数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 74-109

P. Roberts による Noether 性の反例とその解析

東京都立大学 理学部 蔵野 和彦 (KAZUHIKO KURANO)

1 序

P. Roberts は [6] の中で、次のことを示した。

> F を標数 0 の体、$R = F[x,y,z,S,T,U,V]$ を F 上の 7 変数の多項式環、t を 2 以上の自然数とし、$R_0 = F[x,y,z]$ 上 $y^{t+1}S - x^{t+1}T$, $z^{t+1}T - y^{t+1}U$, $x^{t+1}U - z^{t+1}S$, $xV - y^t z^t S$, $yV - x^t z^t T$, $zV - x^t y^t U$ で生成された R の部分環を $S(M)$ とおいたとき、$\overline{S(M)} = R \cap Q(S(M))$ は Noether 環ではない。

つまりこれは、Hilbert の第 14 問題の反例である。Hilbert の第 14 問題の反例は、永田先生 ([5]) によって最初に与えられたが、Roberts の例はものすごく具体的なものである。また、$S \mapsto x^{t+1}W$, $T \mapsto y^{t+1}W$, $U \mapsto z^{t+1}W$, $V \mapsto (xyz)^t W$ で定まる環の準同型 $R \to F[x,y,z,W]$ の核を P としたとき、その symbolic Rees algebra $R_s(P) = \sum_{n \geq 0} P^{(n)}\xi^n \subseteq R[\xi]$ は、Noether 環でないことも同時に示している。つまりこれは、Cowsik の問題 ([2]) の反例となっている。

一般に symbolic Rees algebra が Noether 環になるかどうかを判定することは、与えられた素イデアルの生成元が非常に簡単なものであっても、大変困難である。

ここではもっと一般に、環 A のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で定まる Rees 環 $R(\mathcal{F}) = \sum_{n \geq 0} F_n \xi^n \subseteq A[\xi]$ の Noether 性について議論する。そしてその応用として、Roberts の例で $\mathrm{ch}(F) > 0$ のときの状況を調べる。

section 2 では、$R(\mathcal{F})$ が Noether 環となるための一つの充分条件を与える (定理 2.3) 。section 3 では、それを使って、ある種のイデアルの Rees 環の定義イデアルの symbolic Rees algebra について議論する (定理 3.3) 。ここではまた、$R(\mathcal{F})$ の Noether 性は、局所的な性質であることを示す (定理 3.1、系 3.2) 。section 4 では、この判定法を使い、Roberts の例で、$\mathrm{ch}(F) > 0$ のときの状況を調べる (定理 4.5) 。section 5 で、Roberts の例で、$t = 1$ の状況を調べる (命題 5.1) 。

数理解析研究所での短期共同研究では、多くの人から、貴重な御意見をいただきました。深く感謝しております。

2 Rees 環の Noether 性に関するある判定法

この section では、イデアルの filtration によって定まる Rees 環の Noether 性に関するある判定法について述べることにする。

定義 2.1 A を可換環とする。整数を添字として持つ A のイデアルの集合 $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が次の三条件を充すとき、$\mathcal{F}$ を A のイデアルの filtration という。

1. 任意の i に対して、$F_i \supseteq F_{i+1}$.
2. $i \leq 0$ のとき、$F_i = A$.
3. 任意の i, j に対して、$F_i{\cdot}F_j \subseteq F_{i+j}$.

A のイデアルの filtration $\mathcal{F}$ に対して、$R(\mathcal{F}) = \sum_{i\geq 0} F_i\xi^i \subseteq A[\xi]$ を $\mathcal{F}$ に関する Rees 環、$R'(\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} F_i\xi^i \subseteq A[\xi, \xi^{-1}]$ を $\mathcal{F}$ に関する extended Rees 環という。

注意 2.2 $\mathcal{F}$ を A のイデアルの filtration とする。このとき、A が Noether 環であっても $R(\mathcal{F})$ や $R'(\mathcal{F})$ は必ずしも Noether 環になるとは限らない。

しかし、A が Noether 環であるとき、$R(\mathcal{F})$ と $R'(\mathcal{F})$ の Noether 性は同値であることが知られている。($R'(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F})[\xi^{-1}]$ により、$R(\mathcal{F})$ が Noether 環であれば $R'(\mathcal{F})$ もそうであることは明かである。逆に、$R'(\mathcal{F})$ が Noether 環と仮定しよう。すると、$R'(\mathcal{F})[\zeta] \subseteq A[\xi, \xi^{-1}, \zeta]$ であり、$A[\xi, \xi^{-1}, \zeta]$ を、$\deg\xi = 1, \deg\zeta = -1$ によって $\mathbb{Z}$-graded ring としたとき、$R'(\mathcal{F})[\zeta]$ は graded な部分環となる。このとき、$(R'(\mathcal{F})[\zeta])_0 = \sum_{i\geq 0} F_i(\xi\zeta)^i \simeq R(\mathcal{F})$ が Noether 環となることは直ちにわかる。)

次の定理は、イデアルの filtration で定まる Rees 環や extended Rees 環が Noether 環となるための一つの充分条件を与えている。

定理 2.3 S を *Noether* 環。$T = S[V]$ を S 上の一変数の多項式環、d を自然数とする。$\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を T のイデアルの *filtration* 。$\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を S のイデアルの *filtration* とする。

次の四つを仮定する。

1. 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $G_iT \subseteq F_i$.

2. $i \in \mathbb{Z}$ と非負整数 t に対して $F_i \ni g_0V^t + g_1V^{t-1} + \cdots + g_t$ $(g_0, \ldots, g_t \in S)$ であるとき、$g_0 \in G_{i-[\frac{t}{d}]}$ が成り立つ。(ただし $[\frac{t}{d}]$ は $\frac{t}{d}$ を越えない最大の整数とする。)

3. $R(\mathcal{G})$ は *Noether* 環。

4. ある自然数 s が存在して、F_s は V に関して ds 次の *monic* 多項式を含む。

このとき、$R(\mathcal{F})$ は *Noether* 環である。

証明 まず一般の場合を、$d=1$ のときえ帰着させることを考える。T のイデアルの filtration $\mathcal{F}'=\{F'_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を次の様に定義する。

$$F'_j = F_{[\frac{j+d-1}{d}]}$$

簡単な計算によって、$\mathcal{F}'$ は filtration であることが確かめられる。同様にして、S のイデアルの filtration $\mathcal{G}'=\{G'_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を、

$$G'_j = F_{[\frac{j+d-1}{d}]}$$

と定める。

この定義より直ちに $R(\mathcal{F}')^{(d)}=R(\mathcal{F})$, $R(\mathcal{G}')^{(d)}=R(\mathcal{G})$ となることがわかる。($(*)^{(d)}$ は d 次の Veronese subring とする。) $R(\mathcal{F}')$ の Noether 性と $R(\mathcal{F}')^{(d)}$ の Noether 性 ($R(\mathcal{G}')$ の Noether 性と $R(\mathcal{G}')^{(d)}$ の Noether 性) は同値であることが知られている。

すると、$\mathcal{F}'$ と $\mathcal{G}'$ は $d=1$ で定理の仮定を充す。実際、任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して $G_iT\subseteq F_i$ であるから、任意の $j\in\mathbb{Z}$ に対して $G'_jT\subseteq F'_j$ となり仮定 1 を充す。また、$R(\mathcal{G})$ が Noether 環であるから $R(\mathcal{G}')$ は Noether 環であり、仮定 3 を充す。さらに、$F'_{ds}=F_s$ は V に関して ds 次の monic 多項式を含むことから仮定 4 を充す。最後に仮定 2 を充していることを確かめる。整数 j と 非負整数 t に対して、$F'_j\ni g_0V^t+g_1V^{t-1}+\cdots g_t$ と仮定する。但し、$g_0,\ldots,g_t$ は S の元とする。$F'_j=F_{[\frac{j+d-1}{d}]}$ であるから $g_0\in G_{[\frac{j+d-1}{d}]-[\frac{t}{d}]}$。さらに、

$$[\frac{j-t+d-1}{d}]+[\frac{t}{d}]\leq[\frac{j+d-1}{d}]$$

であることから、$g_0\in G_{[\frac{j+d-1}{d}]-[\frac{t}{d}]}\subseteq G_{[\frac{j-t+d-1}{d}]}=G'_{j-t}$ となる。

故に、$d=1$ の場合に定理が正しいとすれば $R(\mathcal{F}')$ が Noether 環となり、その d 次の Veronese subring である $R(\mathcal{F})$ も Noether 環となる。

次に、$d=1$ の場合に定理の証明をする。

整数 l と非負整数 t に対して S のイデアル $I_{l,t}$ を、

$$I_{l,t}=\{b\in S\mid F_l \text{ の中に } bV^t+(V \text{ に関する degree が } t \text{ 未満}) \text{ の形の元が存在する}\}$$

とおく。このとき、仮定 2 より $I_{l,t}\subseteq G_{l-t}$ である。$H_l=\oplus_{t\geq0}I_{l,t}V^t\subseteq T$ とおく。定義より直ちに任意の整数 l に対して H_l は T のイデアルとなることがわかる。$\mathcal{H}=\{H_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ はさ

らに T のイデアルの filtration となる。実際、任意の整数 l に対して $F_l \supseteq F_{l+1}$ であるから $H_l \supseteq H_{l+1}$ となる。さらに、$l \leq 0$ であるときは、$F_l = T$ であるから $H_l = T$ となる。また、$b \in I_{l,t}$, $b' \in I_{l',t'}$ であるとき $bb' \in I_{l+l',t+t'}$ に注意すれば、$H_l \cdot H_{l'} \subseteq H_{l+l'}$ がわかる。

まず、次を示す。

補題 2.4 $R(\mathcal{H})$ が *Noether* 環なら、$R(\mathcal{F})$ も *Noether* 環である。

$R(\mathcal{H}) = \sum_{l \geq 0} H_l \xi^l \subseteq T[\xi] = S[V, \xi]$ は V と ξ に関して $\mathbb{Z}^2$-graded subring であるから、$R(\mathcal{H})$ の T 上の生成元を斉次元で選ぶことができる。$R(\mathcal{H}) = T[\{b_\lambda V^{t_\lambda} \xi^{l_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}]$ とすると (Λ は有限集合) 、$b_\lambda \in I_{l_\lambda, t_\lambda}$ であるから、

$$B_\lambda = b_\lambda V^{t_\lambda} + (V \text{ に関して } t_\lambda \text{ 次未満})$$

の形の元が F_{l_λ} に含まれることがわかる。このとき簡単に $R(\mathcal{F}) = T[\{B_\lambda \xi^{l_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}]$ となることがわかる。これで補題 2.4 が示された。

故に、定理を示すためには、$R(\mathcal{H})$ が Noether 環であることを示せばよい。そのためには注意 2.2 により、$R'(\mathcal{H}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} H_l \xi^l \subseteq T[\xi, \xi^{-1}]$ が Noether 環であることを示せば充分である。$R'(\mathcal{G}) \subseteq S[\xi, \xi^{-1}] \subseteq T[\xi, \xi^{-1}]$ によって $R'(\mathcal{G})$ を $T[\xi, \xi^{-1}]$ の部分環と思い、中間環 $R'(\mathcal{G}) \subseteq R'(\mathcal{G})[V\xi] \subseteq T[\xi, \xi^{-1}]$ に注目する。このとき、

$$\begin{aligned} R'(\mathcal{G})[V\xi] &= \sum_{r \geq 0} R'(\mathcal{G}) V^r \xi^r \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{i \in \mathbb{Z}} G_i V^r \xi^{r+i} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{t \geq 0} G_{l-t} V^t \xi^l \end{aligned}$$

となる。$G_{l-t} \supseteq I_{l,t}$ であったから、$R'(\mathcal{H}) \subseteq R'(\mathcal{G})[V\xi]$ である。また、仮定 1, 2 によって $I_{l,0} = F_l \cap S = G_l$ であるから $R'(\mathcal{H}) \supseteq R'(\mathcal{G})$ 。さらに、仮定 4 によってある自然数 s が存在して $H_s \ni V^s$ となる。故に、

$$R'(\mathcal{G})[V^s \xi^s] \subseteq R'(\mathcal{H}) \subseteq R'(\mathcal{G})[V\xi]$$

であることがわかる。仮定 3 より $R'(\mathcal{G})$ は Noether 環であった。これより直ちに $R'(\mathcal{H})$ が Noether 環であることがわかる。 **証明終**

上の定理の 1, 2 の仮定は不自然なものではない。実際、次の様な単純な状況で起こるのである。

命題 2.5 S を *Noether* 環、$T = S[V]$ を S 上の一変数多項式環。$\mathfrak{q}$ を T の素イデアル、$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap S$ とおく。さらに、$S_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環、$Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の d 次代数拡大とする。
このとき、次が成立する。

1. 任意の整数 i に対して $\mathfrak{p}^{(i)}T \subseteq \mathfrak{q}^{(i)}$.

2. 整数 i と非負整数 t に対し、$\mathfrak{q}^{(i)} \ni g_0V^t + g_1V^{t-1} + \cdots + g_t$ $(g_0, \ldots, g_t \in S)$ であるとき、$g_0 \in \mathfrak{p}^{(i-[\frac{t}{d}])}$.

(但し、$Q(*)$ は商体を表し、$i \leq 0$ のときは、$\mathfrak{p}^{(i)} = S$, $\mathfrak{q}^{(i)} = T$ であると定める。)

証明 $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = r$ とする。$S_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環であるから、$f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{p}$ と $a_1 \in S \setminus \mathfrak{p}$ が次を充すように取れる。

- $(f_1, \ldots, f_r)S_{a_1} = \mathfrak{p}S_{a_1}$.
- $f_1, \ldots, f_r$ は S_{a_1} の正則列。

$Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の代数拡大であるから、$\mathfrak{p}T \neq \mathfrak{q}$ であることに注意。

$$\begin{array}{ccccc} T/\mathfrak{p}T & = & (S/\mathfrak{p})[V] & \rightarrow & T/\mathfrak{q} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Q(S/\mathfrak{p})[V] & \rightarrow & Q(T/\mathfrak{q}) \end{array}$$

また $Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の d 次代数拡大であることから、S の元 $b_0, \ldots, b_d$ が存在して、$b_0 \notin \mathfrak{p}$, $b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots b_d \in \mathfrak{q}$,

$$(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}T) \otimes_{S/\mathfrak{p}} Q(S/\mathfrak{p}) = (b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots b_d)Q(S/\mathfrak{p})[V]$$

を充す。

このことより、$a_2 \in S \setminus \mathfrak{p}$ が存在して、

- b_0 は S_{a_2} で unit.
- $(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}T) \otimes_{S/\mathfrak{p}} S_{a_2}/\mathfrak{p}S_{a_2} = (b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots b_d)(S_{a_2}/\mathfrak{p}S_{a_2})[V]$.

が成立する。$a = a_1a_2 \in S \setminus \mathfrak{p}$ とし、$S' = S_a$, $T' = T_a = S'[V]$,

$$f_{r+1} = \frac{1}{b_0}(b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots b_d) \in T'$$

とおく。

このとき、

- $f_1, \ldots, f_r$ は S' の正則列、
- $f_1, \ldots, f_{r+1}$ は T' の正則列、
- $\mathfrak{p}S' = (f_1, \ldots, f_r)S'$,
- $\mathfrak{q}T' = (f_1, \ldots, f_{r+1})T'$,

を充すので、任意の $i \geq 0$ に対して $\mathfrak{p}^{(i)} = (f_1, \ldots, f_r)^i S' \cap S$, $\mathfrak{q}^{(i)} = (f_1, \ldots, f_{r+1})^i T' \cap T$ を充す。

今、$g_0V^t + g_1V^{t-1} + \cdots + g_t \in \mathfrak{q}^{(i)}$ $(g_0, \ldots, g_t \in S)$ としよう。このとき、$g_0V^t + g_1V^{t-1} + \cdots + g_t \in (f_1, \ldots, f_{r+1})^i T'$。このとき、次の補題により、$g_0 \in (f_1, \ldots, f_r)^{i-\xi} S'$ となる。ここで、$t = \xi d + \zeta$ (ξ, ζ は非負整数で、$0 \leq \zeta < d$) であるから、

$$g_0 \in (f_1, \ldots, f_r)^{i-\xi} S' \cap S = (f_1, \ldots, f_r)^{(i-\xi)}$$

であり、$\xi = [\frac{t}{d}]$ であるから、証明は完了した。 **証明終**

補題 2.6 S' を可換環、$T' = S'[V]$ を S' 上の一変数多項式環とする。$f_1, \ldots, f_r$ を S' の元、f_{r+1} を T' の元で V に関して d 次の *monic* 多項式とする。$H = S' + S'V + \cdots + S'V^{d-1} \subseteq T'$ とする。このとき、次が成立する。

1. *$T' = \oplus_{l \geq 0} H \cdot f_{r+1}^l$ と S'-加群として直和分解する。*
2. *$h = g_0V^t + g_1V^{t-1} + \cdots + g_t \in T'$ $(g_0, \ldots, g_t \in S')$, $t = \xi d + \zeta$ $(\xi \geq 0,\ d > \zeta \geq 0)$ で、1 の直和分解で $h = \sum_{l \geq 0} h_l \cdot f_{r+1}^l$ $(h_l \in H)$ を得たとすれば、h_ξ の V^ζ の係数は g_0.*
3. *1 の分解で $h = \sum_{l \geq 0} h_l \cdot f_{r+1}^l$ $(h \in T',\ h_l \in H)$ となったとする。このとき、$h \in (f_i, \ldots, f_{r+1})^i$ であるための必要充分条件は、任意の l に対して $h_l \in (f_1, \ldots, f_r)^{i-l} H$ である。*

証明 1, 2 は明らか。

3 を示す。任意の l に対して $h_l \in (f_1, \ldots, f_r)^{i-l} H$ であれば、$h \in (f_i, \ldots, f_{r+1})^i$ となるのは自明。逆を示す。1 の分解は S'-加群としての直和分解であるから、$(f_1, \ldots, f_{r+1})^i$ の S'-加群としての生成元に対して証明すればよい。

$$\{V^j f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} f_{r+1}^{e_{r+1}} \mid j \geq 0,\ e_1 + \cdots + e_{r+1} = i\}$$

は、S'-加群として $(f_1,\dots,f_{r+1})^i$ を生成する。$V^j=\sum_{l\geq 0}h_l\cdot f_{r+1}^l\ \ (h_l\in H)$ とおく。このとき、

$$V^j f_1^{e_1}\cdots f_r^{e_r}f_{r+1}^{e_{r+1}}=\sum_{l\geq 0}h_l f_1^{e_1}\cdots f_r^{e_r}f_{r+1}^{l+e_{r+1}}$$

であり、$h_l f_1^{e_1}\cdots f_r^{e_r}\in H$ であって、

$$e_1+\cdots+e_r=i-e_{r+1}\geq i-(l+e_{r+1})$$

であるから、$h_l f_1^{e_1}\cdots f_r^{e_r}\in(f_1,\dots,f_r)^{i-(l+e_{r+1})}H$ となる。 **証明終**

定理 2.3 と 命題 2.5 を使うことにより直ちに次の系を得る。

系 2.7 S を *Noether* 環、$T=S[V]$ を S 上の一変数多項式環。$\mathfrak{q}$ を T の素イデアル、$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\cap S$ とおく。さらに、$S_\mathfrak{p}$ が正則局所環、$Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の d 次代数拡大とする。そして、$R_s(\mathfrak{p})=\sum_{i\geq 0}\mathfrak{p}^{(i)}\xi^i\subseteq S[\xi]$ が *Noether* 環であり、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して dl 次の *monic* 多項式を含むと仮定する。このとき、$R_s(\mathfrak{q})=\sum_{i\geq 0}\mathfrak{q}^{(i)}\xi^i\subseteq T[\xi]$ は *Noether* 環である。

注意 2.8 系 2.7 の状況で、更に $d=1$ で、S は有理数体 $\mathbb{Q}$ を含むものとする。

$f\in\mathfrak{q}^{(l)}$ を V に関して l 次の monic 多項式とする。このとき、$gf\in\mathfrak{q}^l$ となる元 $g\in T\setminus\mathfrak{q}$ がとれる。このとき、$\frac{\partial}{\partial V}(gf)\in\mathfrak{q}^{l-1},\ \dots,\ \frac{\partial^{l-1}}{\partial V^{l-1}}(gf)\in\mathfrak{q}$ となる。$f^{(i)}=\frac{\partial^i}{\partial V^i}f$ とおけば、$\frac{\partial^j}{\partial V^j}(gf)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}g^{(j-i)}f^{(i)}$ であるから、$\mathfrak{q}$ の元 $h_0,\dots,h_{l-1}$ が存在して、

$$\begin{pmatrix} g^{(0)} & & & & \\ & g^{(0)} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & g^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{(l-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{l-1} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、左の下半三角行列の余因子行列を M とおけば、

$$g^l\begin{pmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{(l-1)} \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{l-1} \end{pmatrix}$$

となる。故に、$g^l f^{(l-1)}\in\mathfrak{q}$ となり、$f^{(l-1)}\in\mathfrak{q}$ を得る。f は V に関して l 次の monic 多項式であったから、$f^{(l-1)}=(l!)V+g\ \ (g\in S)$ と書ける。

つまり、このとき、元々 $\mathfrak{q}$ は V に関して 1 次の monic 多項式を含んでいるのである。$\mathfrak{q}$ に含まれる V に関して 1 次の monic 多項式を改めて f とおけば、$\mathfrak{q} = (f, \mathfrak{p})T$ となる。このとき、任意の自然数 i に対して

$$\mathfrak{q} = \sum_{i=0}^{j} \mathfrak{p}^{(i)} f^{j-i} T$$

となることがわかる。これより直ちに、$R_s(\mathfrak{p})$ が Noether 環であれば、$R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環となることがわかる。

例 2.9 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とおき、r を自然数とする。$h_1, \ldots, h_n \in (\mathbb{N}_0)^r$ とする。$H' = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_0 h_i$, $H = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{N}_0 h_i$ を $(\mathbb{N}_0)^r$ の部分半群とする。F を体とし、$S = F[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, $T = F[x_1, \ldots, x_{n-1}, V]$ を F 上の多項式環とする。H (または、H') で定まる F 上の semi-group ring を $F[H]$ (または、$F[H']$) と表す。h_i に対応する semi-group ring の元を multi-index で t^{h_i} と表す。$x_i \mapsto t^{h_i}$ によって決まる S から $F[H']$ への環準同型の核を $\mathfrak{p}$, $x_i \mapsto t^{h_i}$, $V \mapsto t^{h_n}$ によって決まる T から $F[H]$ への環準同型の核を $\mathfrak{q}$ とおく。このとき、明らかに $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap S$ である。さらに、$\underline{\dim F[H] = \dim F[H']}$ を仮定する。このとき、$Q(T/\mathfrak{q})$ は $Q(S/\mathfrak{p})$ の代数拡大となる。拡大次数を d とおく。このとき、もし $R_s(\mathfrak{p})$ が Noether 環であり、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して dl 次の monic 多項式が存在すれば、系 2.7 により、$R_s(\mathfrak{q})$ は Noether 環になる。

例えば、$r = 1, n = 3$ の場合について考えてみよう。このとき、$\mathfrak{q}$ は非負整数 h_1, h_2, h_3 によって定まる space monomial curve の定義イデアルである。$\mathfrak{p}$ は単項イデアルであるから $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環である。$R_s(\mathfrak{q})$ 環論的性質 (Noether 性、Cohen-Macaulay 性等) を調べるときは h_1, h_2, h_3 は、pairwise coprime としてよいということが簡単にわかる。以下 h_1, h_2, h_3 は pairwise coprime と仮定する。このとき、$Q(T/\mathfrak{q}) = Q(S/\mathfrak{p})$ であり、$d = 1$ となる。故にこのとき、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式が存在すれば $R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環となるのである。

$\mathrm{ch}(F) = 0$ の場合、注意 2.8 により、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含んでいれば $l = 1$ でとれ、つまり、$H = H'$ であり、このとき $R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環となることは $\mathfrak{q}$ が complete intersection であることから明らかである。

$\mathrm{ch}(F) = p > 0$ の場合も、$\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic な斉次多項式を含めば、その次数 ($\deg x_1 = h_1$, $\deg x_2 = h_2$, $\deg V = h_3$ としての) は lh_3 となる。ところが、一般に、Cutokosky [3] により、この状況で、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が次数 $l(h_1 + h_2 + h_3)$ 未満の元を含めば、$R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環であることが証明されている。

だから、space monomial curve の定義イデアルの symbolic Rees algebra を調べるときには、この判定法は有効ではない。

以下の section で、この判定法が有効に使える場合を見ることにする。

3 ある種のイデアルの Rees 環の定義イデアルの symbolic Rees algebra について

この section では、与えられた環の正則列ともうひとつの元で生成されたイデアルの Rees 環の定義イデアルによって定まる symbolic Rees algebra の Noether 性について議論する。

まず、次を証明する。

定理 3.1 *A を Noether 環、$\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を A のイデアルの filtration とする。$\mathfrak{p}$ が A の素イデアルで、$R(\mathcal{F})\otimes_A A_\mathfrak{p}$ が Noether 環であるとする。このとき、$R(\mathcal{F})\otimes_A A_x$ が Noether 環であるような $x\in A\setminus\mathfrak{p}$ が存在する。*

証明 適当に Veronese subring をとり、任意の n に対して $F_nA_\mathfrak{p}=F_1^nA_\mathfrak{p}$ と仮定してよい。

$F_1=A$ であれば、$R(\mathcal{F})$ は A 上の 1 変数多項式環であるから、$x=1\in A\setminus\mathfrak{p}$ とすればよい。

$F_1\neq A$ と仮定する。

$$\bigcup_{l\geq 1}\mathrm{Ass}_A(A/F_1^l)=\{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_m,\mathfrak{q}_{m+1},\ldots,\mathfrak{q}_k\}$$

とする。ただし、$i=1,\ldots,m$ に対して $\mathfrak{q}_i\subseteq\mathfrak{p}$ で、$j=m+1,\ldots,k$ に対して $\mathfrak{q}_j\not\subseteq\mathfrak{p}$ とする。(仮定より $k>0$ であるが、$m=0$ または $k=m$ となることもありうる。$\cup_{l\geq1}\mathrm{Ass}_A(A/F_1^l)$ が有限集合となることは、よく知られている。)

$x\in\mathfrak{q}_{m+1}\cup\cdots\cup\mathfrak{q}_k\setminus\mathfrak{p}$ とする。($k=m$ の場合には、単に $x\in A\setminus\mathfrak{p}$ ととる。) ここで、ある自然数 n が存在して $F_nA_x\neq F_1^nA_x$ と仮定する。このとき、P を $\mathrm{Ass}_{A_x}(F_nA_x/F_1^nA_x)\subseteq\mathrm{Ass}_{A_x}(A_x/F_1^nA_x)$ からとる。$Q=P\cap A$ とおく。このとき、$Q\in\mathrm{Ass}_A(A/F_1^n)$ である。$Q\not\ni x$ より $Q\subseteq\mathfrak{p}$ である。しかし、このとき、$F_nA_Q=F_1^nA_Q$ となり P のとり方に反する。 **証明終**

これより直ちに次を得る。

系 3.2 前定理と同じ記号の下で $U=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)\mid R(\mathcal{F})\otimes_A A_\mathfrak{p}$ は *Noether* 環 $\}$ とおいたとき、次が成立する。

1. *U は $\mathrm{Spec}(A)$ の Zariski open.*

2. *$U=\mathrm{Spec}(A)$ なら $R(\mathcal{F})$ は Noether 環。*

定理 3.1 と系 3.2 より、$R(\mathcal{F})$ の Noether 性は、(A に関して) 局所的な性質であることがわかる。これらと section 2 の結果より次がわかる。

定理 3.3 A を体を含む *Noether* 環、$t_1, \ldots, t_d$ を A-正則列、$y \in A$ とする。$x_i \mapsto t_iW$, $V \mapsto yW$ によって決まる A 上の多項式環の間の環準同型 $T = A[x_1, \ldots, x_d, V] \to A[W]$ の核を $\mathfrak{q}$ とする。自然数 n に対して、

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \{r \in T \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して } t_1^m r, \ldots, t_d^m r \in \mathfrak{q}^n\ \}$$

とし、$n \leq 0$ のときは $\mathfrak{q}^{(n)} = T$ とおけば、$\mathcal{F} = \{\mathfrak{q}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は T のイデアルの *filtration* となる。このとき、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含めば、$R(\mathcal{F})$ は *Noether* 環である。

注意 3.4 上で A が整域であるとき、$\mathfrak{q}$ は A の素イデアルである。このとき、上で定義した $\mathfrak{q}^{(n)}$ は、普通の $\mathfrak{q}$ の n 次の symbolic power と一致する。

なぜならば、

$$\mathfrak{q}T_{t_1} = (x_2 - (t_2/t_1)x_1, \ldots, x_d - (t_d/t_1)x_1, V - (y/t_1)x_1)\, T_{t_1}$$

は、complete intersection であるからである。

定理 3.3 の証明 系 3.2 によって、A の任意の素イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $R(\mathcal{F}) \otimes_A A_\mathfrak{m}$ が Noether 環であることを示せばよい。(系 3.2 を T に対して使う。)

最初に $\mathfrak{m} \not\supseteq (t_1, \ldots, t_d, y)$ の場合を考える。$T_\mathfrak{m} = T \otimes_A A_\mathfrak{m} = A_\mathfrak{m}[x_1, \ldots, x_d, V]$ の不定元を取り替えて、

$$T_\mathfrak{m} = A_\mathfrak{m}[Z_1, \ldots, Z_{d+1}] \supseteq \mathfrak{q}T_\mathfrak{m} = (Z_2, \ldots, Z_{d+1})T_\mathfrak{m}$$

であるとしてよい。$t_1, \ldots, t_d$ が $A_\mathfrak{m}$ の非零因子であることより、

$$\mathfrak{q}^n T_\mathfrak{m} = (Z_2, \ldots, Z_{d+1})^n T_\mathfrak{m} = \mathfrak{q}^{(n)} T_\mathfrak{m}$$

となる。これより、$R(\mathcal{F}) \otimes_A A_\mathfrak{m}$ は Noether 環となる。

次に $\mathfrak{m} \supseteq (t_1, \ldots, t_d, y)$ の場合を考える。つまり、最初から $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環、$t_1, \ldots, t_d \in \mathfrak{m}$ は A-正則列、$y \in \mathfrak{m}$ としてよい。$x_i \mapsto t_iW$ によって決まる A 上の多項式環の間の環準同型 $S = A[x_1, \ldots, x_d] \to A[W]$ の核を $\mathfrak{p}$ とする。さらに、自然数 n に対して、

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{r \in S \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して } t_1^m r, \ldots, t_d^m r \in \mathfrak{p}^n\ \}$$

とし、$n \leq 0$ のときは $\mathfrak{p}^{(n)} = S$ とおけば、$\mathcal{G} = \{\mathfrak{p}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は S のイデアルの filtration となる。この $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が $d = 1$ として、定理 2.3 の四つの仮定を充すことがいえれば、$R(\mathcal{F})$ は Noether 環となる。

定理 2.3 の仮定 4 はこの定理では仮定している。

また、任意の自然数 n に対して $\mathfrak{p}^n T \subseteq \mathfrak{q}^n$ であるから、$\mathfrak{p}^{(n)} T \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$ は自明である。

次に、定理 2.3 の仮定 3 について調べる。A は、体 F を含むとする。$t_1, \ldots, t_d$ は A-正則列であるから、$T_i \mapsto t_i$ で定まる多項式環の局所環 $F[T_1, \ldots, T_d]_{(T_1, \ldots, T_d)}$ から A への環準同型は忠実平坦である。故に、$L = F[T_1, \ldots, T_d, x_1, \ldots, x_d] \to S$ は平坦である。L の素イデアルを

$$P = I_2 \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_d \\ x_1 & \cdots & x_d \end{pmatrix}$$

とおく。P は generic matrix の maximal minor で生成されたイデアルであるから、任意の自然数 n に対して $P^n = P^{(n)}$ が成立する ([1]) 。故に、任意の i と任意の自然数 n, m に対して $T_i \notin P$ であるから、$P^n : T_i^m = P^n$ が成立する。$L \to S$ は平坦であり、$PS = \mathfrak{p}$ であるから、$\mathfrak{p}^n : t_i^m = \mathfrak{p}^n$ が成立する。故に、任意の自然数 n に対して $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ となる。

最後に、定理 2.3 の仮定 2 について調べる。完全列

$$0 \to \mathfrak{q}T \to A[x_1, \ldots, x_d, V] \to A[W]$$

を t_i で局所化して、

$$0 \to \mathfrak{q}T_{t_1} \to T_{t_i} \to A_{t_i}[W]$$

を得る。ここで、$x'_i = x_i/t_i$, $j \neq i$ に対して $x'_j = x_j - (t_j/t_i)x_i$, $V' = V - (y/t_i)x_i$ とおけば、$T_{t_i} = A_{t_i}[x'_1, \ldots, x'_d, V']$ となり、$\mathfrak{q}T_{t_1} = (x'_1, \overset{i}{\overset{\vee}{\ldots}}, x'_d, V')T_{t_i}$ である。(ここで、$(x'_1, \overset{i}{\overset{\vee}{\ldots}}, x'_d, V')$ は、$(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \ldots, x'_d, V')$ を表す。) このことより、$\mathfrak{q}^{(n)}T_{t_i} = (x'_1, \overset{i}{\overset{\vee}{\ldots}}, x'_d, V')^n T_{t_i} = \mathfrak{q}^n T t_i$ であり、

$$\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq (x'_1, \overset{i}{\overset{\vee}{\ldots}}, x'_d, V')^n T_{t_i} \cap T = \bigcup_{m \geq 0} (\mathfrak{q}^n :_T t_i^m)$$

となる。今、t_j は A_{t_i} の非零因子であることに注意すれば、任意の i, j に対して $\cup_{m \geq 0}(\mathfrak{q}^n :_T t_i^m) = \cup_{m \geq 0}(\mathfrak{q}^n :_T t_j^m)$ となり、$\mathfrak{q}^{(n)} = (x'_1, \overset{i}{\overset{\vee}{\ldots}}, x'_d, V')^n T_{t_i} \cap T$ であることがわかる。$\alpha : T = A[x_1, \ldots, x_d, V] \to T_{t_i} = A_{t_i}[x'_1, \ldots, x'_d, V']$ を局所化とするとき、α は単射である。$A \to A_{t_i}$ から誘導される多項式環の間の写像 $A[x'_1, \ldots, x'_d, V'] \to A_{t_i}[x'_1, \ldots, x'_d, V']$ を β とおく。$\gamma(x_i) = t_i x'_i$, $j \neq i$ に対して $\gamma(x_j) = x'_j + t_j x'_i$, $\gamma(V) = V' + yX'_i$ で、A 上の多項式環の間の写像$\gamma : A[x_1, \ldots, x_d, V] \to A[x'_1, \ldots, x'_d, V']$ を定義する。このとき、$\alpha = \beta \circ \gamma$ である。$r \in T$ に対して、$r \in \mathfrak{q}^{(n)}$ は、$\alpha(r) \in (x'_1, \overset{i}{\overset{\vee}{\ldots}}, x'_d, V')^n T_{t_i}$ と同値であり、これはさら

に、$\gamma(r) \in (x'_1, \overset{i}{\check{\ldots}}, x'_d, V')^n A[x'_1, \ldots, x'_d, V']$ と同値である。故に、

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \{r \in T \mid \gamma(r) \in (x'_1, \overset{i}{\check{\ldots}}, x'_d, V')A[x'_1, \ldots, x'_d, V']\}$$

を得る。同様にして、$\delta : S = A[x_1, \ldots x_d] \to A[x'_1, \ldots, x'_d]$ を、$\gamma(x_i) = t_i x'_i,\ j \neq i$ に対して $\delta(x_j) = x'_j + t_j x'_i$ と定めれば、

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{r \in S \mid \delta(r) \in (x'_1, \overset{i}{\check{\ldots}}, x'_d)A[x'_1, \ldots, x'_d]\}$$

となる。今、$h = g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \cdots + g_t \in \mathfrak{q}^{(n)}$ $(g_0, \ \ldots, \ g_t \in S)$ とする。このとき、

$$\gamma(h) = \delta(g_0)(V' + yx'_i)^t + \delta(g_1)(V' + yx'_i)^{t-1} + \cdots + \delta(g_t) \in (x'_1, \overset{i}{\check{\ldots}}, x'_d, V')^n A[x'_1, \ldots, x'_d, V']$$

となる。V'^t の係数に注目してみれば、$\delta(g_0) \in (x'_1, \overset{i}{\check{\ldots}}, x'_d)^{n-t} A[x'_1, \ldots, x'_d]$ を得る。故に、$g_0 \in \mathfrak{p}^{(n-t)}$ となる。 **証明終**

4 定理 2.3 の応用例

section 2 の後半や section 3 では、いろいろな状況で、定理 2.3 の仮定 1, 2, 3 が充されることを見た。

この section では、実際に具体的な例によって、どの程度、定理 2.3 の仮定 4 が充されるかを調べる。

Roberts は [6] の中で、Hilbert の第 14 問題に対して、非常に簡単な反例を与えた。そこに出てくる環は、標数 0 の体を含んでいる。ここでは、その基礎体が、正標数である場合に Noether 性を判定する。

まず、記号の準備から始める。

F を体 (ここでは、標数についての仮定はしない) 、$R_0 = F[x, y, z]$ を多項式環とする。多項式環 $R = \sum_{l \geq 0} R_l = F[x, y, z, S, T, U, V]$ に、x, y, z の次数を 0 、S, T, U, V の次数を 1 として次数環の構造を与える。α, β を自然数とし、R_0-自由加群の間の射 $\phi : R_1 \to R_0$ を、$S \mapsto x^\alpha$, $T \mapsto y^\alpha$, $U \mapsto z^\alpha$, $V \mapsto (xyz)^\beta$ で定める。$M = \mathrm{Ker}(\phi)$ は、R_1 の R_0-部分加群である。(M の R_0-加群としての生成元は、$\beta \geq \alpha$ のときは $\{y^\alpha S - x^\alpha T, z^\alpha T - y^\alpha U, x^\alpha U - z^\alpha S, V - x^{\beta-\alpha} y^\beta z^\beta S\}$ 、$\beta < \alpha$ のときは $\{y^\alpha S - x^\alpha T, z^\alpha T - y^\alpha U, x^\alpha U - z^\alpha S, x^{\alpha-\beta} V - y^\beta z^\beta S, y^{\alpha-\beta} V - x^\beta z^\beta T, z^{\alpha-\beta} V - x^\beta y^\beta U,\}$ である) R_0 上に、M で生成された R の次数付きの部分環を $S(M) = \oplus_{l \geq 0} S^l(M)$ とする。さらに、

$$\overline{S^l(M)} = \{f \in R_l \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して、} x^m f, y^m f, z^m f \in S^l(M)\}$$

と定める。このとき、$\overline{S(M)} = \oplus_{l \geq 0} \overline{S^l(M)}$ は、R の次数付きの部分環となる。

注意 4.1 $\mathfrak{m}=(x,y,z)R_0$ とおく。このとき、

1. 任意の l に対して、$S^l(M)=\mathrm{Sym}^l(M)/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Sym}^l(M))$
2. $\alpha>\beta$ なら $\mathrm{Sym}(M)\neq S(M)$ で、$\alpha\leq\beta$ なら $\mathrm{Sym}(M)=S(M)$
3. 任意の l に対して、$\overline{S^l(M)}=(S^l(M))^{**}=(\mathrm{Sym}^l(M))^{**}$

が成立する。(ここで、$(-)^*$ は R_0-dual とする。)

$\varphi: R=F[x,y,z,S,T,U,V]\to F[x,y,z,W]$ を、$\varphi(S)=x^\alpha W$, $\varphi(T)=y^\alpha W$, $\varphi(U)=z^\alpha W$, $\varphi(V)=(xyz)^\beta W$ で定義する。このとき、$Q=\mathrm{Ker}(\varphi)$ は、R の高さ 3 の素イデアルであり、$Q_1=M$ である。また、Q の生成元は、次数が正であることに注意すれば、任意の l に対して、$[Q^l]_l=S^l(M)$ となることがわかる。このことより容易に $[Q^{(l)}]_l=\overline{S^l(M)}$ であることがわかる。

さらに、[6] の中で、次のことが示されている。

命題 4.2 *1.* $R_s(Q)$ から $\overline{S(M)}$ への全射準同型がある。

2. $Q(R)$ の中で、$\overline{S(M)}=R\cap Q(S(M))$.

故に、$\overline{S(M)}$ が Noether 環でなければ、$R_s(Q)$ は Noether 環でなく、$\overline{S(M)}=R\cap Q(S(M))$ は Hilbert の第 14 問題の反例であり、$R_s(Q)$ は Cowsik の問題の反例である。

Roberts は、次のことを証明した。

定理 4.3 *(Roberts [6])* F の標数が 0 で、$1>\beta/\alpha\geq 2/3$ のとき、$\overline{S(M)}$ は *Noether* 環でない。

以下、F の標数に関する仮定をはずして、$R_s(Q)$ の Noether 性についての議論をする。

Q は、ある semi-group ring の定義イデアルとなっている。実際、例 2.9 の状況で、$r=4$, $n=7$ として、

$$\begin{aligned} h_1 &= (1,0,0,0)\\ h_2 &= (0,1,0,0)\\ h_3 &= (0,0,1,0)\\ h_4 &= (\alpha,0,0,1)\\ h_5 &= (0,\alpha,0,1)\\ h_6 &= (0,0,\alpha,1)\\ h_7 &= (\beta,\beta,\beta,1)\end{aligned}$$

とすれば、$H = \sum_{i=0}^{7} \mathbb{N}_0 h_i$ の定義イデアルが Q である。例 2.9 と同様にして、$H' = \sum_{i=0}^{6} \mathbb{N}_0 h_i$ とおき、その定義イデアルを P とおく。つまり、$P = Q \cap F[x,y,z,S,T,U]$ である。今の場合、$Q(F[H]) = Q(F[H'])$ であることに注意。また、x^α, y^α, z^α は R_0-正則列であるから、

$$P = I_2 \begin{pmatrix} S & T & U \\ x^\alpha & y^\alpha & z^\alpha \end{pmatrix}$$

であり、[1] によって、任意の l に対して $P^l = P^{(l)}$ となる。このことより、$R_s(P)$ は Noether 環であることがわかる。故に、例 2.9 で見たように、ある自然数 l が存在して、$Q^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含んでいれば、$R_s(Q)$ は、Noether 環となる。($Q(F[H]) = Q(F[H'])$ であるから $d=1$)

もし、$Q^{(l)}$ の中に V に関して l 次の monic 多項式があれば、それは、l 次斉次式であるとしてよい。ところが、$[Q^{(l)}]_l = \overline{S^l(M)}$ であった。だから、$\overline{S^l(M)}$ の中に、V に関して l 次の斉次式があるかどうかを調べればよい。

$S \mapsto x^\alpha S'$, $T \mapsto T' + y^\alpha S'$, $U \mapsto U' + z^\alpha S'$, $V \mapsto V' + (xyz)^\beta S'$ で定まる環準同型を

$$\delta : F[x,y,z,S,T,U] \to F[x,y,z,S',T',U']$$

$$\gamma : F[x,y,z,S,T,U,V] \to F[x,y,z,S',T',U',V']$$

とおけば、定理 3.3 の証明の中で示したように、任意の自然数 l に対して、

$$\begin{aligned} P^{(l)} &= \{f \in F[x,y,z,S,T,U] \mid \delta(f) \in (T',U')^l F[x,y,z,S',T',U']\} \\ Q^{(l)} &= \{f \in R \mid \gamma(f) \in (T',U',V')^l F[x,y,z,S',T',U',V']\} \end{aligned}$$

が成立する。さらに、$[Q^{(l)}]_l = \overline{S^l(M)}$, $[P^{(l)}]_l = [P^l]_l = S^l(N)$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \overline{S^l(N)} &= S^l(N) \\ &= \{f \in R_l \mid \delta(f) \text{ には } S' \text{ が出てこない}\} \\ \overline{S^l(M)} &= \{f \in R_l \mid \gamma(f) \text{ には } S' \text{ が出てこない}\} \end{aligned}$$

となる。(ここで、$N = P_1 = R_0(y^\alpha S - x^\alpha T) + R_0(z^\alpha T - y^\alpha U) + R_0(x^\alpha U - z^\alpha S)$ とし、$S(N) = \oplus_l S^l(N)$ を R_0 上 N で生成された $F[x,y,z,S,T,U]$ の次数付き部分環で、

$$\overline{S^l(N)} = \{f \in (F[x,y,z,S,T,U])_l \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して、} x^m f, y^m f, z^m f \in S^l(N)\}$$

とする。)

注意 4.4 $\beta \geq \alpha$ であるときは、体の標数に依らずに、$Q_1 = M$ の中に V に関する 1 次の monic 多項式が存在する。

逆に、$\beta < \alpha$ であるときは、体の標数に依らずに、$Q_1 = M = S^1(M) = \overline{S^1(M)}$ の中に V に関する 1 次の monic 多項式は存在しない。つまり、このときは、Q の中には、V に関する 1 次の monic 多項式は存在しない。

今、更に、$\beta < \alpha$ であり、F の標数が 0 であると仮定する。このとき、注意 2.8 によって、ある自然数 l が存在して $Q^{(l)}$ が、V に関して l 次の monic 多項式を含むと仮定すれば、Q 自身が V に関して 1 次の monic 多項式を含むことになる。故に、この場合は、任意の自然数 l に対して $Q^{(l)}$ は、V に関して l 次の monic 多項式を含まない。

つまり、F の標数が 0 の場合は、ある自然数 l に対して $Q^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むための必要充分条件は、$\beta \geq \alpha$ であることがわかる。

以下、この section では、F の標数は $p > 0$ であり $\alpha > \beta$ と仮定する。

この section の残りは、次の定理の証明を目標とする。

定理 4.5 $\mathrm{ch}(F) = p > 0$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関する l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、$p \equiv 2\ (3)$ のときは $\beta/\alpha \geq (2p-1)/3p$, $p \not\equiv 2\ (3)$ のときは $\beta/\alpha \geq 2/3$ である。

故にこのとき、$\overline{S(M)}$ と $R_s(Q)$ は *Noether* 環である。

定理を証明するために、いくらかの準備をする。

補題 4.6 $p > 0, \alpha > \beta$ が与えられたとする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含めば、ある自然数 n が存在して $\overline{S^{p^n}(M)}$ が V に関して p^n 次の *monic* 多項式を含む。

証明 $h = V^l + g_1V^{l-1} + \cdots + g_l$ $(g_1, \ldots, g_t \in F[x, y, z, S, T, U])$ を $\overline{S^l(M)}$ に含まれる V に関して l 次の monic 多項式とする。このとき、

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \gamma(V)^l + \delta(g_1)\gamma(V)^{l-1} + \cdots \delta(g_t) \\ &= (V' + (xyz)^\beta S')^l + \delta(g_1)(V' + (xyz)^\beta S')^{l-1} + \cdots + \delta(g_t)\end{aligned}$$

には、S' は出てこない。故に、$S'V'^{l-1}$ の係数に注目してみれば、$l(xyz)^\beta \in (x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha)R_0$ となる。$\alpha > \beta$ であったから、l は p で割り切れなければならない。

$l = p^n t$ (p と t は互いに素) とおく。上で見たように、$n > 0$ である。

$t = 1$ なら、$l = p^n$ であるからよい。

$t \geq 2$ と仮定する。

$$h = V^{p^n t} + g_1 V^{p^n t-1} + \cdots + g_{p^n t}$$

に対して、

$$h' = tV^{p^n} + g_1 V^{p^n-1} + \cdots + g_{p^n}$$

とおく。$\gamma(h)$, $\gamma(h')$ を、V' について整理する。$i = 1, \ldots, p^n$ とする。このとき、任意の非負整数 j に対して、$\gamma(g_i V^{p^n t-i})$ の $V'^{p^n(t-1)+j}$ の係数と、$\gamma(g_i V^{p^n-i})$ の V'^j の係数は等しい。さらに、

$$\begin{aligned} \gamma(V^{p^n t}) &= V'^{p^n t} + t((xyz)^\beta S')^{p^n} V'^{p^n(t-1)} + \cdots \\ \gamma(tV^{p^n}) &= tV'^{p^n} + t((xyz)^\beta S')^{p^n} \end{aligned}$$

であるから $\gamma(h')$ には S' が出てこないことがわかる。 **証明終**

今後、x^α, y^α, z^α の Koszul relation を

$$\begin{aligned} A &= y^\alpha S - x^\alpha T \\ B &= z^\alpha S - x^\alpha U \\ C &= z^\alpha T - y^\alpha U \end{aligned}$$

と表す。このとき、$S(N) = \overline{S(N)} = F[x, y, z, A, B, C] \subset F[x, y, z, S, T, U]$ である。

補題 4.7 $p > 0, \alpha > \beta$ が与えられたとする。このとき、ある自然数 n が存在して $\overline{S^{p^n}(M)}$ が

$$h = V^{p^n} + g_i V^{p^n-i} + (V \text{ に関して } p^n - i \text{ 次未満})$$

という形 $(0 < i < p^n,\ g_i \in F[x, y, z, S, T, U])$ の元を含めば、$g_i \in S^i(N)$ である。

証明 $\gamma(h)$ を V' について整理する。そうすれば、$\delta(g_i)$ には、S' が出てこないことがわかる。g_i は S, T, U に関して i 次斉次式であるから、$g_i \in S^i(N)$ を得る。 **証明終**

$R = F[x, y, z, S, T, U, V]$ は、x, y, z の次数を 0 、S, T, U, V の次数を 1 として次数環の構造を持っていた。ここでさらに、R_0 と R に別の次数環の構造を与える。$\deg_{\mathbb{Z}^3} x = (1, 0, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} y = (0, 1, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} z = (0, 0, 1)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} S = (\alpha, 0, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} T = (0, \alpha, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} U = (0, 0, \alpha)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} V = (\beta, \beta, \beta)$ により、R_0, R を $\mathbb{Z}^3$-graded ring と思う。このとき、任意の自然数 l に対して、R_l は graded R_0-加群であり、$S^l(M)$, $\overline{S^l(M)}$ は graded 部分 R_0-加群である。$\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元 f が $\deg_{\mathbb{Z}^3} f = (a, b, c)$ であるとき、$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} f = a + b + c$ と定める。

補題 4.8 $p > 0$ と $\beta/\alpha < 2/3$ を充す α, β が与えられたとする。h は、$\overline{S^{p^n}(M)}$ の元で $\mathbb{Z}^3$-*homogeneous* であり、V に関する *monic* 多項式であるとする。このとき、$g \in F[x,y,z,S,T,U]$ が存在して、$h = V^{p^n} + g$ と書ける。

証明 仮定より、$\deg_{\mathbb{Z}^3} h = (\beta p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である。ここで、

$$h = V^{p^n} + g_i V^{p^n - i} + (V \text{ に関して } p^n - i \text{ 次未満})$$

で、$0 \neq g_i \in F[x,y,z,S,T,U]$, $0 < i < p^n$ とする。このとき、補題 4.7 により、$g_i \in S^i(N)$ である。$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} A = \mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} B = \mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} C = 2\alpha$ に注意すれば、$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} g_i \geq 2i\alpha$ となる。故に、

$$3\beta p^n = \mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} g_i V^{p^n - i} \geq 2i\alpha + 3\beta(p^n - i)$$

となり、これは、$\beta/\alpha < 2/3$ に反する。 **証明終**

補題 4.9 $p > 0$ と $\beta/\alpha < 1/2$ を充す α, β が与えられたとする。このとき、任意の自然数 l に対して、$\overline{S^l(M)}$ は V に関して l 次の *monic* 多項式を含まない。

証明 ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式 h を含むとする。このとき、補題 4.6 により、$l = p^n$ であり h は $\mathbb{Z}^3$-homogeneous としてよい。注意 4.4 により $n \geq 1$ である。さらに、補題 4.8 によって、$h = V^{p^n} + g$ $(g \in F[x,y,z,S,T,U])$ の形としてよい。

$x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S \in M$ であるから $x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} - y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} \in S^{p^n}(M)$ となる。また、$x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n} g^{p^n} \in \overline{S^{p^n}(M)}$ であるから、$x^{(\alpha-\beta)p^n} g^{p^n} + y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} \in \overline{S^{p^n}(M)} \cap F[x,y,z,S,T,U] = S^{p^n}(N)$ である。

つまり、

- f は $\mathbb{Z}^3$-homogeneoous で、$\deg_{\mathbb{Z}^3} f = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$.
- $f - y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n}$ は $x^{(\alpha-\beta)p^n}$ で割り切れる。

を充す $f \in S^{p^n}(N)$ が存在する。f の中から $y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n}$ が出てくるから、f の中には、A, B の p^n 次の monomial が少なくとも一つ出てくる。ところが、$\deg_{\mathbb{Z}^3} A^i B^{p^n - i} = (\alpha p^n, \alpha i, \alpha(p^n - i))$ であるから、f の中に $A^i B^{p^n - 1}$ が出てくるとすれば $\alpha i \leq \beta p^n$, $\alpha(p^n - i) \leq \beta p^n$ となり、これは $\beta/\alpha < 1/2$ に反する。 **証明終**

補題 4.10 l を自然数をする。このとき、$\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むかどうかは、有理数 β/α と F の標数だけで定まる。

証明 $R'_0 = F[x', y', z']$ とし、$x \mapsto x'^t$, $y \mapsto y'^t$, $z \mapsto z'^t$ によって定まる準同型 $R_0 \to R'_0$ により、R'_0 を R-algebra とみる。$R' = R \otimes_{R_0} R'_0$ とおく。このとき、$R' = F[x', y', z', S, T, U, V]$, $R'_1 = R_1 \otimes_{R_0} R'_0 = R'_0 S + R'_0 T + R'_0 U + R'_0 V$ である。$S \mapsto x'^{t\alpha}$, $T \mapsto y'^{t\alpha}$, $U \mapsto z'^{t\alpha}$, $V \mapsto (x'y'z')^{t\beta}$ により R'_1 から R'_0 への R'_0-線形写像を定め、その核を M' と書く。このとき、$M' = M \otimes_{R_0} R'_0$ である。R'_0 上 M' で生成された R' の部分環を $S(M')$ とし、$\overline{S^l(M')}$ を M のときと同様に定める。このとき、$S^l(M') = S^l(M) \otimes_{R_0} R'_0$ となり、$S^l(M') \subseteq \overline{S^l(M)} \otimes_{R_0} R'_0 \subseteq R'_l$ である。定義より、$\overline{S^l(M)} \otimes_{R_0} R'_0 \subseteq \overline{S^l(M')}$ である。また、x は $R_l / \overline{S^l(M)}$ の非零因子であったから、x' は $R'_l / \overline{S^l(M')}$ の非零因子である。故に、$\overline{S^l(M')} = \overline{S^l(M)} \otimes_{R_0} R'_0$ となる。だから、$\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むことと、$\overline{S^l(M')}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むことは同値である。 **証明終**

補題 4.11 F の標数 $p > 0$ を固定する。さらに、$\beta'/\alpha' < \beta/\alpha \leq 1$ とする。α', β' のとき、$\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むなら、α, β のときも、$\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含む。

証明 補題 4.10 を使い、分子を共通にとり、$\alpha' = \alpha + 1$, $\beta' = \beta$ の場合に証明すればよい。$S \mapsto x^{\alpha+1}$, $T \mapsto y^{\alpha+1}$, $U \mapsto z^{\alpha+1}$, $V \mapsto (xyz)^\beta$ により R_1 から R_0 への R_0-線形写像を定め、その核を M' と書く。$S \mapsto xS$, $T \mapsto yT$, $U \mapsto zU$, $V \mapsto V$ によって定まる R から R への環準同型を Ψ と書く。Ψ は次数を保つ準同型である。

$$\Psi(y^{\alpha+1}S - x^{\alpha+1}T) = xy^{\alpha+1}S - x^{\alpha+1}yT = xy(y^\alpha S - x^\alpha T) \in M$$

や、

$$\Psi(x^{\alpha+1-\beta}V - y^\beta z^\beta S) = x^{\alpha+1-\beta}V - xy^\beta z^\beta S = x(x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S) \in M$$

により、$\Psi(M') \subseteq M$ であり、$\Psi(S^l(M')) \subseteq S^l(M)$ となる。故に、$\Psi(\overline{S^l(M')}) \subseteq \overline{S^l(M)}$ となる。V に関して l 次の monic 多項式の Ψ による像は、V に関して l 次の monic 多項式である。

（このとき、$\overline{S^l(M')}$ が $V^l + g$ $(g \in F[x, y, z, S, T, U])$ の形の元を含めば、$\overline{S^l(M)}$ もそのような形の元を含むことに注意。） **証明終**

命題 4.12 $\mathrm{ch}(F) = 2$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、$\beta/\alpha \geq 1/2$ である。

証明 $\beta \geq \alpha$ のときは、注意 4.4 よりよい。$\beta/\alpha < 1/2$ のときは、補題 4.9 によってわかる。

あと、補題 4.10 と 補題 4.11 により、$\alpha=2, \beta=1$ の場合に、$\overline{S^2(M)}$ が V に関して 2 次の monic 多項式を含むことを示せば充分である。

$xV-yzS\in M$ より、$x^2V^2-y^2z^2S^2\in S^2(M)$ である。また、

$$AB=(y^2S-x^2T)(z^2S-x^2U)=y^2z^2S^2-x^2y^2SU-x^2z^2ST+x^4TU\in S^2(M)$$

であるから、

$$(xV-yzS)^2+AB=x^2V^2-x^2y^2SU-x^2z^2ST+x^4TU\in S^2(M)$$

となり、$V^2-y^2SU-z^2ST+x^2TU\in\overline{S^2(M)}$ となる。 **証明終**

次に、

命題 4.13 $\mathrm{ch}(F)=p\equiv 1\ (6)$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、$\beta/\alpha\geq 2/3$ である。

を、示す。注意 4.4、補題 4.6、補題 4.8、補題 4.10、補題 4.11 とその証明の最後の注意によって、次の二つの補題を示せば、命題 4.13 が示される。

補題 4.14 $\mathrm{ch}(F)=p\equiv 1\ (6)$ 、$\alpha=3, \beta=2$ とする。このとき、$\overline{S^p(M)}$ は V に関して p 次の *monic* 多項式を含む。

補題 4.15 $\mathrm{ch}(F)=p\equiv 1\ (6)$, $\beta/\alpha=2/3$ とする。このとき、任意の自然数 n に対して $\overline{S^{p^n}(M)}$ は、$V^{p^n}+g\quad (g\in F[x,y,z,S,T,U])$ の形の元を含まない。

補題 4.14 の証明　まず、$S^p(N)$ が、

$$y^{2p}z^{2p}S^p+f_jS^{p-j}+(S \text{ に関して } p-j \text{ 次未満}) \tag{1}$$

の形 ($f_j\in F[x,y,z,T,U]$) で、$j\geq (p-1)/3$ を充たすような元を含むことを示す。

$$A^{(p+1)/2}B^{(p-1)/2}=y^{3(p+1)/2}z^{3(p-1)/2}S^p+(S \text{ に関して } p \text{ 次未満})\in S^p(N)$$

であり、$2p>3(p+1)/2$ であるので、確かに $S^p(N)$ は $y^{2p}z^{2p}S^p+(S$ に関して p 次未満$)$ の形の元を含むことがわかる。(1) の形の式で、j が最大となるものの一つを

$$h=y^{2p}z^{2p}S^p+f_iS^{p-i}+(S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満})\in S^p(N)$$

とし、$i < (p-1)/3$ と仮定して矛盾を導く。($(p-1)/3 < p$ であるから、$0 \neq f_i \in F[x,y,z,T,U]$ である。$(p-1)/3$ は偶数であることに注意。) また、h は $\mathbb{Z}^3$-homogeneous としてよい。

このとき、補題 4.7 と同様にして、$f_i = dC^i$ となる $d \in F[x,y,z]$ が存在することがわかる。このとき、$\deg_{\mathbb{Z}^3} C^i S^{p-i} = (3p-3i, 3i, 3i)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} y^{2p}z^{2p}S^p = (3p, 2p, 2p)$ であるから、$f_i = qx^{3i}y^{2p-3i}z^{2p-3i}C^i$ $(q \in F^\times)$ としてよい。($i < (p-1)/3$ より、$2p-3i > 0$) 故に、

$$h = y^{2p}z^{2p}S^p + qx^{3i}y^{2p-3i}z^{2p-3i}C^iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となる。

i が奇数と仮定する。このとき、$p-i$ は偶数で、$2p-3i \geq 3(p-i)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^iA^{(p-i)/2}B^{(p-i)/2} = y^{3(p-i)/2}z^{3(p-i)/2}C^iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、i をもっと大きくとれ、h のとり方に反する。

i が偶数と仮定する。このとき、$p-i$ は奇数で、$2p-3i \geq 3(p-i+1)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^iA^{(p-i+1)/2}B^{(p-i-1)/2} = y^{3(p-i+1)/2}z^{3(p-i-1)/2}C^iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、i をもっと大きくとれ、h のとり方に反する。

以上で、$t = (p-1)/3$ としたとき、$S^p(N)$ の中に、

$$h = y^{2p}z^{2p}S^p + qx^{3t}y^{2p-3t}z^{2p-3t}C^tS^{p-t} + (S \text{ に関して } p-t \text{ 次未満})$$

の形 $(q \in F)$ の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元がとれることがわかった。上の h の第 3 項以下は、S に関して高々 $p-t-1$ 次であることから $x^{3(t+1)} = x^{p+2}$ で割り切れることに注意。(補題 4.15 を使えば、$q \neq 0$ であることがわかるが、ここではそのことは使わない。)

ここで、

$$\begin{aligned} k &= C^tA^tB^t(xV - y^2z^2S) \\ &= C^t(y^3S - x^3T)^t(z^3S - x^3U)^t(xV - y^2z^2S) \\ &= xy^{3t}z^{3t}C^tS^{2t}V - y^{3t+2}z^{3t+2}C^tS^{2t+1} + x^3(V \text{ に関して } 1 \text{ 次以下}) \in S^p(M) \end{aligned}$$

とおき、$3t+1 = p$, $3t+2 = 2p-3t$ であることに注意すれば、

$$qx^{p-1}k = qx^py^{3t}z^{3t}C^tS^{2t}V - qx^{3t}y^{2p-3t}z^{2p-3t}C^tS^{p-t} + x^{p+2}(V \text{ に関して } 1 \text{ 次以下})$$

となる。すると、

$$h+qx^{p-1}k+(xV-y^2z^2S)^p = x^pV^p+qx^py^{3t}z^{3t}C^tS^{2t}V+x^{p+2}(V \text{ に関して 1 次以下}) \in S^p(M)$$

となり、$\overline{S^p(M)}$ は V に関して p 次の monic 多項式を含む。 **証明終**

補題 4.15 の証明 $t=(p^n-1)/3$ とおく。t は偶数であることに注意。

Step 1. まず最初に、$S^{p^n}(N)$ は、

$$y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n}+qx^{\alpha t}y^{\beta p^n-\alpha t}z^{\beta p^n-\alpha t}C^tS^{p^n-t}+(S \text{ に関して } p^n-t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元で、$q \in F^\times$ となるものを含むことを示す。α, β, t のとり方より、$\beta p^n-\alpha t>0$ であることに注意。

$i=0,1,\ldots,t-1$ に対して、

$$H(i)=x^{\alpha i}y^{\beta p^n-\alpha(d_i+i)}z^{\beta p^n-\alpha(e_i+i)}A^{d_i}B^{e_i}C^i$$

とおく。ただし、i が偶数であるときは $d_i=(p^n-i+1)/2$, $e_i=d_i-1$ とし、i が奇数であるときは $d_i=e_i=(p^n-i)/2$ とおく。ここで、$i=0,1,\ldots,t-1$ に対して、$\beta p^n-\alpha(d_i+i)\geq 0$, $\beta p^n-\alpha(e_i+i)\geq 0$ に注意。$H(i)\in S^{p^n}(N)$ は、$\mathbb{Z}^3$-homogeneous で、$\deg_{\mathbb{Z}^3}H(i)=(\alpha p^n,\beta p^n,\beta p^n)$ である。$H(i)$ を展開して、U が出ない項に注目する。

$$[a,b]=x^{\alpha(p^n-a)}y^{\beta p^n-\alpha b}z^{\beta p^n}S^aT^b$$

とおけば、

$$\begin{aligned} H(i) &= x^{\alpha i}y^{\beta p^n-\alpha(d_i+i)}z^{\beta p^n-\alpha(e_i+i)}(y^\alpha S-x^\alpha T)^{d_i}(z^\alpha S-x^\alpha U)^{e_i}(z^\alpha T-y^\alpha U)^i \\ &= \sum_{j=0}^{d_i}(-1)^j\binom{d_i}{j}[d_i-j+e_i,i+j]+(U \text{ が出てくる項}) \end{aligned}$$

となる。ここで、$d_i-j+e_i=p^n-i-j$ に注意。

今、F の元 $c_0,\ldots,c_{t-1}$ があって、

$$H=\sum_{i=0}^{t-1}c_iH(i)=[p^n,0]+q[p^n-t,t]+\sum_{l>t}q_l[p^n-l,l]+(U \text{ が出てくる項})$$

と書け、$q\in F^\times$, $q_{t+1},\ldots\in F$ となったとする。H の $S^{p^n-t}T^t$ の係数は 0 ではないので、

$$H=y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n}+q'x^{\alpha i}y^{\beta p^n-\alpha i}z^{\beta p^n-\alpha i}C^iS^{p^n-i}+(S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満})$$

$(q'\in F^\times,\ 1\leq i\leq t)$ と書ける。しかし、H のとり方より、$1\leq i<t$ のとき、$S^{p^n-i}T^i$ の係数は 0 であるから、$i=t$ である。

故に、Step 1 の証明を完成させるためには、

$$H'(i) = \sum_{j=0}^{d_i} (-1)^j \binom{d_i}{j} [p^n - i - j, i + j]$$

とおいたとき、F の元 $c_0, \ldots, c_{t-1}$ があって、

$$\sum_{i=0}^{t-1} c_i H'(i) = [p^n, 0] + q[p^n - t, t] + \sum_{l>t} q_l [p^n - l, l]$$

$(q' \in F^\times,\ q_{t+1} \ldots \in F)$ と書ければよい。

$$\sum_{i=0}^{t-1} c_i H'(i) = \sum_{l=0}^{p^n} k_l [p^n - l, l]$$

とすれば、

$$\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{d_0}{0} & 0 & & & \text{\Large 0} \\ -\binom{d_0}{1} & \binom{d_1}{0} & 0 & & \\ \binom{d_0}{2} & -\binom{d_1}{1} & \binom{d_2}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ (-1)^t \binom{d_0}{t} & (-1)^{t-1} \binom{d_1}{t-1} & (-1)^{t-2} \binom{d_2}{t-2} & \ldots & -\binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{t-1} \end{pmatrix}$$

である。だから、上の行列の第 2 行目から第 $t+1$ 行目までの t 次正方行列が正則であればよい。この t 次正方行列の奇数行に -1 をかけ、偶数行に -1 をかければ、

$$\begin{pmatrix} \binom{d_0}{1} & \binom{d_1}{0} & 0 & & \text{\Large 0} \\ \binom{d_0}{2} & \binom{d_1}{1} & \binom{d_2}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_0}{t} & \binom{d_1}{t-1} & \binom{d_2}{t-2} & \ldots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$d_{t-1} = \frac{p^n + 2}{3} > \frac{p^n - 1}{3} = t$$

に注意。また、定義より、$d_i - d_{i+1}$ は 0 または 1 であるから、この行列を基本変形して、

$$\begin{pmatrix} \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & 0 & & \text{\Large 0} \\ \binom{d_{t-1}}{2} & \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_{t-1}}{t} & \binom{d_{t-1}}{t-1} & \binom{d_{t-1}}{t-2} & \ldots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

となる。

Giambelli's identity ([4]) によって、G を d_{t-1} 次元の $\mathbb{C}$-vector space としたときこの行列式は $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Sym}^t G = \binom{2t}{t}$ と等しい。($d_{t-1}+t-1=2t$ に注意)

故に、あと $\binom{2t}{t}$ が p で割り切れないことを示せば充分である。

$$\binom{2t}{t} = \frac{(t+1)(t+2)\cdots 2t}{1\cdot 2\cdots t}$$

で、$2t \leq p^n$ であるから、$l=1,2,\ldots,n-1$ に対して、$\{1,2,\ldots,t\}$ と $\{t+1,t+2,\ldots,2t\}$ の中の p^l の倍数の個数が等しければよい。$t=(p^n-1)/3 \not\equiv 0\ (p)$ より、$sp^l < t < (s+1)p^l$ とおく。$t=(p^n-p^l)/3+(p^l-1)/3$ であり、$(p^n-p^l)/3$ は p^l で割り切れ、$0<(p^l-1)/3<p^l$ であるから、$t-sp^l = (p^l-1)/3$ となり、$2t-2sp^l = 2(p^l-1)/3 < p^l$ であるから、$2sp^l < 2t < (2s+1)p^l$ となる。故に、$\{1,2,\ldots,t\}$ と $\{t+1,t+2,\ldots,2t\}$ の中の p^l の倍数の個数は共に s である。

これで、Step 1 の証明は完了した。

Step 2. 補題 4.15 の証明に戻る。$V^{p^n}+g \in \overline{S^{p^n}(M)}$ を充す $g \in F[x,y,z,S,T,U]$ が存在したとする。$V^{p^n}+g$ は $\mathbb{Z}^3$-homogeneous としてよい。

$x^{\alpha-\beta}V - y^{\beta}z^{\beta}S \in M$ より、$x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} - y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} \in S^{p^n}(M)$ となる。$x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n}g \in \overline{S^{p^n}(M)}$ であるから

$$y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n}g \in \overline{S^{p^n}(M)} \cap F[x,y,z,S,T,U] = S^{p^n}(N)$$

となる。

また Step 1 より、$S^{p^n}(N)$ は、

$$y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} + qx^{\alpha t}y^{\beta p^n-\alpha t}z^{\beta p^n-\alpha t}C^tS^{p^n-t} + (S \text{ に関して } p^n-t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元で、$q \in F^{\times}$ となるものを含む。故に、

$$G = x^{(\alpha-\beta)p^n}g - qx^{\alpha t}y^{\beta p^n-\alpha t}z^{\beta p^n-\alpha t}C^tS^{p^n-t} + (S \text{ に関して } p^n-t \text{ 次未満}) \in S^{p^n}(N)$$

となる。$(\alpha-\beta)p^n > \alpha t$ であるから、g の S に関する次数は p^n-t 未満である。だから、$G \neq 0$ である。また、G は、$\deg_{\mathbb{Z}^3}G = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元であるので、

$$G = \sum_{\substack{i+j+k=p^n \\ \alpha(i+k)\leq\beta p^n \\ \alpha(j+k)\leq\beta p^n}} d_{ijk}x^{\alpha p^n-\alpha(i+j)}y^{\beta p^n-\alpha(i+k)}z^{\beta p^n-\alpha(j+k)}A^iB^jC^k \tag{2}$$

$(d_{ijk} \in F)$ と書ける。

一般に上のように $S^{p^n}(N)$ の元を表示したとき、それぞれの k に対し、$d_{ijk} \neq 0$ となる (i,j,k) の組は、高々一つとしてよい。(そのことを、k に関する帰納法で示す。$k \geq 0$ に対して、$d_{i_1 j_1 k} \neq 0$, $d_{i_2 j_2 k} \neq 0$ とする。ここで、$i_1 + j_1 + k = i_2 + j_2 + k = p^n$, $\alpha(i_1+k) \leq \beta p^n$, $\alpha(i_2+k) \leq \beta p^n$, $\alpha(j_1+k) \leq \beta p^n$, $\alpha(j_2+k) \leq \beta p^n$, $0 \leq i_1 < i_2$ とおく。このとき、$j_1 > j_2 \geq 0$ である。$i_3 = i_1 + 1$, $j_3 = j_1 - 1$ とおく。このとき、$i_3 + j_3 + k = p^n$, $\alpha(i_3+k) \leq \beta p^n$, $\alpha(j_3+k) \leq \beta p^n$ となる。$z^\alpha A - y^\alpha B + x^\alpha C = 0$ に $A^{i_1}B^{j_3}C^k$ をかけると、$z^\alpha A^{i_3}B^{j_3}C^k - y^\alpha A^{i_1}B^{j_1}C^k + x^\alpha A^{i_1}B^{j_3}C^{k+1} = 0$ であり、$z^\alpha A^{i_3}B^{j_3}C^k$, $y^\alpha A^{i_1}B^{j_1}C^k$, $x^\alpha A^{i_1}B^{j_3}C^{k+1}$ は、$\mathbb{Z}^3$-grading が $(\alpha(i_3+j_3), \alpha(i_3+k), \alpha(j_1+k))$ の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元である。ここで、$\alpha(i_3+j_3) \leq \alpha p^n$, $\alpha(i_3+k) \leq \beta p^n$, $\alpha(j_1+k) \leq \beta p^n$ に注意して、G を、

$$G + d_{i_1 j_1 k} x^{\alpha p^n - \alpha(i_3+j_3)} y^{\beta p^n - \alpha(i_3+k)} z^{\beta p^n - \alpha(j_1+k)} \left(z^\alpha A^{i_3}B^{j_3}C^k - y^\alpha A^{i_1}B^{j_1}C^k + x^\alpha A^{i_1}B^{j_3}C^{k+1} \right)$$

で置き換えれば、$d_{i_1 j_1 k} = 0$ としてよい。これを繰り返せばよい。)

故に、式 (2) の G の表示において、それぞれの k に対し $d_{ijk} \neq 0$ となる (i,j,k) の組は、高々一つとする。$k_1 = \min\{k \geq 0 \mid d_{ijk} \neq 0$ となる i, j が存在する $\}$ とおく。$G \neq 0$ であるから、k_1 は定まる。$d_{i_1 j_1 k_1} \neq 0$ とする。このとき、G の S に関する次数は $i_1 + j_1$ である。故に、$i_1 + j_1 = p^n - t$ である。だから、$k_1 = t$ となる。$p^n - t$ は奇数であるから、i_1 と j_1 のどちらかは $(p^n - t + 1)/2$ 以上である。$i_1 \geq (p^n - t + 1)/2$ とすれば、$i_1 + t \geq (p^n + t + 1)/2$ となる。しかし、簡単な計算により、

$$\beta p^n - \alpha(i_1 + t) < 0$$

となってしまい、k_1 のとり方に反する。 **証明終**

これで、命題 4.13 は証明された。

次に、$p \equiv 5$ (6) の場合を考える。

命題 4.16 $\mathrm{ch}(F) = p \equiv 5$ (6) とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、$\beta/\alpha \geq (2p-1)/3p$ である。

証明 まず最初に、$\beta/\alpha \geq (2p-1)/3p$ のとき、$\overline{S^p(M)}$ が V に関して p 次の monic 多項式を含むことを示す。$\beta \geq \alpha$ であれば、注意 4.4 よりよい。$\alpha > \beta$ とする。補題 4.10 と補題 4.11 により、$\beta/\alpha = (2p-1)/3p$ の場合に示せば充分である。

$t = (p+1)/3$ とおく。t は、偶数であることに注意。

まず、$S^p(N)$ が、

$$y^{\beta p} z^{\beta p} S^p + f_j S^{p-j} + (S \text{ に関して } p-j \text{ 次未満}) \tag{3}$$

の形 $(f_j \in F[x,y,z,T,U])$ で、$j \geq t$ となる元を含むことを示す。

$$A^{(p+1)/2}B^{(p-1)/2} = y^{\alpha(p+1)/2}z^{\alpha(p-1)/2}S^p + (S \text{ に関して } p \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

であり、$\beta p \geq \alpha(p+1)/2$ に注意すれば、$S^p(N)$ は $y^{\beta p}z^{\beta p}S^p + (S$ に関して p 次未満) の形の元を含むことがわかる。(3) の形の式で、j が最大となるものの一つを

$$h = y^{\beta p}z^{\beta p}S^p + f_iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

とし、$i < t$ と仮定して矛盾を導く。($t < p$ であるから、$0 \neq f_i \in F[x,y,z,T,U]$ である。) また、h は $\mathbb{Z}^3$-homogeneous としてよい。

このとき、$f_i = qx^{\alpha i}y^{\beta p-\alpha i}z^{\beta p-\alpha i}C^i$ $(q \in F^\times)$ としてよい。($i < t$ より、$\beta p - \alpha i > 0$) 故に、

$$h = y^{\beta p}z^{\beta p}S^p + qx^{\alpha i}y^{\beta p-\alpha i}z^{\beta p-\alpha i}C^iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となる。

i が奇数と仮定する。このとき、$p-i$ は偶数で、$\beta p - \alpha i \geq \alpha(p-i)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^iA^{(p-i)/2}B^{(p-i)/2} = y^{\alpha(p-i)/2}z^{\alpha(p-i)/2}C^iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、i をもっと大きくとれ、h のとり方に反する。

i が偶数と仮定する。このとき、$p-i$ は奇数で、$\beta p - \alpha i \geq \alpha(p-i+1)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^iA^{(p-i+1)/2}B^{(p-i-1)/2} = y^{\alpha(p-i+1)/2}z^{\alpha(p-i-1)/2}C^iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、i をもっと大きくとれ、h のとり方に反する。

以上で、$S^p(N)$ の中に、

$$h = y^{\beta p}z^{\beta p}S^p + qx^{\alpha t}y^{\beta p-\alpha t}z^{\beta p-\alpha t}C^tS^{p-t} + (S \text{ に関して } p-t \text{ 次未満})$$

の形 $(q \in F)$ の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元がとれることがわかった。

$x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S \in M$ より、

$$\begin{aligned} & (x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S)^p + h \\ = \ & x^{(\alpha-\beta)p}V^p + qx^{\alpha t}y^{\beta p-\alpha t}z^{\beta p-\alpha t}C^tS^{p-t} + (V \text{ が出ず } S \text{ に関して } p-t \text{ 次未満}) \in S^p(M) \end{aligned}$$

であり、この第二項以下は、$x^{\alpha t}$ で割り切れることがわかる。ここで、$\alpha t = (\alpha - \beta)p$ であるから、$\overline{S^p(M)}$ が V に関して p 次の monic 多項式を含むことがわかる。

次に、逆を示す。

2 以上の自然数 n と、$\beta/\alpha < (2p-1)/3p$ を充たす α, β が存在して、$V^{p^n} + g \in \overline{S^{p^n}(M)}$ ($g \in F[x,y,z,S,T,U]$) と仮定する。$V^{p^n} + g$ は、$\mathbb{Z}^3$-homogeneous としてよい。(補題 4.6 と補題 4.8 を使えば、V に関する monic 多項式はこのような形としてよい。)

$$\frac{2}{3} > \frac{2p-1}{3p} = \frac{2p^n - p^{n-1}}{3p^n} > \frac{2p^n - p^{n-1} - 3}{3p^n}$$

であるから、補題 4.10 と補題 4.11 により、

$$\frac{2p-1}{3p} > \beta/\alpha > \frac{2p^n - p^{n-1} - 3}{3p^n}$$

としてよい。ここで、$t = (p^n - 2p^{n-1} - 3)/3$ と置き換える。t は偶数であり、$0 < t < p^n$ となる。($t > 0$ とするために、$n \geq 2$ と仮定した。)

まず、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、$S^{p^n}(N)$ が、

$$y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + q x^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元で、$q \in F^\times$ となるものを含むことを示す。(α, β, t のとり方より、$\beta p^n - \alpha t > 0$ である。)

$i = 0, 1, \ldots, t-1$ に対して、

$$H(i) = x^{\alpha i} y^{\beta p^n - \alpha(d_i + i)} z^{\beta p^n - \alpha(e_i + i)} A^{d_i} B^{e_i} C^i$$

とおいて補題 4.15 の Step 1 と同様な議論をする。(ここで、i が偶数であるときは $d_i = (p^n - i + 1)/2$, $e_i = d_i - 1$ とし、i が奇数であるときは $d_i = e_i = (p^n - i)/2$ とする。) $i = 0, 1, \ldots, t-1$ に対して、$\beta p^n - \alpha(d_i + i) \geq 0$, $\beta p^n - \alpha(e_i + i) \geq 0$ に注意。

ここで、

$$d_{t-1} = \frac{p^n + p^{n-1} + 3}{3} > t$$

であるから、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、次の正方行列が正則であることを示せばよい。

$$\begin{pmatrix} \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & 0 & & 0 \\ \binom{d_{t-1}}{2} & \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_{t-1}}{t} & \binom{d_{t-1}}{t-1} & \binom{d_{t-1}}{t-2} & \cdots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

Giambelli's identity より、この行列式は、$\binom{d_{t-1}+t-1}{t}$ と等しい。

$$e = d_{t-1} + t - 1 = \frac{2p^n - p^{n-1} - 3}{3}$$

とおく。$\binom{e}{t}$ が p で割り切れないことを示す。

$e = (2p^n - p^{n-1} - 3)/3 < p^n$ であるから、$l = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して、$\{1, 2, \ldots, t\}$ と $\{e-t+1, e-t+2, \ldots, e\}$ の中の p^l の倍数の個数が等しければよい。それは、

$$e - t = \frac{p^n + p^{n-1}}{3} \equiv 0 \ \ (p^{n-1})$$

であることから直ちにわかる。

命題 4.16 の証明に戻る。

$\overline{S^{p^n}(M)} \ni V^{p^n} + g$ であった。$x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S \in M$ より、$x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} - y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} \in S^{p^n}(M)$ であるから、$y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n} g \in S^{p^n}(N)$ となる。$S^{p^n}(N)$ が、

$$y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + q x^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元で、$q \in F^\times$ となるものを含むことより、

$$G = x^{(\alpha-\beta)p^n} g - q x^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満}) \in S^{p^n}(N)$$

となる。$(\alpha - \beta)p^n > \alpha t$ であるから、g の S に関する次数は $p^n - t$ 未満としてよい。だから、$G \neq 0$ である。また、G は、$\deg_{\mathbb{Z}^3} G = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元であるので、

$$G = \sum_{\substack{i+j+k=p^n \\ \alpha(i+k) \leq \beta p^n \\ \alpha(j+k) \leq \beta p^n}} d_{ijk} x^{\alpha p^n - \alpha(i+j)} y^{\beta p^n - \alpha(i+k)} z^{\beta p^n - \alpha(j+k)} A^i B^j C^k$$

$(d_{ijk} \in F)$ と書ける。補題 4.15 の Step 2 と同様にして、それぞれの k に対し、$d_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) の組は、高々一つとしてよい。$k_1 = \min\{k \geq 0 \mid d_{ijk} \neq 0$ となる i, j が存在する$\}$ とおく。$G \neq 0$ であるから、k_1 は定まる。$d_{i_1 j_1 k_1} \neq 0$ とする。このとき、G の S に関する次数は $i_1 + j_1$ である。故に、$i_1 + j_1 = p^n - t$ である。だから、$k_1 = t$ である。$p^n - t$ は奇数であるから、i_1 と j_1 のどちらかは $(p^n - t + 1)/2$ 以上である。$i_1 \geq (p^n - t + 1)/2$ とすれば、$i_1 + t \geq (p^n + t + 1)/2$ となる。しかし、簡単な計算により、

$$\beta p^n - \alpha(i_1 + t) < 0$$

となってしまい、k_1 のとり方に反する。 **証明終**

最後に、$p = 3$ の場合を考える。

命題 4.17 $\mathrm{ch}(F) = 3$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、$\beta/\alpha \geq 2/3$ である。

証明 最初に、$\beta/\alpha \geq 2/3$ のとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むことを見る。$\beta \geq \alpha$ であれば、注意 4.4 よりよい。$\alpha > \beta$ とする。補題 4.10 と 補題 4.11 により、$\alpha = 3, \beta = 2$ の場合に示せば充分である。そのときは、

$$(xV - y^2z^2S)^3 + z^3A^2B = x^3V^3 + x^3(V \text{ が出てこない})$$

と書けることより $\overline{S^3(M)}$ は V に関して 3 次の monic 多項式を含むことがわかる。

次に、逆を示す。

2 以上の自然数 n と、$\beta/\alpha < 2/3$ を充す α, β が存在して、$V^{3^n} + g \in \overline{S^{3^n}(M)}$ $(g \in F[x,y,z,S,T,U])$ とする。$V^{3^n}+g$ は、$\mathbb{Z}^3$-homogeneous としてよい。補題 4.10 と補題 4.11 により、

$$\frac{2}{3} > \beta/\alpha > \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{3^n}$$

としてよい。ここで、$t = 3^{n-1} - 1$ とおく。t は偶数である。($n \geq 2$ であるから $t > 0$ である。)

まず、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、$S^{3^n}(N)$ が、

$$y^{\beta 3^n} z^{\beta 3^n} S^{3^n} + q x^{\alpha t} y^{\beta 3^n - \alpha t} z^{\beta 3^n - \alpha t} C^t S^{3^n - t} + (S \text{ に関して } 3^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元で、$q \in F^\times$ となるものを含むことを示す。(α, β, t のとり方より、$\beta 3^n - \alpha t > 0$ である。)

$i = 0, 1, \ldots, t-1$ に対して、

$$H(i) = x^{\alpha i} y^{\beta 3^n - \alpha(d_i + i)} z^{\beta 3^n - \alpha(e_i + i)} A^{d_i} B^{e_i} C^i$$

とおいて補題 4.15 の Step 1 と同様をする。(i が偶数であるときは $d_i = (3^n - i + 1)/2$, $e_i = d_i - 1$ とし、i が奇数であるときは $d_i = e_i = (3^n - i)/2$ とする。) ここで、$\beta 3^n - \alpha(d_i + i) \geq 0$, $\beta 3^n - \alpha(e_i + i) \geq 0$ に注意。

ここで、

$$d_{t-1} = 3^{n-1} + 1 > t$$

であるから、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、次の正方行列が正則であることを示せば

よい。

$$\begin{pmatrix} \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & 0 & & 0 \\ \binom{d_{t-1}}{2} & \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_{t-1}}{t} & \binom{d_{t-1}}{t-1} & \binom{d_{t-1}}{t-2} & \cdots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

Giambelli's identity より、この行列式は、$\binom{d_{t-1}+t-1}{t}$ と等しい。

$$e = d_{t-1} + t - 1 = 2{\cdot}3^{n-1} - 1$$

とおく。$\binom{e}{t}$ が 3 で割り切れないことを示す。

$e < 3^n$ であるから、$l = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して、$\{1, 2, \ldots, t\}$ と $\{e-t+1, e-t+2, \ldots, e\}$ の中の 3^l の倍数の個数が等しければよい。それは、

$$e - t = 3^{n-1}$$

であることから直ちにわかる。

命題 4.17 の証明に戻る。

$\overline{S^{3^n}(M)} \ni V^{3^n} + g$ であった。$x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S \in M$ より、$x^{(\alpha-\beta)3^n}V^{3^n} - y^{\beta 3^n}z^{\beta 3^n}S^{3^n} \in S^{3^n}(M)$ であるから、$y^{\beta 3^n}z^{\beta 3^n}S^{3^n} + x^{(\alpha-\beta)3^n}g \in S^{3^n}(N)$ となる。$S^{3^n}(N)$ が、

$$y^{\beta 3^n}z^{\beta 3^n}S^{3^n} + qx^{\alpha t}y^{\beta 3^n-\alpha t}z^{\beta 3^n-\alpha t}C^tS^{3^n-t} + (S \text{ に関して } 3^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元で、$q \in F^\times$ となるものを含むことより、

$$G = x^{(\alpha-\beta)3^n}g - qx^{\alpha t}y^{\beta 3^n-\alpha t}z^{\beta 3^n-\alpha t}C^tS^{3^n-t} + (S \text{ に関して } 3^n - t \text{ 次未満}) \in S^{3^n}(N)$$

となる。$(\alpha-\beta)3^n > \alpha t$ であるから、g の S に関する次数は $3^n - t$ 未満としてよい。だから、$G \neq 0$ である。また、G は、$\deg_{\mathbb{Z}^3} G = (\alpha 3^n, \beta 3^n, \beta 3^n)$ である $\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元であるので、

$$G = \sum_{\substack{i+j+k=3^n \\ \alpha(i+k)\leq\beta 3^n \\ \alpha(j+k)\leq\beta 3^n}} d_{ijk}x^{\alpha 3^n-\alpha(i+j)}y^{\beta 3^n-\alpha(i+k)}z^{\beta 3^n-\alpha(j+k)}A^iB^jC^k$$

$(d_{ijk} \in F)$ と書ける。補題 4.15 の Step 2 と同様にして、それぞれの k に対し、$d_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) の組は、高々一つとしてよい。$k_1 = \min\{k \geq 0 \mid d_{ijk} \neq 0$ となる i, j が存在する$\}$ とおく。$G \neq 0$ であるから、k_1 は定まる。$d_{i_1j_1k_1} \neq 0$ とする。このとき、G の S に関す

る次数は i_1+j_1 である。故に、$i_1+j_1=3^n-t$ である。だから、$k_1=t$ である。3^n-t は奇数であるから、i_1 と j_1 のどちらかは $(3^n-t+1)/2$ 以上である。$i_1 \geq (3^n-t+1)/2$ とおけば、$i_1+t \geq (3^n+t+1)/2$ となる。しかし、簡単な計算により、

$$\beta 3^n - \alpha(i_1+t) < 0$$

となってしまい、k_1 のとり方に反する。 **証明終**

命題 4.12, 命題 4.13, 命題 4.16, 命題 4.17 を合わせて 定理 4.5 を得る。

5 $\alpha=2, \beta=1$ の場合

$\alpha=2, \beta=1$ の場合 (Roberts の記号で $t=1$ の場合) は、$\mathrm{ch}(F)=2$ の場合は、命題 4.2 によって $\overline{S(M)}$ は Noether 環となることがわかるが、それ以外では、section 2, section 3 の判定法は使えないし、$\mathrm{ch}(F)=0$ の場合も Roberts の証明も有効には働かない。

この最後の section で、$\alpha=2, \beta=1$ の場合に、$\overline{S(M)}$ が Noether 環であることを示す。

命題 5.1 $\alpha=2, \beta=1$ とする。このとき、任意の体 F 上で、$\overline{S(M)}$ は *Noether* 環である。

証明 $\mathrm{ch}(F)=2$ の場合は、命題 4.12 によって $\overline{S(M)}$ は Noether 環となることがわかる。

$\mathrm{ch}(F) \neq 2$ と仮定する。

$$\begin{aligned}
A &= y^2S - x^2T \\
B &= z^2S - x^2U \\
C &= z^2T - y^2U \\
D &= xV - yzS \\
E &= yV - xzT \\
F &= zV - xyU \\
G &= xV^2 - 2yzSV + xz^2ST + xy^2SU - x^3TU \\
H &= yV^2 - 2xzTV + yz^2ST - y^3SU + x^2yTU \\
I &= zV^2 - 2xyUV - z^3ST + y^2zSU + x^2zTU
\end{aligned}$$

とおき、$\overline{S(M)} = R_0[A,B,C,D,E,F,G,H,I]$ を示す。

まず、

$$\begin{aligned} xG &= D^2 - AB \\ yH &= E^2 + AC \\ zI &= F^2 - BC \end{aligned}$$

であるから、$G, H, I \in \overline{S^2(M)}$ となる。

この状況で、次を示す。

補題 5.2 *q, t を $q \geq t \geq 0$ を充す整数とする。$K_0V^t + K_1V^{t-1} + \cdots + K_t \in \overline{S^q(M)}$ $(K_0, \ldots, K_t \in F[x, y, z, S, T, U])$ が、$\mathbb{Z}^3$-homogeneous とする。このとき、*

$$K_0 = \sum_{i+j+k=q-t} d_{ijk} A^i B^j C^k$$

$(d_{ijk} \in R_0)$ と書け、すべての i, j, k に対して、$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} d_{ijk} \geq [(t+1)/2]$ となる。

証明 上の状況で、

$$\gamma(K_0V^t + K_1V^{t-1} + \cdots + K_t) = \delta(K_0)\gamma(V)^t + \delta(K_1)\gamma(V)^{t-1} + \cdots + \delta(K_t)$$

には S' が出ないので、$\delta(K_0)$ には S' は出ず、$K_0 \in S^{q-t}(N)$ となることは容易にわかる。故に、$K_0 = \sum_{i+j+k=q-t} d_{ijk} A^i B^j C^k$ $(d_{ijk} \in R_0)$ と書ける。

補題を t に関する帰納法で示す。

$t = 0$ の場合は、$\overline{S^q(M)} \cap F[x, y, z, S, T, U] = S^q(N)$ より、直ちにわかる。

これが成立しないような最小の $t > 0$ をもってくる。

最初に、その t が偶数であるときを考える。$t = 2l$ $(l \geq 1)$ とおく。このとき、$[(t+1)/2] = l$ に注意。仮定より、$q \geq 2l$ を充す自然数と、$\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元

$$L_1 = K_0V^{2l} + \sum_{i=1}^{2l} K_i V^{2l-i} \in \overline{S^q(M)}$$

$(K_0, \ldots, K_{2l} \in F[x, y, z, S, T, U])$ が存在して、$K_0 = \sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk} A^i B^j C^k \neq 0$ と書け、$d_{ijk} \in R_0$ は $\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} d_{ijk} = l - 1$ を充す斉次式であるとしてよい。

$$\sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \in \overline{S^{q-2}(M)}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk}(G,H,I)A^iB^jC^k \right) G \\ &= xK_0V^{2l} + \cdots \in \overline{S^q(M)} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$L_3 = xL_1 = xK_0V^{2l} + \sum_{i=1}^{2l} xK_iV^{2l-i} \in \overline{S^q(M)}$$

とおく。

ここで、$L_2 \neq L_3$ と仮定する。$L_3 - L_2$ の V に関する次数を a とする。ここで、$0 \leq a < 2l$ である。また、$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3}(L_3 - L_2) = 4q - l$ である。$L_3 - L_1$ の V^a の係数は $S^{q-a}(N)$ の元であることと、t の最小性より、

$$4q - l \geq [(a+1)/2] + 4(q-a) + 3a$$

となり、これより、$a > 2l - 1$ となって矛盾する。故に、$L_2 = L_3$ である。特に、L_2 は x で割り切れる。だから、$\sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk}(G,H,I)A^iB^jC^k$ が x で割り切れる。補題 4.15 の Step 2 の中で証明したように、$z^2A - y^2B + x^2B = 0$ であることと、K_0 が $\mathbb{Z}^3$-homogeneous であることに注意すれば、

$$K_0 = x^{\xi}\left(mA^{i_0}B^{j_0}C^{k_0} + x(\cdots)\right)$$

の形としてよい。ただし、$j_0 + j_0 + k_0 = q - 2l$ であり、$m = by^{m_1}z^{m_2}$ $(b \in F^{\times}, \xi + m_1 + m_2 = l - 1)$ とする。G^{ξ} は x で割れないので、

$$bH^{m_1}I^{m_2}A^{i_0}B^{j_0}C^{k_0} + G(\cdots)$$

が x で割れる。しかし、この式の V に関する定数項は、$\mathrm{mod}(x)$ で、

$$b(yz^2ST - y^3SU)^{m_1}(-z^3ST + y^2zSU)^{m_2}(y^2S)^{i_0}(z^2S)^{j_0}(z^2T - y^2U)^{k_0}$$

であり、これは x で割れない。

次に、t が奇数であるときを考える。$t = 2l+1$ $(l \geq 0)$ とおく。このとき、$[(t+1)/2] = l+1$ である。

仮定より、$q \geq 2l + 1$ を充す自然数と、$\mathbb{Z}^3$-homogeneous な元

$$L_4 = K_0V^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l+1} K_iV^{2l+1-i} \in \overline{S^q(M)}.$$

$(K_0, \ldots, K_{2l+1} \in F[x, y, z, S, T, U])$ が存在して、$K_0 = \sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk} A^i B^j C^k \neq 0$ と書け、$d_{ijk} \in R_0$ は $\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} d_{ijk} = l$ を充す斉次式であるとしてよい。

$$\begin{aligned} L_5 &= \sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \\ &= K_0 V^{2l} + \sum_{i=1}^{2l} K_i' V^{2l-i} \in \overline{S^{q-1}(M)} \end{aligned}$$

とし $(K_i' \in F[x, y, z, S, T, U])$ 、

$$\begin{aligned} L_6 &= (xV - yzS) L_5 \\ &= x K_0 V^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l} x K_i' V^{2l+1-i} - yzS \left(\sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right) \in \overline{S^q(M)} \end{aligned}$$

とおく。さらに、

$$L_7 = x L_4 = x K_0 V^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l+1} x K_i V^{2l+1-i} \in \overline{S^q(M)}$$

とおく。このとき、

$$L_7 - L_6 = \sum_{i=1}^{2l+1} x K_i V^{2l+1-i} - \sum_{i=1}^{2l} x K_i' V^{2l+1-i} + yzS \left(\sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right)$$

であり、この式の V に関する次数は $2l$ 以下である。

最初に $L_6 = L_7$ の場合を考える。このとき、L_5 は、x で割り切れることになる。このとき、t が偶数のときと同様にして、

$$K_0 = x^{\xi} \left(m A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + x(\cdots) \right)$$

の形としてよい。ただし、$i_0 + j_0 + k_0 = q - 2l - 1$ であり、$m = b y^{m_1} z^{m_2}$ $(b \in F^{\times}, \xi + m_1 + m_2 = l)$ とする。G^{ξ} は x で割れないので、

$$b H^{m_1} I^{m_2} A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + G(\cdots)$$

が x で割れる。しかし、この式の V に関する定数項は $\mathrm{mod}(x)$ で

$$b(yz^2ST - y^3SU)^{m_1}(-z^3ST + y^2zSU)^{m_2}(y^2S)^{i_0}(z^2S)^{j_0}(z^2T - y^2U)^{k_0}$$

であり、これは x で割れない。

次に、$L_7 - L_6 \neq 0$ と仮定する。$L_7 - L_6$ の V に関する次数を a_1 とする。ここで、$0 \leq a_1 \leq 2l$ である。また、$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3}(L_7 - L_6) = 4q - l$ である。$L_7 - L_6$ の V^{a_1} の係数は $S^{q-a_1}(N)$ の元であることと t の最小性より

$$4q - l \geq [(a_1 + 1)/2] + 4(q - a_1) + 3a_1$$

となり、これより $a_1 > 2l - 1$ であるから、$a_1 = 2l$ でなければならない。

$$L_7 - L_6 = \sum_{i=0}^{2l} J_i V^{2l-i} \in \overline{S^q(M)}$$

とおく。ここで、$J_i \in F[x, y, z, S, T, U]$ であり、$J_0 \neq 0$ であるから、

$$J_0 = \sum_{i+j+k=q-2l} e_{ijk} A^i B^j C^k \in S^{q-2l}(N)$$

としてよい。ここで、$e_{ijk} \in R_0$ で、$\mathrm{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} e_{ijk} = l$ であることがわかる。さらに、

$$\begin{aligned} L_8 &= \sum_{i+j+k=q-2l} e_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \\ &= J_0 V^{2l} + (V \text{ に関して } 2l \text{ 次未満}) \in \overline{S^q(M)} \end{aligned}$$

とおく。$L_7 - L_6 - L_8$ の V に関する次数は $2l$ 未満である。$L_7 - L_6 - L_8 \neq 0$ と仮定して、V に関する次数を a_2 とおけば、$0 \leq a_2 < 2l$ であり、t の最小性の仮定より、

$$4q - l \geq [(a_2 + 1)/2] + 4(q - a_2) + 3a_2$$

となり、$a_2 > 2l - 1$ となってしまう。故に、$L_7 - L_6 = L_8$ である。だから、

$$L_9 = yzS \left(\sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right)$$

とおいたとき、$L_8 - L_9$ は x で割り切れる。

t が偶数の場合の同様にして、

$$K_0 = x^{\xi} \left(m A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + x(\cdots) \right)$$

の形としてよい。ただし、$j_0 + j_0 + k_0 = q - 2l - 1$ であり、$m = b y^{m_1} z^{m_2}$ $(b \in F^{\times}, \xi + m_1 + m_2 = l)$ とする。さらに、

$$J_0 = x^{\zeta} \left(n A^{i_1} B^{j_1} C^{k_1} + x(\cdots) \right)$$

の形としてよい。ただし、$i_1+j_1+k_1=q-2l$ であり、$n=cy^{n_1}z^{n_2}$ $(c\in F^\times, \zeta+n_1+n_2=l)$ とする。

L_9 を V に関して整理する。L_9 の中から、x で割り切れないものが出てくる可能性があるのは、$V^\xi, V^{\xi+1}, \ldots, V^{2l-\xi}$ の係数である。ただし、$\xi<l$ の場合は、V^ξ と $V^{2l-\xi}$ の係数に、必ず x で割り切れないものが出てくる。

また、L_8 を V に関して整理したとき、L_8 の中から、x で割り切れないものが出てくる可能性があるのは、$V^\zeta, V^{\zeta+1}, \ldots, V^{2l-\zeta}$ の係数である。ただし、$\zeta<l$ の場合は、V^ζ と $V^{2l-\zeta}$ の係数に、必ず x で割り切れないものが出てくる。

このことから、$\xi=\zeta$ がわかる。

$\xi=l$ と $\xi<l$ の二つの場合に分けて考える。

$\xi=l$ のとき。このとき、$K_0=bx^lA^{i_0}B^{j_0}C^{k_0}$, $J_0=cx^lA^{i_1}B^{j_1}C^{k_1}$ である。ここで、$b,c\in F^\times$, $i_0+j_0+k_0=q-2l-1$, $i_1+j_1+k_1=q-2l$ である。すると、

$$\begin{aligned}
L_9 &= byzSG^lA^{i_0}B^{j_0}C^{k_0}\\
&\equiv byzS(-2yzSV)^l(y^2S)^{i_0}(z^2S)^{j_0}(z^2T-y^2U)^{k_0} \bmod(x)\\
L_8 &= cG^lA^{i_1}B^{j_1}C^{k_1}\\
&\equiv c(-2yzSV)^l(y^2S)^{i_1}(z^2S)^{j_1}(z^2T-y^2U)^{k_1} \bmod(x)
\end{aligned}$$

となり、$L_9\not\equiv L_8 \bmod(x)$ であることがわかる。

$\xi<l$ のとき。L_9 の $V^{2l-\xi}$ の係数は $\mathrm{mod}(x)$ で、

$$(yzS)(-2yzS)^\xi by^{m_1}z^{m_2}(y^2S)^{i_0}(z^2S)^{j_0}(z^2T-y^2U)^{k_0}$$

であり、L_8 の $V^{2l-\xi}$ の係数は $\mathrm{mod}(x)$ で、

$$(-2yzS)^\xi cy^{n_1}z^{n_2}(y^2S)^{i_1}(z^2S)^{j_1}(z^2T-y^2U)^{k_1}$$

である。L_9 の V^ξ の係数は $\mathrm{mod}(x)$ で、

$$(yzS)(-2yzS)^\xi by^{m_1}(z^2ST-y^2SU)^{m_1}(-z)^{m_2}(z^2ST-y^2SU)^{m_2}(y^2S)^{i_0}(z^2S)^{j_0}(z^2T-y^2U)^{k_0}$$

であり、L_8 の V^ξ の係数は $\mathrm{mod}(x)$ で、

$$(-2yzS)^\xi cy^{n_1}(z^2ST-y^2SU)^{n_1}(-z)^{n_2}(z^2ST-y^2SU)^{n_2}(y^2S)^{i_1}(z^2S)^{j_1}(z^2T-y^2U)^{k_1}$$

である ($\mathrm{ch}(F)\neq 2$ に注意)。これらより、$k_0=k_1$ がわかる。$m_1+m_2=n_1+n_2$ に注意して、整理すれば、

$$by^{1+m_1+2i_0}z^{1+m_2+2j_0}=cy^{n_1+2i_1}z^{n_2+2j_1}$$

と

$$(-1)^{m_2} b y^{1+m_1+2i_0} z^{1+m_2+2j_0} = (-1)^{n_2} c y^{n_1+2i_1} z^{n_2+2j_1}$$

を得る。しかし、m_2 と n_2 の偶奇に注意すれば、矛盾がわかる。 **証明終**

命題 5.1 の証明に戻る。

$\overline{S(M)} \supseteq R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$ は、既に示した。逆を示す。

q, t を $q \geq t \geq 0$ を充す非負整数とする。このとき、x, y, z の任意の $[(t+1)/2]$ 次の単項式 m と、$i+j+k = q-t$ を充す整数 i, j, k に対して、$R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$ に含まれる $\overline{S^q(M)}$ の元で、

$$mA^i B^j C^k V^t + (V \text{ に関して } t \text{ 次未満})$$

の形の元が存在することがわかる。このとき、補題 5.2 を用いれば、直ちに

$$\overline{S(M)} = R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$$

がわかる。 **証明終**

参考文献

[1] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings*, Lect. Note in Math., vol. 1327, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988.

[2] R. Cowsik, Symbolic powers and the number of defining equations, *Algebra and its Applications*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **91** (1985), 13–14.

[3] S. D. Cutokosky, Symbolic algebras of monomial primes, *J. Reine Angew. Math.*, **416** (1991), 71–89.

[4] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon press. Oxford, 1979.

[5] M. Nagata, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Internat. Congress Math. (1958), Cambridge Univ. Press, 1960

[6] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-ups in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Alg.*, **132** (1990), 461–473.

東京都立大学 理学部 数学教室

192-03 東京都八王子市南大沢 1-1