数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 64-73

Extremal Ray と Canonical Ring

京都大学理学部数学教室
森脇 淳

1 準備

この方面の勉強をする時の一つの障害は、たくさんのこの分野特有の方言が存在することだと思います。まあ少し我慢して読んで下さい。以後、代数閉体 k を固定し、すべての scheme は k 上で定義されているとします。X を正規代数多様体とします。X 上の層 F が reflexive であるとは F の double dual F^{**} が F と同型になる時に言います。$\mathrm{Ref}^1(X)$ で X 上の階数 1 の reflexive sheaves の同型類を表すとき $\mathrm{Ref}^1(X)$ には、テンソルの double dual により自然なアーベル群の構造が入ります。さて一方、

$$Z^1(X) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbf{Z}\,\Gamma, \quad Z_1(X) = \bigoplus_{C} \mathbf{Z}\,C$$

と置きます。ここで Γ は素因子全体を、C は既約で披約な曲線全体を動きます。$Z^1(X)$ の元を Weil 因子と言います。$\mathrm{Rat}(X)$ で X 上の有理関数全体を表すとき、Weil 因子 D に対して、層 $\mathcal{O}_X(D)$ をつぎのように定義すると階数 1 の reflexive sheaf になります。

$$\mathcal{O}_X(D)_x = \{\phi \in \mathrm{Rat}(X) \mid \mathrm{div}(\phi)_x + D_x \geq 0\}.$$

これにより全射の準同型

$$\mathcal{O}_X(-) : Z^1(X) \longrightarrow \mathrm{Ref}^1(X)$$

が得られます。$\mathcal{O}_X(D)$ が locally free となる時、D を Cartier 因子と言います。Cartier 因子全体を $\mathrm{Div}(X)$ と表すことにします。さらに、ある正数 $n > 0$ が存在して、$\mathcal{O}_X(nD)$ が locally free となる時、D を $\mathbf{Q}$-Cartier 因子と言います。すべての Weil 因子が $\mathbf{Q}$-Cartier 因子になるとき、X は $\mathbf{Q}$-factorial

と言います。X^0 を X の非特異部分とし、$i : X^0 \longrightarrow X$ を包含写像とします。ω_{X^0} を X^0 上の $(\dim X)$-form のなす層とします。$i_*\omega_{X^0}$ は、階数 1 の reflexive sheaf であるので $i_*\omega_{X^0} \simeq \mathcal{O}_X(K_X)$ となる Weil 因子 K_X が存在します。この K_X を 標準因子 (canonical divisor) と言います。K_X が $\mathbf{Q}$-Cartier となる時、X は quasi-$\mathbf{Q}$-Gorenstein といいます。

以後、X は complete とします。X 上の Cartier 因子 D_1, D_2 について、$D_1 \equiv D_2$ を、任意の $z \in Z_1(X)$ について $(D_1 \cdot z) = (D_2 \cdot z)$ が成立するときとします。さらに X 上の 1-cycles z_1, z_2 について、$z_1 \equiv z_2$ を、任意の Cartier 因子 D について $(D \cdot z_1) = (D \cdot z_2)$ が成立するときとします。そこで

$$N^1(X) = (\mathrm{Div}(X)/\equiv) \otimes \mathbf{R}, \qquad N_1(X) = (Z_1(X)/\equiv) \otimes \mathbf{R}$$

と置きます。このとき、$N^1(X)$ と $N_1(X)$ は、有限次元で同一次元となり、pairing

$$\mathrm{Div}(X) \times Z_1(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

は、非退化な pairing

$$N^1(X) \times N_1(X) \longrightarrow \mathbf{R}$$

を導きます。$N^1(X)$ の次元を $\rho(X)$ と書き、X のピカール数と言います。$\mathrm{Amp}(X)$ で ample な Cartier 因子から生成される錐を表し、$\mathrm{NE}(X)$ で effective 1-cycles で生成される錐を表わすことします。さらに $\overline{\mathrm{Amp}}(X), \overline{\mathrm{NE}}(X)$ で $\mathrm{Amp}(X), \mathrm{NE}(X)$ の $N^1(X), N_1(X)$ での閉包を表すことにします。$\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ の内点全体が $\mathrm{Amp}(X)$ であることはよく知られています。Cartier 因子 D が nef であるとは、任意の effective 1-cycle z に対して $(D \cdot z) \geq 0$ が成立するときに言います。Cartier 因子 D が nef であるための必要十分条件は、$[D] \in \overline{\mathrm{Amp}}(X)$ であることがよく知られています。

L を X 上の直線束とします。今、$H^0(L) \neq 0$ とします。$\phi_0, \ldots, \phi_n$ を $H^0(L)$ の底とします。$B = \{x \in X \mid \phi_0(x) = \cdots = \phi_n(x) = 0\}$ と置き、写像

$$\Phi_L : X \setminus B \longrightarrow \mathbf{P}^n$$

を $\Phi_L(x) = (\phi_0(x) : \cdots : \phi_n(x))$ で定めます。$B \neq X$ であるので、Φ_L によって有理写像が定まります。$B = \emptyset$ のとき、L は base point free と呼びます。さらに、ある正数 $n > 0$ が存在して、$L^{\otimes n}$ が base point free となる時、L を semi-ample と言います。ここで大事なことは、L が semi-ample な時、環

$$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(L^{\otimes n})$$

が有限生成となることです。

最後に、

$$\text{ample} \Longrightarrow \text{semi-ample} \Longrightarrow \text{nef}$$

であることを注意しておきます。さらにそれぞれ逆は、必ずしも成立しません。

2 Cone Theorem (特異点を持たない場合)

この章では、特異点を持たない場合の Cone Theorem について解説することにします。

X を 非特異射影多様体とします。$\overline{\mathrm{NE}}(X)$ の半直線 R が、extremal ray であるとは、つぎを満たすときに言います。

(1) $R \setminus \{0\}$ の元 z について、$(K_X \cdot z) < 0$.

(2) $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ の元 z_1, z_2 について、もし $z_1 + z_2 \in R$ ならば、$z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$.

X 上の曲線 l が extremal curve とは、$\mathbf{R}_+[l]$ が extremal ray となる時にいいます。さて問題の Cone Theorem は、次の通りです。

定理 (2.1) (任意標数 cf. [4]) *X を 非特異射影多様体、H を X 上の豊富な直線束とします。この時、任意の $\epsilon > 0$ に対して、extremal curves $l_1, \ldots, l_k$ が存在して次を満たします。*

(1) $-(K_X \cdot l_i) < \dim X + 1$.

(2) $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathbf{R}_+[l_1] + \cdots + \mathbf{R}_+[l_k] + \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \mid (K_X + \epsilon H \cdot z) \geq 0\}$.

この定理からただちに次の系が得られます。

系 (2.2) *X を 非特異射影多様体とします。もし K_X が nef でないとしたら、X には extremal ray が存在します。*

系そのものの証明のアイデアを示します。まず標数 $p > 0$ の場合に帰着します。K_X は nef でないので K_X との交叉数が負となる曲線が存在します。つまり非特異曲線 C と写像 $f : C \longrightarrow X$ が存在して $\deg(f^* K_X) < 0$ となるものが存在します。ここで F を C のフロベニウス写像とすると、f の代わりに $f \cdot F^n$ を考えて

$$-\deg(f^* K_X) - (\dim X) g(C) > 0$$

と仮定していいです。C の一点を固定する f の変形を考えると変形理論の一般論より

$$-\deg(f^* K_X) - (\dim X) g(C) > 0$$

であるので f の一点 p を固定する自明でない変形が存在します。よって曲線 D と写像

$$F : D \times C \longrightarrow X$$

が存在して $\dim F(D\times C)=2$ で、ある $o\in D$ に対して $F|_{o\times C}=f$ を満たします。ここで D が完備であるとすると $D\times p$ は、F でつぶれるので $D\times p$ の自己交叉数は負となりますが、これは $D\times p$ が直積の一つの軸であることを考えると矛盾しています。よって D は完備でありません。$\bar{D}$ を D の完備化とします。F によって $\bar{D}\times C$ から X への有理写像が定義されていますが適当な blowing up を繰り返して $\mu : Y \longrightarrow \bar{D}\times C$ が存在して $\tilde{F}=F\cdot\mu$ が写像となります。μ によってできた有理曲線は $\tilde{F}$ によってつぶれないので X 上に有理曲線が存在したことになります。 証明終

すこし曲面上で extremal curve の例を見てみましょう。

例 (2.3) 曲面上で extremal curve として次の 3 つの例があります。

(1) 第 1 種例外曲線 ((-1)-curve)。

(2) ruled surface の fiber。

(3) $\mathbf{P}^2$ 上の直線。

(1) の場合について考えて見ましょう。l を曲面 X 上の第 1 種例外曲線とします。l が extremal curve であることを見てみましょう。$f : X \longrightarrow Y$ を l の contraction とします。$\overline{\mathrm{NE}}(X)$ の元 z_1, z_2 について、$z_1+z_2\in\mathbf{R}_+[l]$ とします。このとき、$f_*(z_1), f_*(z_2)\in\overline{\mathrm{NE}}(Y)$ で $f_*(z_1)+f_*(z_2)=0$ であるので、Y の射影性より、$f_*(z_1)=f_*(z_2)=0$ となります。よって、$z_1, z_2\in\mathbf{R}_+[l]$.

他の場合も同様に確かめられます。さらに曲面上の extremal curve は上のいずれかであることも確かめられます。このことを利用すると、Castelnuovo による有理性の判定法が導けます。例えば次のようにします。X を非特異射影曲面で $h^0(2K_X)=q(X)=0$ を満たすものとします。X が有理曲面であること見るために、X に第 1 種例外曲線がないと仮定しても一般性を失いません。$h^0(2K_X)=q(X)=0$ より

$$\chi(-K_X)=h^0(-K_X)-h^1(-K_X)=(K_X^2)+1$$

であることが解ります。ここでもし、K_X が nef であるなら $(K_X^2)\geq 0$ であるので上より $h^0(-K_X)\neq 0$ となり、K_X が nef であることを考えると $K_X\sim 0$ であることが解ります。これは、$h^0(2K_X)=0$ に矛盾します。したがって、K_X は、not nef でなくてはいけません。よって、Cone Theorem より X に extremal curve が存在しますが、これは (2) か (3) のタイプです。(3) のタイプなら OK です。(2) の場合、$q(X)=0$ より X は有理曲線上の ruled surface となり、この場合も有理曲面になります。

最後に、3 次元の場合の extremal ray の分類を述べてこの章を終ります。

定理 (2.4) (標数 0 のみ cf. [4]) X を 3 次元非特異射影多様体とし、R を *extremal ray* とします。この時、正規射影多様体 Y と同型ではない射 f_R : $X \longrightarrow Y$ が存在して次を満たします。$f_{R*}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ で、X 上の曲線 C に対して $[C] \in R$ であることと C が f_R でつぶれることは同値となります。さらに $\dim Y$ によって次のように分類できます。

(1) $\dim Y = 0$ の時、X は、$\rho(X) = 1$ の *Fano* 多様体です。

(2) $\dim Y = 1$ の時、$f_R : X \longrightarrow Y$ は、*Conic bundle* です。

(3) $\dim Y = 2$ の時、Y は非特異で、$f_R : X \longrightarrow Y$ は、*Del Pezzo fibration* です。

(4) $\dim Y = 3$ の時、$f_R : X \longrightarrow Y$ の例外集合 E は既約な因子であり、次のうちのどれかになります。

(4.1) $f_R(E)$ は非特異曲線で、$f_R : X \longrightarrow Y$ は $f_R(E)$ に沿って *blowing-up* したもの。

(4.3) $f_R(E)$ は非特異点で、$f_R : X \longrightarrow Y$ はその点を *blowing-up* してできたもの。

(4.3) $f_R(E)$ は局所的に方程式 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ で定義される点で、$f_R : X \longrightarrow Y$ はその点を *blowing-up* してできたもの。

(4.4) $f_R(E)$ は局所的に方程式 $x^2 + y^2 + z^2 + w^3 = 0$ で定義される点で、$f_R : X \longrightarrow Y$ はその点を *blowing-up* してできたもの。

(4.5) $f_R(E)$ は局所的に作用

$$(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$$

の *quotient* としてできる点で、$f_R : X \longrightarrow Y$ はその点を *blowing-up* してできたもの。

3 Cone Theorem (特異点を持つ場合)

この章では、特異点を持つ代数多様体の場合を考えてみます。どんな特異点でもいいというわけではなく、まずよい特異点を定義することから始めましょう。以後、標数は 0 とします。

X を正規代数多様体で、quasi-Q-Gorenstein であるとします。$f : Y \longrightarrow X$ を X の特異点解消とします。$E = \sum_{i \in I} E_i$ を f の例外集合とします。ここで

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i \in I} a_i E_i$$

と置きます。さて、つぎの 4 つの条件を考えます。

(1) $a_i > 0$ for all $i \in I$.

(2) $a_i \geq 0$ for all $i \in I$.

(3) $a_i > -1$ for all $i \in I$.
(4) $a_i \geq -1$ for all $i \in I$.
(1) が成り立つ時 X は terminal singularity のみを持つといい、(2) が成り立つ時 X は canonical singularity のみを持つといい、(3) が成り立つ時 X は log-terminal singularity のみを持つといい、(4) が成り立つ時 X は log-canonical singularity のみを持つといいます。明らかに

$$\text{terminal} \Longrightarrow \text{canonical} \Longrightarrow \text{log-terminal} \Longrightarrow \text{log-canonical}$$

です。2 次元の時、次が知られています。
(a) terminal $\Longleftrightarrow$ 非特異。
(b) canonical $\Longleftrightarrow$ 通常 2 重点。
(c) log-terminal $\Longleftrightarrow$ 商特異点。
(d) log-canonical $\Longleftrightarrow$ 商特異点か simple elliptic 又は cusp の quotient として得られる特異点。

特異点版の Cone Theorem は、次の通りになります。

定理 (3.1) (cf. [2]) *X を $\mathbf{Q}$-factorial な正規射影多様体とし log-terminal singularity のみを持っているとします。*
(i) *extremal ray $\{R_i\}_{i \in I}$ が存在して*

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \sum_{i \in I} R_i + \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \mid (K_X \cdot z) \geq 0\}$$

となります。
(ii) *任意の extremal ray R に対して、正規射影多様体 Y と同型ではない射 $f_R : X \longrightarrow Y$ が存在して次を満たします。$f_{R*}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ で、X 上の曲線 C に対して $[C] \in R$ であることと C が f_R でつぶれることは同値となります。*

f_R を extremal ray R による contraction といいます。

4 極小モデル問題

さてこの章では前の Cone Theorem を利用して極小モデルの問題を考えてみましょう。X を $\mathbf{Q}$-factorial な正規射影多様体とし terminal singularity のみを持っているとします。R を X の extremal ray とし、$f_R : X \longrightarrow Y$ を contraction とします。R を $\dim Y$ と Y の特異点の悪さによって分類してみましょう。
(1) $\dim X > \dim Y$.
(2) $\dim X = \dim Y$ で、f_R は、codimension 1 の点で同型でない場合。

(3) $\dim X = \dim X$ で、f_R は、codimension 1 で同型である場合。
(1) の時、f_R を森-fibration と呼びます。(2) の時、f_R を good contration と呼び、この時 Y は $\mathbf{Q}$-factorial で terminal singularity のみを持つことがわかっています。したがって (2) の場合 contraction をしても特異点の状況は悪くなりません。(3) の時、f_R を bad contraction といいます。(3) の場合 Y の特異点は相当悪くなります。そこでそれを避けるために flip と言うものを考えなければなりません。次を満たす $f_+ : X_+ \longrightarrow Y$ が存在すれば、$f_+ : X_+ \longrightarrow Y$ を $f_R : X \longrightarrow Y$ の flip といいます。

(i) X_+ は $\mathbf{Q}$-factorial で terminal singularity のみを持ち、$f_+ : X_+ \longrightarrow Y$ は codimension 1 で同型である。

(ii) K_{X_+} は f_+-ample である。

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \longleftarrow & \cdots & \longrightarrow & X_+ \\
 & {\scriptstyle f_R}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle f_+} & \\
 & & Y & &
\end{array}
$$

ここで少し例を見てみましょう。まず図式から書きます。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & F_1 \cup F_0 & & \\
 & & \cap & & \\
 & & Z & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
\mathbf{P}^2 \cup C \subset \ W & & & & W_+ \ \supset F_1 \supset \Delta \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
C \subset \ X & & & & X_+ \ \supset C_+ \\
 & {\scriptstyle f_R}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle f_+} & \\
 & & Y & &
\end{array}
$$

どのようにして構成したか説明します。まず X_+ から出発します。X_+ は 3 次元非特異射影多様体で、C_+ は X_+ 内の曲線で $\mathbf{P}^1$ に同型であり法線束が $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ に同型である曲線です。この曲線をつぶしたものが Y です。C_+ に沿って blowing-up したものが W_+ です。F_1 はこの blowing-up の例外集合です。Δ は F_1 の negative section です。Δ の法線束は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ に同型です。この Δ に沿って blowing-up したものが Z です。$F_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ がこの blowing-up の例外集合です。F_0 は、さきの blowing-up とは違う方向へ blowing-down できます。blowing-down してできたものが W です。F_0 のつぶれたさきが曲線 C で、F_1 の像が $\mathbf{P}^2$ です。$\mathbf{P}^2$ の法線束は $\mathcal{O}_{P^2}(-2)$ でこれはつぶせます。これをつぶしたものが X です。この contraction は定理 (2.4) の (4.5) にあたるものです。X において C は extremal curve で、

その contraction が $f_R : X \longrightarrow Y$ です。ここで、$(K_X \cdot C) = -1/2$ ですが $(K_{X_+} \cdot C_+) = 1$ となって K_{X_+} は f_+-ample となっています。

この flip についての重要な予想は次の通りです。これが極小モデル問題の鍵となる問題です。

予想 (4.1) (a) *flip* は、存在する。
(b) *flip* の無限の列は存在しない。

3 次元の場合、森氏によってこの予想は解かれました。したがって次の定理が成立します。

定理 (4.2) (cf. [5]) X を 3 次元射影多様体とします。$\mathbf{Q}$*-factorial* で *terminal singularity* のみを持ち X と双有理な射影多様体 X' が存在して、$K_{X'}$ が *nef* であるか X' は森 *-fibration* $f : X' \longrightarrow Y$ の構造を持ちます。

$\mathbf{Q}$-factorial で terminal singularity のみを持ち canonical divisor が nef である射影多様体を極小モデルといいます。森 -fibration をもつ代数多様体は小平次元が $-\infty$ であるのである特別のクラスを形成します。

5 Zariski 分解 と Canonical Ring

X を非特異射影多様体とする時、重要でかつ基本的問題として canonical ring

$$\sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))$$

が有限生成かどうかという問題があります。この問題を Zariski 分解と言う観点から論じてみたいと思います。まず言葉の準備から始めましょう。$\mathrm{Div}(X) \otimes \mathbf{R}$ の元を $\mathbf{R}$-divisor と言います。$\mathbf{R}$-divisor $D = \sum a_i D_i$ に対して、

$$[D] = \sum [a_i] D_i$$

と置きます。ここで、実数 x に対して、$[x]$ は、x を越えない最大の整数とします。$\mathbf{R}$-divisor D が、次を満たす分解 $D = P + N$ $(P, N \in \mathrm{Div}(X) \otimes \mathbf{R})$ が存在する時、$D = P + N$ を D の Zariski 分解と言います。

(1) N は effective であり、P は nef である。

(2) 自然な写像 $\mathcal{O}_X([nP]) \longrightarrow \mathcal{O}_X([nD])$ によって導かれる写像

$$H^0(X, \mathcal{O}_X([nP])) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X([nD]))$$

は同型である。

nef な $\mathbf{R}$-divisor P に対して、

$$\nu(X, P) = \max\{n \geq 0 \mid P^n \not\equiv 0\}$$

と置きます。この時、$\kappa(X, P) \leq \nu(X, P)$ であることが知られています。

$$\kappa(X, P) = \nu(X, P)$$

が成立するとき、P を good と呼びます。Zariski 分解 $D = P + N$ において、P が good となるときこの Zariski 分解を good Zariski 分解と言います。$D = P + N$ が Zariski 分解 の時、

$$\sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X([nP])) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X([nD]))$$

であるので

$$\sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X([nD]))$$

の有限生成の問題は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X([nP]))$$

の有限生成の問題に帰着されます。さらにもし P が $\mathbf{Q}$-divisor で semi-ample なら

$$\sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X([nP]))$$

は有限生成となります。ここで次のことが知られています。

定理 (5.1) [1]　X を非特異射影多様体とします。K_X が *good Zariski* 分解 $K_X = P + N$ を持てば、P は $\mathbf{Q}$-*divisor* で *semi-ample* となる。

さらに比較的容易に、$\kappa(X, K_X) \leq 2$ なら、ある双有理射 $f : Y \longrightarrow X$ が存在して K_Y は good Zariski 分解を持つことわかります。$\dim X = 3$ の時、極小モデルを利用して、X が general type なら、ある双有理射 $f : Y \longrightarrow X$ が存在して K_Y は good Zariski 分解を持つことわかります。したがって次の定理を得ます。

定理 (5.2) X を 3 次元非特異射影多様体とします。この時、*canonical ring* は有限生成です。

4 次元以上の場合についてはよくわかっていません。

---

[1] 例えば森脇の Semi-ampleness of the numerically effective part of Zariski decomposition, J. Math. Kyoto Univ.. Vol. 26, (1986), 465-481 又は Semi-ampleness of the numerically effective part of Zariski decomposition, Algebraic Geometry and Commutative Algebra Vol. 1, (1987), 289-311, Kinokuniya を見てください。

参考文献

[1] H. Clemens, J. Kollár and S. Mori, Higher Dimensional Complex Geometry, Asterisque 166, (1988).

[2] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, in "Algebraic Geometry, Sendai," Adv. Stud. Pure Math. vol. 10, (1987), 283-360.

[3] S. Mori, Projective Manifolds with Ample Tangent Bundles, Ann. of Math. 110 (1979), 593-606.

[4] S. Mori, Threefolds whose Canonical Bundles are not Numerically effective, Ann. of Math. 116 (1982), 133-176.

[5] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for threefolds, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 117-253.

[6] M. Reid, Young person's guide to canonical singularities, in "Algebraic Geometry Bowdoin 1985," Proc. Symp. Pure Math. vol. 46, (1987) 345-416.

文献の解説を少しします。[1] は、代数幾何をある程度知っている人向きの本でUtah大学での勉強会がもとになっています。比較的に読みやすく初心者向けです。[2] は、プロのバイブルとされている論文で決してすらすら読めるものではありませんがこの方面を研究するには是非とも読んでおきたい論文です。[3] と [4] は、極小モデルの理論の原点となった論文でその応用はきわめてひろく是非とも読んでおきたい論文です。[5] は、flip の存在の証明を書いてある論文で森氏がフィールズ賞受賞の対象となった歴史的論文です。しかしきわめて難解で普通の人には読む必要は必ずしもありません。[6] は、極小モデルの理論に必要な特異点の話をまとめた論文でこの方面の話をてっとり早く知りたい人にはうってつけです。