbins, The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables, Bull.Amer.Math.Soc.54(1948) 1151-1161.

[7] I.Sugiman, A random CLT for dependent random variables, J. Multivariate Anal.20 (1986) 321-329.

[8] I.Sugiman, On a stochastic version of the Anscombe condition, Bull.Cent.Res.Inst. Fukuoka Univ.104 (1988) 33-39.

[9] I.Sugiman, Uniform independence of random indices and the limit theorem of randomly indexed sequences, Fukuoka Univ. Sci. Rep.21 (1991) 195-196.