

一様剪断流の統計的性質

京大・理 田中満 (Mitsuru Tanaka)
京大・数理研 木田重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

一様剪断流の非等方的な性質と渦構造を数値的に調べた。一般に、乱流は境界層や混合層などの剪断流において励起される。この剪断流から起こる大きなスケールの運動エネルギーが非線形自己相互作用により小さなスケールに運ばれ、粘性によって熱に変わると考えられている。しかし、乱流の運動の複雑さのため、その詳しいメカニズム、例えば、平均剪断流や組織構造などの果たす役割については不明な点も多い。近年、乱流境界層におけるヘアピン形の渦に関する数多くの研究が、そのエネルギー生成や輸送に対する役割の重要性に着目して行なわれてきた (Head & Bandyopadhyay 1981)。Kim & Moin (1986) はチャンネル流の数値シミュレーションのデータから、ヘアピン形の渦構造がレイノルズ応力の大きいところと対応していることを明らかにしている。また、粘性底層においては、流れの方向に引き伸ばされ、壁において流れと垂直な方向に遅い流れと速い流れが交互に並んだ組織構造が存在する。この構造はストリークと呼ばれ、Kline 等 (1967) により最初に観測された。これらの構造を理解することにより乱流の物理的なイメージがより明確になることが期待されている。

この研究の主な目的は、ヘアピン渦などの渦構造やその時間発展のメカニズムを調べることである。もう一つの目的は、一様剪断流の非等方的な性質の解析である。2 章では、本文中で用いる式やパラメータ、数値スキームについての説明を行なう。3 章では、乱流の統計的性質や渦の構造について調べる。また、4 章では、締めくくりとして簡単なまとめを行なう。

2. 一様剪断流の数値シミュレーション

2.1 基礎方程式

平均流が一定の方向を向いており、それと垂直な方向に一定の勾配で変化する一様剪断流について、その非等方的な性質と乱流中に現れる渦構造を調べる。ここでは、平均速度場は

x_1 -方向を向き x_2 -方向に勾配があるとする (図 1)。つまり、

$$U = (Sx_2, 0, 0) \quad (2.1)$$

の形で与えられるとする。ここで、 S は剪断の強さを表す量であり、また、平均流の渦度は $(0, 0, -S)$ である。以後、速度場の平均流からのゆらぎの x_1, x_2, x_3 成分をそれぞれ、 u_1, u_2, u_3 と書く。このとき、ナビエ-ストークス方程式と連続の式は、

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2a, b)$$

と書ける。ここで、 p は圧力、 ν は流体の動粘性率である。上式左辺の第 2 項、第 3 項は、それぞれ平均流によるゆらぎの場の移流の効果、平均流からゆらぎの場へのエネルギーの流入を表す項である。平均流 (2.1) に対して上式は、

$$\partial_t u_i + Sx_2 \partial_1 u_i + Su_2 \delta_{i1} + (u_k \partial_k) u_i = -\partial_i p + \nu \nabla^2 u_i, \quad \partial_k u_k = 0 \quad (2.3a, b)$$

と書き換えられる。(2.3a) の curl をとれば、

$$\partial_t \omega_i + Sx_2 \partial_1 \omega_i + (u_k \partial_k) \omega_i = \frac{S}{2} \omega_2 \delta_{i1} + \frac{S}{2} \omega_1 \delta_{i2} + s_{ij} (\omega_j - S \delta_{j3}) + \nu \nabla^2 \omega_i \quad (2.4)$$

が得られる。ここで $\omega_i = \epsilon_{ijk} \partial_j u_k$ は渦度場のゆらぎを表し、

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

は、歪み速度テンソルのうちゆらぎの場から成る部分である。

2.2 動く座標系

方程式 (2.3) や (2.4) には、座標が陽に現れるが、それを消去するために平均剪断流とともに動く座標系 (x^*, t^*) 、

$$x_1^* = x_1 - Stx_2, \quad x_2^* = x_2, \quad x_3^* = x_3, \quad t^* = t \quad (2.6)$$

を導入する。このとき、新旧座標系での微分演算子には

$$\partial_1 = \partial_1^*, \quad \partial_2 = \partial_2^* - St \partial_1^*, \quad \partial_3 = \partial_3^*, \quad \partial_t = \partial_t^* - Sx_2 \partial_1^* \quad (2.7)$$

の関係がある。ここで、 $\partial_i^* = \partial / \partial x_i^*$ および $\partial_t^* = \partial / \partial t^*$ である。この動く座標系で (2.3) と (2.4) は、

$$\partial_t^* u_i^* + Su_2^* \delta_{i1} + (u_k^* \partial_k^*) u_i^* = -\partial_i^* p^* + \nu \nabla^{*2} u_i^*, \quad \partial_k^* u_k^* = 0 \quad (2.8)$$

$$\partial_t^* \omega_i^* + (u_k^* \partial_k^*) \omega_i^* = \left(\frac{1}{2} \omega_2^* \delta_{i1} + \frac{1}{2} \omega_1^* \delta_{i2} \right) + s_{ij}^* (\omega_j^* - S \delta_{j3}) + \nu \nabla^{*2} \omega_i^* \quad (2.9)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $p^*(\mathbf{x}^*) = p(\mathbf{x})$, $\omega^* \equiv \nabla^* \times \mathbf{u}^*$, $\nabla^* \equiv (\partial/\partial x_1^*, \partial/\partial x_2^* - St \partial/\partial x_1^*, \partial/\partial x_3^*)$ である。(2.8) や (2.9) ではすでに空間座標が消去されているので方程式をフーリエ変換を使って解くことができる。このとき注意しなければならないことは、この動く座標系と元の座標系でのフーリエ波数の関係である。元の座標系での波数を \mathbf{k} 、動く座標系での波数を \mathbf{k}^* とすると、(2.7) より

$$\mathbf{k}(t) = (k_1^*, k_2^* - St k_1^*, k_3^*) \quad (2.10)$$

の関係がある。動く座標系での波数 \mathbf{k}^* は、時間にはよらないが元の座標系での波数 \mathbf{k} は、上式からわかるように時間とともに変化する量である。

2.3 支配パラメーター

非一様な剪断流では、一様でない速度勾配など流れの幾何学的な形態によって、乱流の振舞を規定する長さスケールが決まるのに対し、一様剪断流においては、初期のエネルギースペクトルが乱流渦の大きさを決める。乱流の小さなスケールを記述するものとしては、剪断の影響と粘性の効果のつりあいを決める長さスケール $(\nu/S)^{1/2}$ ($= l_s$) がある。この長さは、乱流境界層理論では、粘性長として知られる量である。また、剪断流の時間発展は無次元時間 St (total shear) によって記述される。一様剪断乱流を記述するパラメーターは、剪断の強さ、粘性の強さ、ゆらぎの場の強さの比によって決まる。

ω'/S は、ゆらぎの場の小さな渦の時間スケールと剪断の時間スケールとの比であり、非線形性の強さを表す。ここで、 $\omega' = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$ である。この量は $(l_d/l_s)^2$ のように、コルモゴロフ長 l_d と粘性長 l_s の比で表される。小スケールでの場の振舞に対する平均流剪断流の影響を表す量としてこの量をとることとする。

乱流の大スケールでの振舞を反映する量として、Lee 等 (1990) が導入した実効的な剪断の強さ

$$S^* = \frac{S u'^2}{\epsilon} = \frac{S}{\nu} \frac{u'^2}{\omega'^2} \quad (2.11)$$

を選ぶこととする。ここで、 $u' (= \sqrt{\langle u^2 \rangle})$ は速度場のゆらぎの大きさ、 $\epsilon (= \nu \omega'^2)$ はエネルギー散逸率であり、 S^* は渦回転時間 u'^2/ϵ と剪断の時間スケールとの比であると解釈できる。また、 S/ω' と S^* との比の自乗は、レイノルズ数 $Re_T = u'^4/\epsilon \nu$ を与える。

2.4 計算スキームと初期条件

(2.10) の直接数値シミュレーションを空間微分にはスペクトル法 (128^3 モード)、時間積分にはルンゲ-クッタ-ジル法を用いて行なう。計算領域の大きさは $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ もしくは

$4\pi \times 2\pi \times 2\pi$ で、 $4\pi \times 2\pi \times 2\pi$ の場合には、 x_1 方向の格子間隔を他の 2 方向の 2 倍にする。初期条件は、速度のフーリエ係数をその振幅がエネルギースペクトル $E(k) \propto k^4 \exp[-ck^2]$ ($c > 0$ は定数) になるようにして位相をランダムに与える。

計算領域は平均流とともに動く (図 (2-a))。これとともにフーリエ空間で各フーリエモードは、 k_2 方向に $k_2(t) = k_2(0) - Stk_1$ に従って動く (図 (2-b))。時間が経つにつれ計算領域は徐々に歪んでいくので、計算を続けるには格子を切り直す必要がある。格子の切り直しは流れ方向の周期性を利用して行なう (図 (2-c)、(2-d))。ただし、この際に $|k_2| > k_{2\max}$ ($k_{2\max}$ は x_2 方向の最大波数) となるフーリエモードはエイリアジングエラーを引き起こす。今回のシミュレーションでは、 $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ の場合には $St = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ で、また、 $4\pi \times 2\pi \times 2\pi$ の場合には $St = 1, 3, 5, \dots$ で格子の切り直しを行なう。エイリアジングエラーの元となるフーリエモードは各ステップにおいてゼロとおく。つまり、図 (2-d) の六角形の内側にあるフーリエモードのみを用いる。以下では、主に $S_0^* = 16, (S/\omega')_0 = 1$ のシミュレーションから得られたデータを紹介する。なお、この場合の初期のテイラー長レイノルズ数は、約 36 である。

3. 剪断乱流の構造

3.1 非等方的構造

図 (3-a) と (3-b) はそれぞれ ゆらぎの場のエネルギーとエントロフィーの時間変化を $S_0^* = 16$ の場合に対して示したものである。エネルギーは初期の時間帯を除いて単調に増加する。非粘性の線形理論からは、エネルギーは時間に対し線形に増えると予測されるが (Rogers (1991))、この場合にはむしろ指数的に増加しているように見える (Tavoularis & Karnik (1989))。一方、エントロフィーは、 $St = 2$ ぐらいまでは線形に増加し $St = 10$ の後で急速に増加していることがわかる。これらの結果は、乱流渦の生成や崩壊といった渦構造の時間発展と関連しているものと思われる。

他方、統計量の中にはある平衡値に漸近するよう見えるものもある。図 (3-c) は、 u_1 と u_2 との相関係数 $-\overline{u_1 u_2} / (\overline{u_1'^2} \overline{u_2'^2})$ の時間発展を示したものである。この量は、 $St = 3$ 近くで最大値 0.65 をとり、 St の大きいところで 0.5 に漸近するよう見える。これは、実験から得られた値 (0.4-0.5) と良く一致している (Tavoularis & Corrsin (1981))。今回のシミュレーションの結果からは、この係数はレイノルズ数には依存するが (レイノルズ数が低いほど高い値をとる) S^* の値にはあまりよらないことがわかった。ちなみに、レイノルズ数を $1/2$ にすると、0.58 また $1/4$ にすると 0.64 ぐらいの値をとる。

剪断乱流においては、一般にエネルギーが流れ方向の成分に集中するが、図 (3-d) は $2R_{11}/(R_{22} + R_{33})$ という量の時間発展を示す。ここで、 $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$ は、レイノルズ応力テンソルである。図より、この量は $St = 8$ で 3.5 程度の最大値を持ち、その後減少に転じることがわかる。この量が乱れの場の非等方性を表していると考えると、これは、いったん非

等方の度合を強めていった乱流がある時刻の後に再等方化する傾向にあると考えることができる。なお、Tavoularis & Corrsin の実験値は約 2.2 である。

剪断乱流の非等方的性質をもう少し詳しく見るため 速度場、渦度場の 非等方テンソル

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{kk}} - \frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{V_{ij}}{V_{kk}} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad (3.1.a, b)$$

の振舞を調べる。ここで、 $V_{ij} = \overline{\omega_i \omega_j}$ である。図 (4-a) は、速度場の非等方テンソルの時間発展を示す。最も特徴的な事は、図 (3-d) でも示したように乱流エネルギーが、流れ方向の成分に集中していることである。剪断応力を表す成分 $|b_{12}|$ は、はじめ増え続け $St = 2.5$ あたりで最大値を持ち、その後流れ方向のエネルギーの増加により徐々に減少し、0.15 に漸近するように見える。 $b_{11} > 0 > b_{33} > b_{22}$ という関係は、様々な剪断乱流において観測されている。

図 (4-b) は、渦度場の非等方性の時間発展を示したものである。初期のある期間 ($St \leq 4$) では、 $v_{11} > v_{22} > v_{33}$ であるが、 $St \approx 6$ において v_{11} と v_{33} が入れ代わる。その後には、 v_{11}, v_{22}, v_{33} の絶対値は 0 に近付いていくように見える。このことは、剪断乱流の小スケールの構造が等方化されることを示している。

3.2 渦構造

A. 渦度ベクトルの方向分布

各格子点上で (x_1, x_2) -平面上に射影した渦度ベクトルが平均流の流れの方向と成す角 (θ) を測った。ここに、 $\theta = \tan^{-1}(\omega_2/\omega_1)$ である (図 5-a)。図 (5-b) と (5-c) は、それぞれ $St = 0$ と 1 における θ の度数分布である。図 (5-b) の平坦な分布 (初期の場が等方的であることを示す) から、 $\theta = 45^\circ$ と -135° に 2 つの鋭いピークが現れてくることがわかる (図 (5-c))。図 (5-d) は各格子点上でその点での渦度の大きさを掛けた重みつき度数分布である。重みを掛けたものの方がそうでないものよりも鋭いピークを持っていることがわかる。このことは、渦度ベクトルが主として 45° もしくは -135° の方向に向けられるだけでなく、その方向に強められてもいることを示す。(2.4) 式の右辺第 1 項と第 2 項を見ると、平均流による引き伸ばしがこの方向に起こっていることがわかる。つまり、この平均流による引き伸ばしの効果が渦構造の生成に大きく寄与している。図 (5-e) は、 $St = 2$ での渦度場のゆらぎの強い領域を示したものである ($\omega' \geq 2S$)。平均流の流れの方向から約 40° 傾いたチューブ状の構造が見える。

渦の構造をさらに詳しく知るために、渦ベクトルを極座標での角度で表したものの確率密度関数 (p.d.f.) を調べた。図 (6-a) は、 $St = 1$ での渦度ベクトルのゆらぎの成分を重みとして掛けた確率密度関数である。図 (6-b) のように α は渦ベクトルと x_2 -軸が成す角、 β は渦ベクトルを (x_1, x_3) -平面に射影したものと x_1 -軸とが成す角である。図 (6-a) 中で \times は

平均流の渦度の方向を表し、○は (x_1, x_2) -平面で平均流に対して 45° もしくは、 -135° 傾いたベクトルを示す。 $(\alpha, \beta) = (45^\circ, 0^\circ)$ と $(135^\circ, 180^\circ)$ 付近のふたつのピークは、それぞれ図(5-d)の $\theta = 45^\circ$ と -135° のピークに対応する。

図(7-a,b,c,d)はそれぞれ $St = 1, 4, 8, 12$ での渦度のゆらぎの重みを掛けた分布を示す。これらが示す主な特徴は次のようにまとめられる。

- (i) $St = 1$ での $(\alpha, \beta) = (45^\circ, 0^\circ)$ と $(135^\circ, 180^\circ)$ 辺りの2つのピークは $St = 4$ には $(60^\circ, 30^\circ)$ と $(120^\circ, 150^\circ)$ に移動し、徐々に $(70^\circ, 40^\circ)$ ($110^\circ, 140^\circ$)辺りに近づくように見える。
- (ii) $St = 4$ と $St = 8$ の間のある時間に $(\alpha, \beta) = (90^\circ, -90^\circ)$ のあたりに平均流の渦度の方向に新しいピークが現れる。
- (iii) 初期に 45° 傾いたベクトルに対応する位置への集中の割合は時刻 $St = 4$ 頃が最も著しく以後減少する。

物理的には、(i)は初期の時間帯に平均流の方向から 45° 傾いた渦度ベクトルが徐々に (x_1, x_3) -平面へと倒れていくのと同時に、その x_3 成分は正になる、つまり、平均流の渦度と逆の方向を向く傾向にあることを意味する。(ii)は、時間の経過とともに平均流の渦度と同じ向きの渦度が強められることを示す。(iii)はおそらく図(5-e)で示したチューブ状の構造などの渦構造が何らかの不安定性により崩壊することと関係しているものと思われる。

B. ヘアピン構造

図(8-a,b,c)は時刻 $St = 8$ でのゆらぎ成分と平均の部分を含めた渦度場全体からできる渦線をその典型的なもののスケッチとともに示したものである。図(8-a)では馬蹄形の渦構造(ヘアピン)がはっきりと見える。馬蹄形の渦の全体としての構造もこれらの絵よりわかる。図(8-b)や(8-c)よりこれらの渦は主流に対して約 20° 傾いた直線上に並んでいることがわかる。もう一つ特徴的なことが構造を (x_1, x_2) -平面に射影してみるとわかる。図(8-b)とスケッチからわかるように流れ方向への傾斜角は馬蹄形渦の足の部分の約 30° から、頭の部分の約 90° へと増加する。渦度ベクトルと馬蹄形渦の渦線との対応から、ヘアピンの足と頭はそれぞれp.d.f.の $(\beta > 0)$ のピーク $(\beta < 0)$ のピークの位置に対応している。(ただしp.d.f.への寄与がどの程度かは不明。)もし、p.d.f.への寄与が主にヘアピン渦からであると仮定すると、p.d.f.の時間発展との対応を考えて、上の(i)は、ヘアピンの足の部分の成長に対応し、(ii)は、ヘアピンの頭の部分がストレッチングにより強められることに対応しているものと考えられる。

4. 結語

これまで、場の非等方性について論じてきたが、剪断流はスペクトル空間においても非等方性を示す。数値スキームの説明(図(2-b))からもわかるように、平均流の移流の効果により

スペクトルは k_2 - 方向に引き伸ばされる。その引き伸ばされる度合は、レイノルズ数や剪断の強さによる。乱流の違うスケールの運動の相互作用という観点から見ると、一様な剪断乱流では、一様な剪断が表す無限大のスケールの運動と、ゆらぎの場の持つ様々な長さスケールでの運動が相互作用している状況にあることがわかる。この極限的な状況において、フーリエモード間の相互作用を調べれば、大きなスケールと小さなスケールの間エネルギー伝達の基本的なメカニズムが明らかになると思われる。

速度ベクトルや渦度ベクトルの非等方的な振舞は、乱流中に現れる渦構造を反映している。例えば、 ω_1 と ω_2 の相関係数 v_{12} が大きな値を持つのは、図 (5-e) に現れるチューブ状の渦構造に対応し、 $b_{12} < 0$ は、これらのチューブ状の渦により誘導される速度場が、 $u_1 u_2 < 0$ であることに対応する。我々がいま注目しているのは、図 (4-b) に示される、 v_{11} と v_{33} の逆転である。 $St = 8$ の渦度場を調べると、 x_2 - 方向に非常に薄く、 x_1 - 方向に長いシート状の構造が数多く見られる。この構造の中で、渦ベクトルは平均流の渦度と同じ向きを向いている。 v_{33} が増加するのは、主にこのシート状の渦のためと思われる。p.d.f. における ($\beta < 0$) のピークに対してこの渦が大きく寄与していることは、間違いのないようである。この渦の詳しい構造、発生メカニズム、ヘアピン渦との関係などを調べるのが今後の課題である。

参考文献

- M.R.Head & P.Bandyopadhyay: J.Fluid Mech. **107**(1981) 297.
 J.Kim & P.Moin: J.Fluid Mech. **162**(1986) 339.
 S.J.Kline, W.C.Reynolds, F.A.Schraub & P.W.Runstadler: J.Fluid Mech. **30**(1967) 741.
 M.J.Lee, J.Kim & P.Moin: J.Fluid Mech. **216**(1990) 561.
 M.M.Rogers & P.Moin: J.Fluid Mech. **176**(1987) 33.
 M.M.Rogers: Phys.Fluids **A3**(1991) 144.
 S.Tavoularis & S.Corrain: J.Fluid Mech. **104**(1981) 311.
 S.Tavoularis & U.Karnik: J.Fluid Mech. **204**(1989) 457.

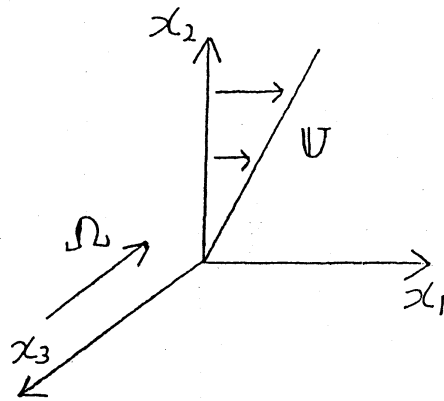


Fig.1 Coordinate system

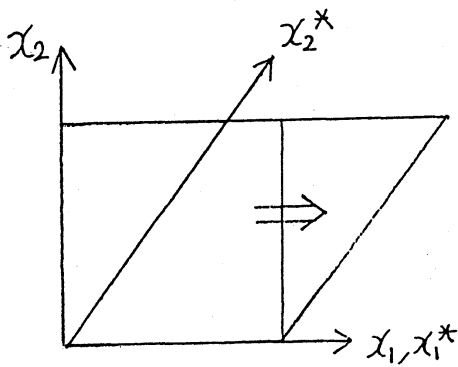


Fig.2-a Moving coordinate

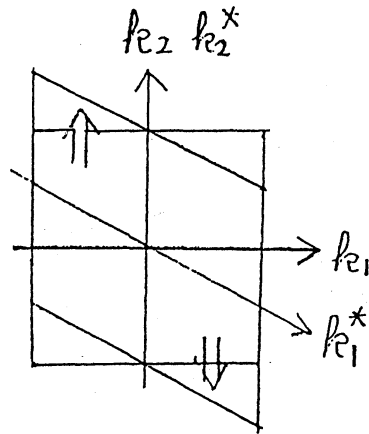


Fig.2-b Moving coordinate in the Fourier space

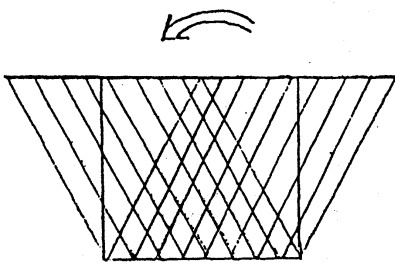


Fig.2-c Remeshing

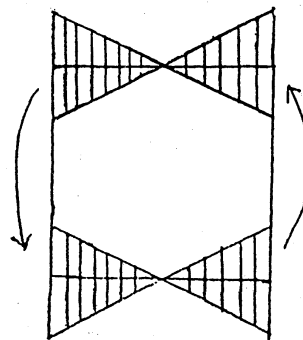


Fig.2-d Remeshing (Fourier space)

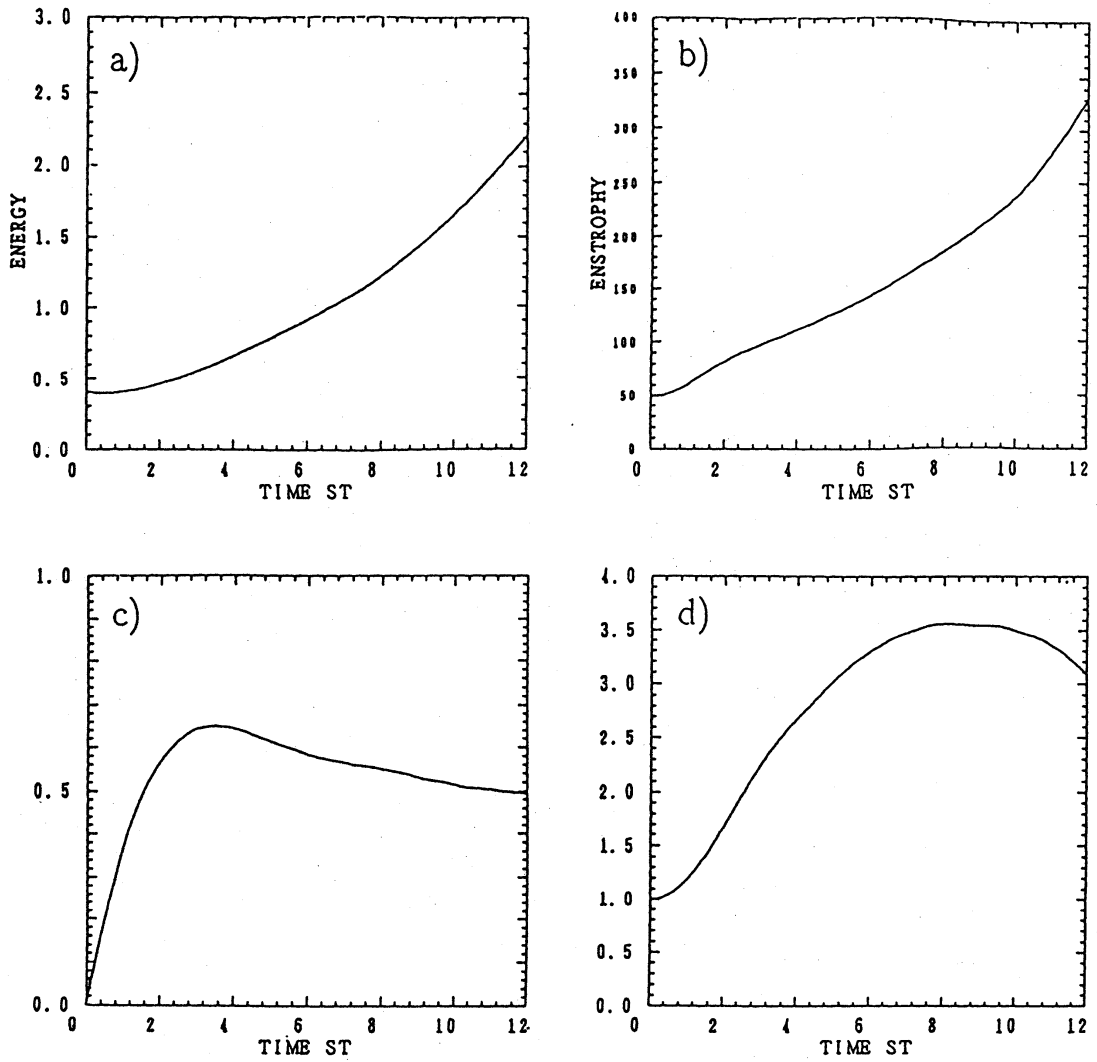


Fig.3 Time-evolutions of a)turbulent energy, b)enstrophy, c)the cross correlation $-\overline{u_1 u_2} / u_1' u_2'$, d)the quantity $2R_{11} / (R_{22} + R_{33})$.

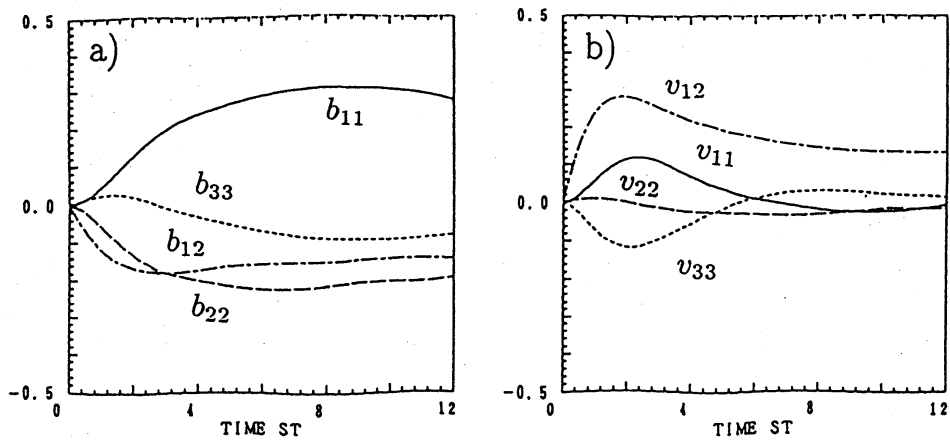


Fig.4 Time histories of anisotropy tensors of a)the velocity (normalized Reynolds-stress), and b)the vorticity for the nonlinear case ($S^* = 16$).

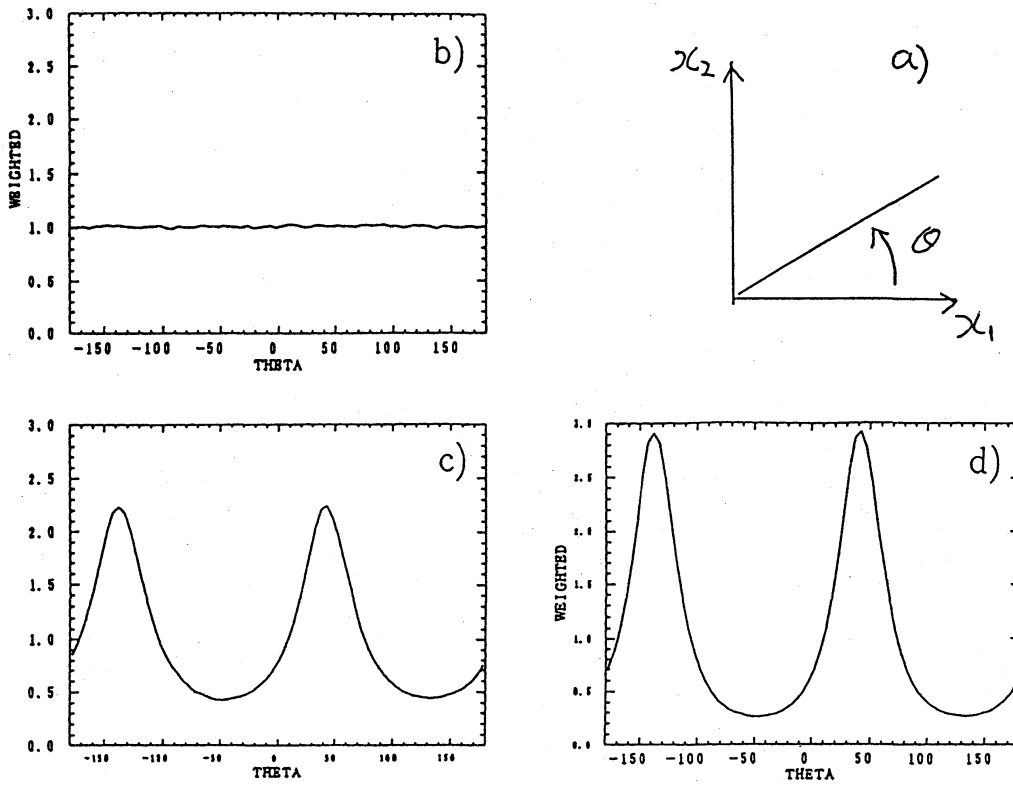


Fig.5 a) Sign convention for the inclination-angle. Distribution of the inclination-angle of the vorticity vectors in (x_1, x_2) -plane. b) Unweighted p.d.f. at $St=0$. c) Unweighted p.d.f. at $St=1$. d) Weighted p.d.f. at $St=1$.

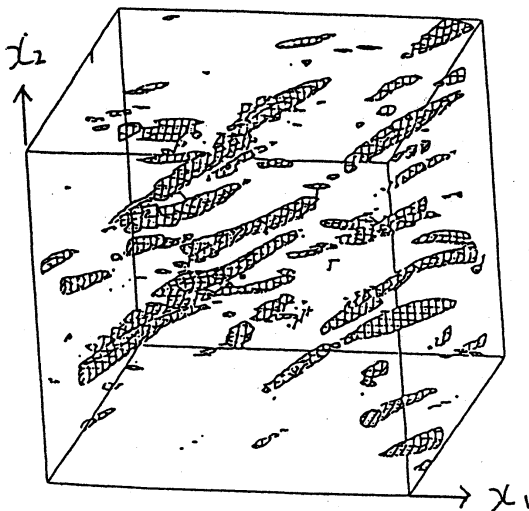


Fig.5-e Vortex structures at $St=2$

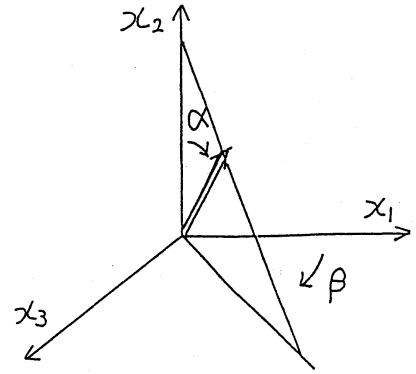
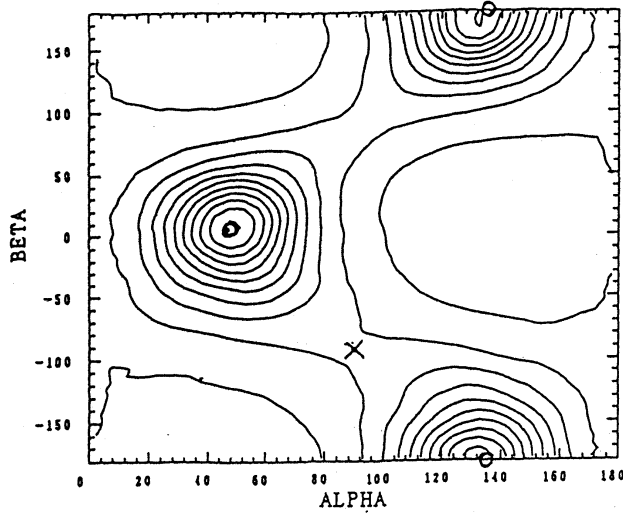


Fig.6-b

Fig.6-a Polar-angle p.d.f. of vorticity vectors at $St=1$ for $S^*=16$. Sign convention for angle α and β .

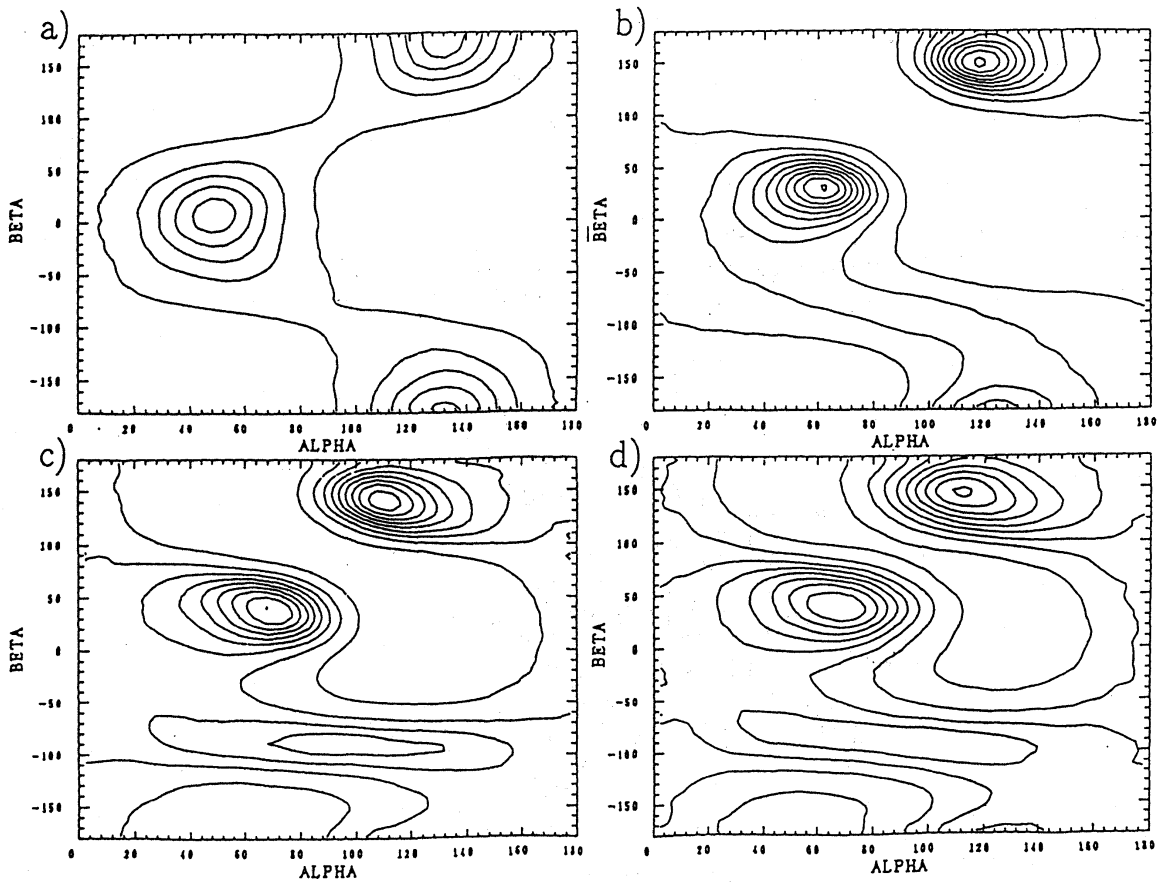


Fig.7 The p.d.f.s of the fluctuating vorticity fields for $S^*=16$: a) $St=1$, b) $St=4$, c) $St=8$, d) $St=12$.

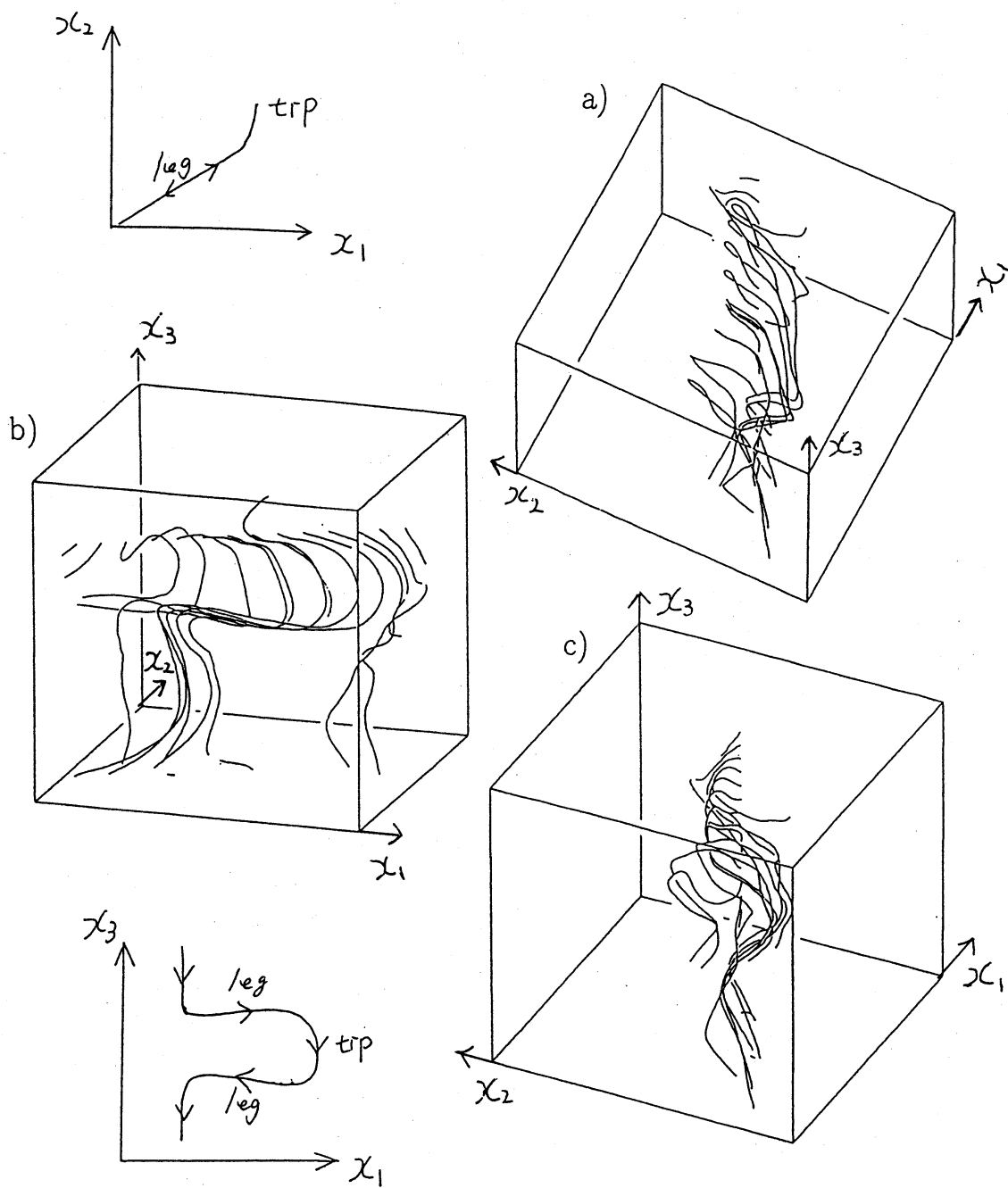


Fig.8 Vortex lines displaying hairpin-like structures.