数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 40-51

Simplicial Semigroup Ring の Buchsbaum 性とその Defining Ideal について

鴨井 祐二
東海大・理

1 Introduction

H を $\mathbf{N}^r (r>0)$ の affine semigroup とし、$h_1,\ldots,h_{r+n}\in H$ を H の生成元とし次を満たすとする.

(H-1) $h_1,\ldots,h_r$ は、$\mathbf{Q}$-linearly independent
(H-2) $\exists d>0$ such that $dH\subset\sum_{i=1}^r \mathbf{N}h_i$

このとき、H を simplicial semigroup と言う.

ここで、*field* k 上の多項式環の間の写像を与える.

$$\begin{array}{rcccll} \varphi : & S=k[X_1,\ldots,X_r,Y_1,\ldots,Y_n] & \longrightarrow & k[t_1,\ldots,t_r] & \\ & X_i & \longmapsto & t^{h_i} & (1\le i\le r) \\ & Y_j & \longmapsto & t^{h_{r+j}} & (1\le j\le n) \end{array}$$

(ここで、$h=(a_1,\ldots,a_r)\in H$ について $t^h:=t_1^{a_1}\cdots t_r^{a_r}$ で monomial を表わす.)

このとき、$\mathrm{Im}(\varphi)$ を $k[H]$ で表わし (k 上 H の) semigroup ring と言う. 又、$\ker(\varphi)$ を I_H で表わし semigroup ring $k[H]$ の defining ideal と言う. ここで、$r=\dim k[H]$ かつ $n=\mathrm{ht}\ I_H$ となっている.

便宜的に、$x_i:=t^{h_i}$ $(1\le i\le r)$, $y_j:=t^{h_{r+j}}$ $(1\le j\le n)$ とし、$k[H]$ の graded maximal ideal を $\mathbf{m}=(x_1,\ldots,y_n)$ とおく.

本稿では、$k[H]$ の Buchsbaum 性を I_H の Gröbner basis の言葉で述べ、さらに $n=2$ の場合について $k[H]$ が Buchsbaum となるときの I_H の minimal basis をきめる.

2 準備

Definition 1. $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^m$ について、

1) $\alpha_{(i)} = \alpha$ の i 番目の成分

2) $\alpha \leq \beta \iff \alpha_{(i)} \leq \beta_{(i)}$ for $1 \leq i \leq n$

3) $\alpha < \beta \iff \alpha \leq \beta$ and $\alpha \neq \beta$

とし、$\alpha + \beta, \alpha - \beta$ は普通の意味に用いる.

S の monomial を $X^\alpha Y^\beta = X_1^{\alpha(1)} \cdots X_r^{\alpha(r)} Y_1^{\beta(1)} \cdots Y_n^{\beta(n)}$ for $\alpha \in \mathbf{N}^r, \beta \in \mathbf{N}^n$ で表わし、S の monomial の全体を M_H で表わすことにする.

Definition 2. S の monomial ordering を以下の様に定める.

$$X^\alpha Y^\beta <_S X^\gamma Y^\delta \iff \begin{array}{l} wd(X^\alpha Y^\beta) < wd(X^\gamma Y^\delta) \\ wd(X^\alpha Y^\beta) = wd(X^\gamma Y^\delta) \text{ and } X^\alpha Y^\beta > X^\gamma Y^\delta \text{ w.r.t. lexicographic} \end{array}$$

ここで、$wd(X^\alpha Y^\beta) =$ total degree of $\varphi(X^\alpha Y^\beta)$.

このとき、$0 \neq f \in S$ について $<_S$ に関する最大の項を f の initial term と呼び $in(f)$ で表わすことにする. 又、S の subset F について、F の initial term を

$$in(F) = \{in(f) \mid 0 \neq f \in F\}$$

とする.

Definition 3. S の ideal I と I の finite subset F について、

$$(in(I)) = (in(F))$$

を満たすとき F を I の Gröbner basis という. 特にこのとき F は I を生成する.

次に幾つか記号を定める.

Notation 4.

1) $k[H]$ の subset J について

$$M(J) = \{X^\alpha Y^\beta \in M_H \mid \varphi(X^\alpha Y^\beta) \in J\}$$

とおく. 特に、$J = \{t^u\}$ のとき $M_u := M(J)$ と書くことにする.

2) $X^\alpha Y^\beta \in M_u$ $(u \in H)$ について

$$\Sigma(X^\alpha Y^\beta) = \{X^\gamma Y^\delta \in M_u \mid X^\alpha Y^\beta >_S X^\gamma Y^\delta\}$$

とおく.

Remark 5. 定義より次が成り立つ.

1) $X^\alpha Y^\beta$, $X^\gamma Y^\delta \in M_H$ について、

$$X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in I_H \iff X^\alpha Y^\beta \in \Sigma(X^\gamma Y^\delta) \text{ or } X^\gamma Y^\delta \in \Sigma(X^\alpha Y^\beta)$$

2) $X^\alpha Y^\beta \in M_H$ について、

$$\Sigma(X^\alpha Y^\beta) \neq \phi \iff X^\alpha Y^\beta \in (in(I_H))$$

3) $X^\alpha Y^\beta$ が $\Sigma(X^\gamma Y^\delta)$ の minimal element ならば $\Sigma(X^\alpha Y^\beta) = \phi$.

4) $(\alpha, \beta) \leq (\gamma, \delta)$ in $\mathbf{N}^{r+n}$ について、

$$\Sigma(X^\alpha Y^\beta) \neq \phi \implies \Sigma(X^\gamma Y^\delta) \neq \phi$$

5) $X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in I_H$, $J \subset k[H]$ について、

$$X^\alpha Y^\beta \in M(J) \iff X^\gamma Y^\delta \in M(J)$$

6) $1 \leq i \leq r$ について、

$$X^\alpha Y^\beta \in M((x_i)) \iff {}^\exists X^\alpha Y^\beta - X_i X^\gamma Y^\delta \in I_H$$

7) $1 \leq i \leq r$ について、

$$Y^\beta \in M(x_i) \implies \Sigma(Y^\beta) \neq \phi$$

更に次の集合を定義する.

$$\mathcal{R} = \{X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in S \mid X^\gamma Y^\delta \in M(X^\alpha Y^\beta) \text{ and } Gcd(X^\alpha Y^\beta, X^\gamma Y^\delta) = 1\}$$

このとき、Remark 5. より $\mathcal{R} \subset I_H$ となるが更に次がわかる.

Proposition 6. $I_H = (\mathcal{R})$ かつ、$(in(I_H)) = (in(\mathcal{R}))$.
従って、I_H の Gröbner basis は $\mathcal{R}$ の中から選べる.

3 Buchsbaum 性について

$\mathcal{R}$ の subset $\mathcal{R}_H$, $\mathcal{F}_H$ を

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_H &= \{X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in \mathcal{R} \mid \Sigma(Y^\delta) = \phi\} \\
\mathcal{F}_H &= \{f \in \mathcal{R}_H \mid in(f) = Y^\beta,\ \beta \in \mathbf{N}^n\} \\
\mathcal{F}' &= \{f \in \mathcal{R}_H \mid in(f) \in (in(\mathcal{F}_H))\}
\end{aligned}$$

とおくとすぐに $(in(I_H)) = (in(\mathcal{R}_H))$ がわかる. このとき更につぎがわかっている.

Remark 7. 次は同値.

1) $k[H]$ は Cohen-Macaulay .

2) $(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H))$.

Definition 8. $(Y^{\beta_1}, \ldots, Y^{\beta_r})$ が次を満たすとき condition (B) を満たすと言う.

B-1) $1 \leq i \leq r$ について、$\Sigma(Y^{\beta_i}) = \phi$.

B-2) $1 \leq i \leq n$ について、$Y^{\beta_i} \in M([(x_i) : \mathbf{m}])$.

B-3) $1 \leq i \neq j \leq n$ について、$Y^{\beta_i} \notin M([(x_j) : \mathbf{m}])$.

B-4) $1 \leq i \neq j \leq r$ について、$Gcd(Y^{\beta_i}, Y^{\beta_j}) = 1$.

B-5) $1 \leq i < j \leq r$ について、$^{\exists}X_j Y^{\beta_i} - X_i Y^{\beta_j} \in I_H$.

(B) を満たす monomial の sequence の全体を Δ_H で表わし、

$$\mathcal{G}_H = \{X_j Y^{\beta_i} - X_i Y^{\beta_j} \mid (Y^{\beta_1}, \ldots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H, \ \ 1 \leq i < j \leq r\}$$

とおく.

このとき、$k[H]$ の Buchsbaum 性について次の特徴付けが得られる.

Theorem 9. The following conditions are equivalent.

1) $k[H]$ is Buchsbaum.

2) We can choose a Gröbner basis of I_H from $\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H$
(or equivalently, $(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H))$).

Theorem 9. の証明のために幾つか準備をする. 定義に従えば直ちにつぎがわかる.

Lemma 10. $k[H]$ が Buchsbaum とする.

1) $X^\alpha Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$ and $\alpha_{(i)} = 0$ とすると、$Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$.

2) $Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$ and $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ とすると、$^{\exists}(Y^{\beta_1}, \ldots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H$ s.t. $\beta = \beta_i$.

Lemma 11. $(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H))$ とする.

1) $X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in I_H$ with $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ and $X^\alpha Y^\beta >_S X^\gamma Y^\delta$ について、$^{\exists}(Y^{\beta_1}, \ldots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H$ s.t. $\beta = \beta_i$ for some $1 \leq i \leq r$.

2) $\mathcal{R}_H = \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}_H$.

更に、後藤 [2] による $k[H]$ の Buchsbaum 性の特徴付けを挙げておく.

Theorem. (Goto) 次は同値.

1) $k[H]$ is Buchsbaum.

2) $k[H]$ is quasi-Buchsbaum. (or equivalently, $x_1^2, \dots, x_r^2$ are weak sequence (w.r.t. $\mathbf{m}$)).

Lemma 12. $t^v, t^{u_1}, \dots, t^{u_p} \in k[H]$ について

$$[(t^{u_1}, \dots, t^{u_p}) : t^v] = \sum_{i=1}^{p} [(t^{u_i}) : t^v]$$

Proof. $[(t^{u_1}, \dots, t^{u_p}) : t^v] \supset \sum_{i=1}^{p} [(t^{u_i}) : t^v]$ は明らかだから逆向きの包含を示す.
$^\forall f \in [(t^{u_1}, \dots, t^{u_p}) : t^v]$ について、$f = \sum_{i=1}^{m} c_i t^{w_i}$, $c_i \neq 0$ and $w_i \in H$ $(1 \leq i \leq m)$ と書けば

$$t^v f = \sum_{i=1}^{m} c_i t^{v+w_i} \in (t^{u_1}, \dots, t^{u_p})$$

である. $(t^{u_1}, \dots, t^{u_p})$ は、graded ideal だから $1 \leq^\forall j \leq m$ について

$$t^{v+w_j} \in (t^{u_1}, \dots, t^{u_p})$$

となり、$1 \leq^\exists i \leq m$, $^\exists h \in H$ があって

$$t^{v+w_j} = t^{h+u_i}$$

と書ける. (i.e. $t^{v+w_j} \in (t^{u_i})$)
だから、$t^{w_j} \in [(t^{u_i}) : t^v]$ となり

$$f \in \sum_{i=1}^{p} [(t^{u_i}) : t^v]$$

が示せた. □

Proof of Theorem 9. 1) $\Longrightarrow$ 2) $f = X^\alpha Y^\beta - X^\gamma Y^\delta \in \mathcal{R}_H$ について、$in(f) \notin (in(\mathcal{F}_H))$ とする. このとき、$>_S$ の定義よりある $1 \leq i < j \leq r$ があって

$$f = X_j X^{\alpha'} Y^\beta - X_i X^{\gamma'} Y^\delta$$

と書ける. このとき、Remark 5, 5) より $X^{\alpha'} Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$. 更に $Gcd(X^\alpha, X^\gamma) = 1$ だから、Lemma 10, 1) より

$$Y^\beta \in M([(x_i) : x_j])$$

となり　仮定より $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ だから Lemma 10, 2) より

$$^\exists(Y^{\beta_1}, \ldots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H \text{ s.t. } \beta = \beta_i$$

となる．従って

$$^\exists X_j Y^\beta - X_i Y^{\beta_j} \in \mathcal{G}_H \text{ and } in(f) = X^\alpha Y^\beta \in (in(\mathcal{G}_H))$$

となり

$$(in(I_H)) = (in(\mathcal{F}_H \cup \mathcal{G}_H))$$

が示せた．

2) $\Longrightarrow$ 1) Lemma 11, 2) と後藤の定理より

$$\mathcal{R}_H = \mathcal{F}' \cup \mathcal{G}_H \quad \Longrightarrow \quad x_1^2, \ldots, x_r^2 \text{ are weak-sequence (w.r.t. } \mathbf{m}).$$

が言えれば良いが Lemma 12 より $1 \leq i < j \leq r$ について

$$[(x_i^2) : x_j^2] = [(x_i^2) : \mathbf{m}]$$

を確かめれば良い．そこで　$[(x_i^2) : x_j^2] \neq [(x_i^2) : \mathbf{m}]$ として矛盾を導く．

$X^\alpha Y^\beta$ を $M([(x_i^2) : x_j^2] \setminus [(x_i^2) : \mathbf{m}])$ の最小元とする．仮定より、$\alpha_{(i)} \leq 1$ で $\Sigma(Y^\beta) = \phi$ である．このとき Remark 5, 6) より、

$$^\exists X_j^2 X^\alpha Y^\beta - X_i^2 X^\gamma Y^\delta \in I_H$$

もし、$\Sigma(X^\gamma Y^\delta) \neq \phi$ ならば $X^\gamma Y^\delta$ を$\Sigma(X^\gamma Y^\delta)$ の最小元で置き換えることにより

$$\Sigma(X^\gamma Y^\delta) = \phi$$

としてよい．今、$X^\alpha Y^\beta \notin M((x_i^2))$ だから$\gamma_{(j)} \leq 1$ である．

ここで、$Gcd(X_j^2 X^\alpha Y^\beta, X_i^2 X^\gamma Y^\delta) = X^\mu Y^\nu$ とし

$$X_j^2 X^\alpha Y^\beta = X^\mu Y^\nu X^{\mu_1} Y^{\nu_1} \text{ and } X_i^2 X^\gamma Y^\delta = X^\mu Y^\nu X^{\mu_2} Y^{\nu_2}$$

とおく．このとき、$g := X^{\mu_1} Y^{\nu_1} - X^{\mu_2} Y^{\nu_2} \in \mathcal{R}_H \setminus \mathcal{F}_H$ だから $g \in \mathcal{G}_H$ となる．一方で $\mu_{1(j)} > 0$ and $\mu_{2(i)} > 0$ だから

$$X^{\mu_1} = X_j \text{ and } \alpha_{(i)} = 1$$

となる．従って

$$X^\alpha Y^\beta \in M(x_i[(x_i) : \mathbf{m}]) \subset M([(x_i^2) : \mathbf{m}])$$

となり矛盾． □

Corollary 13. $k[H]$ が Cohen-Macaulay でない Buchsbaum ring のとき

$$\dim(k[H]) \leq \mathrm{ht}_S(I_H) \quad (i.e.\ \ r \leq n)$$

Proof. $k[H]$ は non Cohen-Macaulay だから Remark 7. より

$$\mathcal{G}_H \neq \phi$$

従って、$^{\exists}(Y^{\beta_1}, \ldots, Y^{\beta_r}) \in \Delta_H$. ここで

$$n_i = \#\{k \in \{1, \ldots, r\} \mid \beta_{i(k)} > 0\}$$

とすれば、Definition 8. の条件 B-2) より $\beta_i \neq 0$ だから $n_i > 0$. 従って、

$$r \leq \sum_{i=1}^{r} n_i$$

と成る. 一方で (B-4) $Gcd(Y^{\beta_k}, Y^{\beta_l}) = 1$, $(k \neq l)$ であったから

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \leq n$$

よって

$$r \leq n$$

□

4 codimension 2 の Case について

ここでは、$n = 2$ の Case について $k[H]$ が Buchsbaum となる I_H の minimal basis をきめる.

[3] により Cohen-Macaulay となるものは判っているから non Cohen-Macaulay, Buchsbaum について決めれば良い. そこで次を示す.

Theorem 14. $n = 2$ のとき次は同値.

1) $k[H]$ は Cohen-Macaulay でない Buchsbaum ring .

2) $\dim(k[H]) = 2$ で I_H は次の minimal basis を持つ.

$$Y_1^{b+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}-1} X_{i_2}^{a_{i_2}+1} Y_2^{c-1},\ Y_2^{c+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}-1} Y_1^{b-1},\ Y_1 Y_2 - X_1^{a_1} X_2^{a_2},\ X_{i_1} Y_1^b - X_{i_2} Y_2^c$$

ここで、$a_1,\ a_2,\ b,\ c \in \mathbf{N}_+$, $\{i_1,\ i_2\} = \{1,\ 2\}$.

このとき、$H \cong < (b+c,\ 0),\ (0,\ b+c),\ (a_1c-1,\ a_2c+1),\ (a_1b+1,\ a_2b-1) >$ as semigroup .

以下、(ht $I_H =$) $n=2$ とし、定理の証明のため幾つか準備をする．ここで $\mathcal{F}_H$ を次の subset に分割する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid in(f) = Y_1^b,\ b \in \mathbf{N}_+\}\\ \mathcal{F}_2 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid in(f) = Y_2^c,\ c \in \mathbf{N}_+\}\\ \mathcal{F}_3 &= \{f \in \mathcal{F}_H \mid in(f) = Y_1^bY_2^c,\ b,c \in \mathbf{N}_+\}\end{aligned}$$

このとき、$\mathcal{F}_i \neq \phi$ だから $in(\mathcal{F}_i)$ の minimal element が存在する．そこで、$in(\mathcal{F}_1)$ (resp. $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$) の minimal element を $Y_1^{b_1}$ (resp. $Y_2^{c_2}$, $Y_1^{b_3}Y_2^{c_3}$) とおく．更に、$f \in \mathcal{F}_1$ (resp.$\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$) について、$in(f) = Y_1^{b_1}$ (resp. $Y_2^{c_2}$, $Y_1^{b_3}Y_2^{c_3}$) のときに f を $\mathcal{F}_1$ (resp.$\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$) の minimal element と呼ぶ．

Lemma 15. $k[H]$ が Buchsbaum のとき

$$(in(\mathcal{F}_H)) = (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3}Y_2^{c_3})$$

Proof. $(in(\mathcal{F}_1),\ in(\mathcal{F}_2)) = (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2})$ だから、$in(\mathcal{F}_3) \subset (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3}Y_2^{c_3})$ がいえればよい．

そこで、$^\exists f = Y_1^bY_2^c - X^\alpha \in \mathcal{F}_3$ such that $Y_1^bY_2^c \notin (Y_1^{b_1}, Y_2^{c_2}, Y_1^{b_3}Y_2^{c_3})$ として矛盾を導く．(このとき、$b < b_1$, $c < c_2$ である．)

$\mathcal{F}_3$ の minimal element を

$$f_3 = Y_1^{b_3}Y_2^{c_3} - X^{\alpha_3} \in \mathcal{F}_3$$

とする．このとき、仮定から $b_3 > b$ and $c_3 < c$ であるか $b_3 < b$ and $c_3 > c$ でなければならない．

$b_3 > b$ and $c_3 < c$ とすると

$$g := Y_1^{b_3-b}f - Y_2^{c-c_3}f_3 = X^{\alpha_3}Y_2^{c-c_3} - X^\alpha Y_1^{b_3-b} \in I_H$$

$Y_1^{b_3-b}$, $Y_2^{c-c_3} \notin (in(\mathcal{F}_H))$ だから Theorem 9. より

$$in(g) \in (in(\mathcal{G}_H))$$

そこで、$in(g) = X^{\alpha_3}Y_2^{c-c_3}$ とすると $^\exists X_iY_2^d - X_jY_1^e \in \mathcal{G}_H$ があって $X_iY_2^d$ は、$X^{\alpha_3}Y_2^{c-c_3}$ を割る．

ところが $Y_2^d \in M([(x_j) : y_2])$ だから $Y_2^{d+1} \in (in(\mathcal{F}_2))$．従って、

$$Y_2^{c-c_3+1} \in (in(\mathcal{F}_2)) \text{ and } c - c_3 + 1 \geq c_2$$

しかし、$c_3 > 0$ だから $c - c_3 + 1 \leq c < c_2$ でなければならない．よって矛盾．

$in(g) = X^{\alpha}Y_1^{b_3-b}$ としても同様に矛盾する.
$b_3 < b$ and $c_3 > c$ としても同じだから Lemma 15. が示せた. □

$\Sigma(Y^{b_1})$ (resp. $Y_2^{c_2}$, $Y_1^{b_3}Y_2^{c_3}$) の minimal element を $X^{\alpha_1}Y_2^{c_1}$ (resp. $X^{\alpha_2}Y_1^{b_2}$, X^{α_3}) とし、

$$\begin{aligned} f_1 &= Y_1^{b_1} - X^{\alpha_1}Y_2^{c_1} && \in \mathcal{F}_1 \\ f_2 &= Y_2^{c_2} - X^{\alpha_2}Y_1^{b_2} && \in \mathcal{F}_2 \\ f_3 &= Y_1^{b_3}Y_2^{c_3} - X^{\alpha_3} && \in \mathcal{F}_3 \end{aligned}$$

とおく.

Remark 16. $\Sigma(X^{\alpha_1}Y_2^{c_1}) = \phi$ (resp. $X^{\alpha_2}Y_1^{b_2}$) だから $c_1 < c_2$ (resp. $b_2 < b_1$)

Lemma 17. $k[H]$ が Cohen-Macaulay でない Buchsbaum ring のとき、$\dim(k[H]) = 2$ で

$$\mathcal{G}_H = \{X_{i_1}Y_1^{b_1-1} - X_{i_2}Y_2^{c_2-1}\} \text{ where } \{i_1,\ i_2\} = \{1,\ 2\}$$

Proof. Corollary 13. より $\dim(k[H]) = 2$ は言えている. さらに、Theorem 9. より

$$^{\exists}X_{i_1}Y_1^{b} - X_{i_2}Y_2^{c} \in \mathcal{G}_H \quad \text{with} \quad b < b_1,\ c < c_2$$

がある. このとき、

$$Y_1^b \in M([(x_{i_2}) : \mathbf{m}]) \subset M([(x_{i_2}) : y_1])$$

であるから、Remark 5, 2) and 7) より

$$Y_1^{b+1} \in (in(\mathcal{F}_H))$$

となる. 従って、

$$b + 1 \geq b_1$$

即ち、

$$b + 1 = b_1$$

となる. 同様にして、$c + 1 = c_2$ も言える.
ところが Definition 8. の B-1), B-2) により

$$(Y_1^{b_1-1}, Y_2^{c_2-1}) \in \Delta_H \implies (Y_2^{b_2-1}, Y_1^{c_1-1}) \notin \Delta_H$$

だから

$$\mathcal{G}_H = \{X_{i_1}Y_1^{b_1-1} - X_{i_2}Y_2^{c_2-1}\} \quad \text{where} \quad \{i_1,\ i_2\} = \{1,\ 2\}$$

となる. □

Proof of Theorem 14. 1) $\Longrightarrow$ 2) Lemma 17. より $\dim(k[H]) = 2$ で $\mathcal{G}_H = \{X_{i_1}Y_1^{b_1-1} - X_{i_2}Y_2^{c_2-1}\}$ where $\{i_1,\ i_2\} = \{1,\ 2\}$ である．ここで、$b = b_1 - 1,\ c = c_2 - 1$ と置けば Theorem 9, Lemma 15. より

$$\begin{array}{rll} f_1 = & Y_1^{b+1} - X_1^{a_{11}}X_2^{a_{12}}Y_2^{c_1} & \in \mathcal{F}_1 \\ f_2 = & Y_2^{c+1} - X_1^{a_{21}}X_2^{a_{22}}Y_1^{b_2} & \in \mathcal{F}_2 \\ f_3 = & Y_1^{b_3}Y_2^{c_3} - X_1^{a_1}X_2^{a_2} & \in \mathcal{F}_3 \\ g = & X_{i_1}Y_1^b - X_{i_2}Y_2^c & \in \mathcal{G}_H \end{array}$$

が I_H の Gröber basis である．ここで、

$$Y_1^b \in M([(x_{i_2}) : \mathbf{m}]) \subset M([(x_{i_2}) : y_2])$$

だから $Y_1^bY_2 \in (in(\mathcal{F}_H))$．即ち、$Y_1^{b_3}Y_2^{c_3}$ は $Y_1^bY_2$ を割らなければならない．従って、

$$c_3 = 1$$

同様にして $b_3 = 1$．即ち、

$$f_3 = Y_1Y_2 - X_1^{a_{i_1}}X_2^{a_{i_2}}$$

そこで次の relation を見る．

$$X_{i_1}f_1 - Y_1g = X_{i_2}Y_1Y_2^c - X_{i_1}^{a_{1i_1}+1}X_{i_2}^{a_{1i_2}}Y_2^{c_1} \in I_H$$

ここで、$c_1 < c + 1$ であったから

$$X_{i_2}Y_1Y_2^{c-c_1} - X_{i_1}^{a_{1i_1}+1}X_{i_2}^{a_{1i_2}} \in I_H$$

を得る．$a_{1i_2} = 0$ なら、(H-1),(H-2) に反する．従って、

$$g' = Y_1Y_2^{c-c_1} - X_{i_1}^{a_{1i_1}+1}X_{i_2}^{a_{1i_2}-1} \in I_H$$

$b > 0$ より $Y_1 \notin (in(f_1)) = (Y_1^b + 1)$ であるから

$$c - c_1 > 0$$

したがって次の relation を得る．

$$g' - Y_2^{c-c_1-1}f_3 = X_{i_1}^{a_{i_1}}X_{i_2}^{a_{i_2}}Y_2^{c-c_1-1} - X_{i_1}^{a_{1i_1}+1}X_{i_2}^{a_{1i_2}-1} \in I_H$$

ここで、$\Sigma(Y_2^{c-c_1-1}) = \phi$ であるから再び (H-1),(H-2) より、

$$a_{i_1} = a_{1i_1} + 1,\ a_{i_2} = a_{1i_2} - 1,\ c - c_1 - 1 = 0$$

となる．即ち、

$$f_1 = Y_1^{b+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}-1}X_{i_2}^{a_{i_2}+1}Y_2^{c-1}$$

となる．同様にして、

$$f_2 = Y_2^{c+1} - X_{i_1}^{a_{i_1}+1} X_{i_2}^{a_{i_2}-1} Y_1^{b-1}$$

を得る．今、f_1, f_2, f_3, g は I_H の minimal Gröbner basis であるから$\mu(I_H) \leq 4$．一方で $\mu(I_H) \leq 3$ なら $k[H]$ は Cohen-Macaulay となってしまう．従って、

$$\mu(I_H) = 4$$

よって、f_1, f_2, f_3, g が求める minimal basis .

2) $\Longrightarrow$ 1) $\dim(k[H]) = 2$ で I_H は次の minimal basis を持つとする．

$$\begin{array}{rll} f_1 = & Y_1^{b+1} - X_1^{a_1+1} X_2^{a_2-1} Y_2^{c_1} & \in \mathcal{F}_1 \\ f_2 = & Y_2^{c+1} - X_1^{a_1-1} X_2^{a_2+1} Y_1^{b_2} & \in \mathcal{F}_2 \\ f_3 = & Y_1 Y_2 - X_1^{a_1} X_2^{a_2} & \in \mathcal{F}_3 \\ g = & X_2 Y_2^c - X_1 Y_1^b & \in \mathcal{G}_H \end{array}$$

このとき、Buchberger's algorithm [1] により f_1, f_2 f_3, g は I_H の minimal Gröbner basis になる．

ここで Theorem 9. の条件 2) により $(Y_1^b, Y_2^c) \in \Delta_H$ を確かめればよい．

ところが I_H の Gröbner basis は判っているから (B-1),(B-2),(B-4),(B-5) は明か．よって、(B-3) を確かめれば良い．

$Y_1^b \in M([(x_1) : \mathrm{m}])$ とすると

$$^\exists X_2 Y_1^b - X_1^{d_1} X_2^{d_2} Y_1^{e_1} Y_2^{e_2} \in I_H \text{ with } \Sigma(Y_1^{e_1} Y_2^{e_2}) = \phi,\ d_1 > 0$$

ところが、$\Sigma(Y_1^b) = \phi$ だから $d_2 = 0$ となり monomial ordering の定義から

$$X_2 Y_1^b \in (in(I_H)) = (Y_1^{b+1}, Y_2^{c+1}, Y_1 Y_2, X_2 Y_2^c)$$

となり矛盾．

$Y_2^c \in M([(x_2) : \mathrm{m}])$ としても同様にして矛盾するから

$$(Y_1^b, Y_2^c) \in \Delta_H$$

以上から Theorem 17. の同値性が言えた．

つぎに H の生成元を決める．$H = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N} h_i$ について

$$h_1 = (d_1,\ 0),\ h_2 = (0,\ d_2),\ h_3 = (d_{31},\ d_{32}),\ h_4 = (d_{41},\ d_{42})$$

とおくと、relation $f_3 \in I_H$ から

$$h_3 + h_4 = a_1 h_1 + a_2 h_2$$

従って、

$$d_{4i} = a_i d_i - d_{3i} \quad \text{for} \quad i = 1, 2$$

とかける．次に relation $g \in I_H$ より、

$$h_2 + ch_4 = h_1 + bh_3$$

だから、

$$\begin{aligned} bd_{31} &= cd_{41} - d_1 \\ bd_{32} &= cd_{42} + d_2 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} bd_{31} &= c(a_1 d_1 - d_{31}) - d_1 \\ bd_{32} &= c(a_2 d_2 - d_{32}) + d_2 \end{aligned}$$

となり、これをまとめると

$$\begin{aligned} d_{31} &= \tfrac{d_1}{b+c}(a_1 c - 1) \\ d_{32} &= \tfrac{d_2}{b+c}(a_2 c + 1) \end{aligned}$$

を得る．更にこれを最初の relation に代入すれば

$$\begin{aligned} d_{41} &= \tfrac{d_1}{b+c}(a_1 b + 1) \\ d_{42} &= \tfrac{d_2}{b+c}(a_2 b - 1) \end{aligned}$$

となる．そこで、

$$\begin{array}{rccccl} T: & \mathbf{Q}^2 & \longrightarrow & \mathbf{Q}^2 & & \mathbf{Q}\text{-isomorphism} \\ & (p, q) & \longmapsto & (b+c)(p/d_1, q/d_2) & & \end{array}$$

とすれば次の semigroup の同型が得られる．

$$H \cong T(H) = < (b+c,\ 0),\ (0,\ b+c),\ (a_1 c - 1,\ a_2 c + 1),\ (a_1 b + 1,\ a_2 b - 1) >$$

□

参考文献

[1] B.Buchberger, *Gröbner bases : An algorithmic method in polynomial ideal theory*, In "Multidimensional system theory,(N.K.Bose), 184-232, Reidel Publ. Comp., 1985.

[2] S.Goto, *Cohen-Macaulayfication of certain Buchsbaum ring*, Nagoya Math. J. **80** (1980), 107-116.

[3] Y.Kamoi, *Defining ideals of Cohen-Macualay semigroup rings*, to appear.