数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 110-121

The Gorensteinness of the symbolic Rees algebras for space monomial curves p(6,-,-)

北里大学教養部　下田保博 (Yasuhiro Shimoda)

序

$A=k[[X,Y,Z]]$で、n_1,n_2,n_3をG.C.M.$(n_1,n_2,n_3)=1$なるものとする。$f:A\longrightarrow k[[t]]$を$f(X)=t^{n_1}, f(Y)=t^{n_2}, f(Z)=t^{n_3}$で定め、$\ker f=p(n_1,n_2,n_3)=p$とおく。さらに$R=R_S(p)=\sum p^{(n)}T^n \subset A[T]$をpに関するsymbolic Rees algebraとしておく。

ここで、次のようなRの環論的な性質を調べてみることにする。

1. いつRは Noeter環になるか。
2. RがNoether環ならば、Macaulay環になるか。

この問題に関して、つぎのような結果が知られている。

まず、Rは一般的には Noether環にはならないことが後藤、西田、渡辺氏によって示された。実際に、$p=p(7m-3,5mn-m-n,8n-3)$,ただし、$n>4$、$2m>n+1$とおくと、chk=0で、RはNoether環ではない。(c.f.[4])

次に、C.Hunekeにより与えられたNoether環になるための判定条件を用いると、$n_1=3,4$では、RがNoether環になることがわかる。ここで、判定条件とは、次のものである。

定理A(C.Huneke,[6])

自然数k,mと$f\in p^{(k)}, g\in p^{(m)}$なる元がとれて、ある元xについて、等式$\mathrm{length}(A/(x,f,g))=k\cdot m\cdot \mathrm{length}(A/(x+p))$を満たすとき、RはNoether環になる。

またCutkoskyは、その論文[1]のなかで、$n_1=6$ならば、RはNoether環になることをHunekeの判定条件を具体的に用いずに、示した。

次に、RがMacaulay環 になるかどうかという問題に関しては、次の判定

条件が与えられている。

定理B(後藤、西田、下田[2])

Hunekeの判定条件で与えられたf,gにたいして、$1 \leqq n \leqq k+m-2$をみたすnについて、$A/(f,g)+p^{(n)}$がMacaulay環ならば、RはMacaulay環になる。(実際には 、Gorenstein環になる。)

この結果を用いると、$n_1=3,4$では、RはGorenstein環になることが示せる。

さて、ここで次のことを注意しておく。

注意1 上記の諸結果をしめすのに素イデアルpは 2x3行列の2次の小行列式で生成されている。例えば、$n_1=3,4$では、対応する行列は、

$$\begin{pmatrix} X^u & Y & Z \\ Y & Z & X^{u'} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X^u & Y^2 & Z \\ Y & Z & X^{u'} \end{pmatrix}$$

であり、一般にはつぎのような行列 Mの2次の小行列式で生成されている。

$$M=\begin{pmatrix} X^u & Y^{v'} & Z^{w'} \\ Y^v & Z^w & X^{u'} \end{pmatrix}$$

このとき、次のことも成り立つことがわかっている。

定理C([2])

$u \leqq u', v'=mv, w' \leqq mw$をみたす自然数をとると、Rは、Noether Gorenstein環になる。

この報告集では 、$n_1=6$の場合に、RがGorenstein環になるかどうかの議論を進めていきたいと思う。

2 主結果

$p=p(6,-,-)$は次のような行列 Mの2次の小行列式で生成される。実際

pがComplete intersection idealでなければ、注意1より$6=v'w'+v(w+w')$をみたすので、

Case 1. The case of $v=2$.

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^2 & Z \\ Y^2 & Z & X^{u'} \end{pmatrix}$$

Case 2. The case of $v=1$ and $v'=4$.

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^4 & Z \\ Y & Z & X^{u'} \end{pmatrix}$$

Case3. The case of $v=1$ and $v'=3$.

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^3 & Z \\ Y & Z^2 & X^{u'} \end{pmatrix}$$

このとき、次が成り立つ。

定理2.1

(1) Case1または3ならば、RはGorenstein環になる。

(2)Case 2で、$u > u'$ならば、RはGorenstein環になる。

(3)Case 2で、$u'=k_0u+u_1, u=k_1u_1+u_2$と表したとき、$k_0=2$かつ$k_1=1$以外はすべてRはGorenstein環になる。

この定理2.1の(1)は上記の定理Cと次の定理より導かれる。

定理2.2([7])

$p=I_2(M)$で、Mが次の形ならばRはGorenstein環になる。

$$\begin{pmatrix} X^u & Y^m & Z \\ Y & Z^n & X^{u'} \end{pmatrix}$$

ただし、$m,n \geqq 2$とする。

ここでは、定理2.1の(2),(3)の証明を述べることにしたい。

3. 定理 2.1の(2)の証明。

$u > u'$より、Euclidの互除法から、

$u=k_0u'+u_1, u'=k_1u_1+u_2, \ldots, u_{n-1}=k_nu_n$ ($u > u' > u_1 > \ldots u_{n-1} > u_n \geqq 0$, かつ$k_i$は0以上の整数)と表せる。次に、$a=Z^2-X^{u'}Y^4, b=X^{u+u'}-YZ, c=Y^5-X^uZ$とおく。このとき、

補題3.1 $1 \leqq j \leqq k_0$にたいして、

$$e_{j+1} \equiv Y^{4(j+1)+1}+(-1)^{j+1}X^{u-ju'}Z^{2j+1} \mod (X^{u-(j-1)u'})$$

をみたす$e_{j+1} \in P^{(j+1)}$が存在する。

証明.

$t_2=ac-Y^3b^2$とおくと、

$$t_2 \equiv Y^5Z^2-X^{u'}Y^9-X^uZ^3-Y^3 \cdot Y^2Z^2 \mod (X^{u+u'}).$$

このとき、$e_2=t_2/(-X^{u'})$とおくと、

$$e_2 \equiv Y^9+(-1)^2X^{u-u'}Z^3 \mod (X^u).$$

次に、$j>1$として、e_{j+1}があるとせよ。このとき、$t_{j+2}=ae_{j+1}-Y^2b^2e_j$とおくと、$e_{j+2}=t_{j+2}/(-X^{u'})$とすると、

$$e_{j+2} \equiv Y^{4(j+2)+1}+(-1)^{j+2}X^{u-(j+1)u'}Z^{2j+3} \mod (X^{u-ju'}).$$

今、$r_{0,j}=j+1$, $p_{0,j}=4(j+1)+1$, $q_{0,j}=2j+1$ としておく。上の補題で$j=k_0$のときに議論をすると、

$$e_{k0+2} \equiv X^{u'-u_1}Y^{4(k_0+2)+1}+(-1)^{k_0+2}Z^{2k_0+3} \mod (X^{u'})$$

が作れる。そこで

$$r_{1,1}=k_0+2,\ p_{1,1}=4(k_0+2)+1,\ q_{1,1}=2k_0+3$$

としておく。

補題3.2 $Y^{4(k_0+1)+1}Z^{2k_0+1} \equiv d \mod(X^{u'})$ をみたす$d \in p^{(2k_0+2)}$がある。

証明. $k_0=1$ならば、$Y^9Z^3 \equiv Y^3Z^3 \cdot Y^6 \equiv (-1)^3b^3 \cdot Y \cdot c \mod(X^{u'})$

となるので、 $d=(-1)^3b^3 \cdot Y \cdot c$ とすればよい。$k_0 \geqq 2$ならば、

$d=Y^{2k_0-1} \cdot (-1)^{2k_0+1}b^{2k_0+1}c$とおくと、

$$d \equiv Y^{2k_0-1} \cdot Y^{2k_0+1} \cdot Z^{2k_0+1} \cdot Y^5 \equiv Y^{4(k_0+1)+1}Z^{2k_0+1} \mod(X^{u'})$$

補題3.3 $1 \leqq j \leqq k_1$にたいして

$$e_{j(k0+1)+1} \equiv X^{u'-ju_1}Y^{4j(k_0+1)+j+4} + (-1)^{j(k_0+1)+1}Z^{j(2k_0+1)+2} \mod(X^{u'-(j-1)u_1})$$

となる $e_{j(k0+1)+1} \in p^{\{j(k_0+1)+1\}}$がとれる。

証明. $j=1$ならばすでに構成されている. $1 \leqq j \leqq k_1-1$とする。

$$\begin{aligned} &e_{j(k0+1)+1} \cdot e_{k0+1} \\ &\equiv (X^{u'-ju_1}Y^{4j(k_0+1)+j+4} + (-1)^{j(k_0+1)+1}Z^{j(2k_0+1)+2}) \cdot \\ &\quad (Y^{4(k_0+1)+1} + (-1)^{k_1+1}X^{u_1}Z^{2k_0+1}) \\ &\equiv (-1)^{j(k_0+1)+1}Y^{4(k_0+1)+1}Z^{j(2k_0+1)+2} + X^{u'-ju_1}Y^{4(j+1)(k_0+1)+j+5} \\ &\quad + (-1)^{(j+1)(k_0+1)+1}X^{u_1}Z^{(j+1)(2k_0+1)+2} \mod(X^{u'-(j-1)u_1}). \end{aligned}$$

まず、$j=1$ならば、$e_{k0+2} \cdot e_{k0+1} \in p^{(2k_0+3)}$だから、

$$(-1)^{k_0+2} \cdot (-1)^{2k_0+3} \cdot b^{2k_0+3} \cdot Y^{2(k_0-1)}$$

$$\equiv \quad (-1)^{k_0+2} Y^{4(k_0+1)+1} Z^{2k_0+3} \quad \mod (X^{u'})$$

となるので、

$$t_{2k0+3} = e_{k0+2} \cdot e_{k0+1} - (-1)^{k_0+2} \cdot (-1)^{2k_0+3} \cdot b^{2k_0+3} \cdot Y^{2(k_0-1)}$$

とおくと、

$$e_{2k0+3} \equiv X^{u'-2u_1} Y^{8(k_0+1)+6} + (-1)^{2(k_0+1)+1} Z^{2(2k_0+1)+2} \quad \mod (X^{u'-u_1}).$$

をみたす e_{2k0+3}が存在する。

次に、$j > 1$ とすると、

$$e_{(j-1)(k0+1)+1} \equiv Z^{(j-1)(2k_0+1)+2} \quad \mod (X^{u'-(j-1)u_1})$$

かつ 補題3.2 から $Y^{4(k_0+1)+1} Z^{2k_0+1} \equiv d \mod (X^{u'})$ をみたす$d \in p(^{2k_0+2})$

があるので、

$$t_{(j+1)(k0+1)+1} = e_{j(k0+1)+1} \cdot e_{k0+1} - d\, e_{(j-1)(k0+1)+1}$$

とおくと、

$$e_{(j+1)(k0+1)+1} \equiv X^{u'-(j+1)u_1} Y^{4(j+1)(k_0+1)+j+5}$$
$$+ (-1)^{(j+1)(k_0+1)+1} Z^{(j+1)(2k_0+1)+2} \quad \mod (X^{u'-ju_1})$$

が作れる。

ここで、$1 \leqq j \leqq k_1$ にたいして、

$$p_{1,j} = 4j(k_0+1)+j+4,\ q_{1,j} = j(2k_0+1)+2,\ r_{1,j} = j(k_0+1)+1$$

と定めておく。さらに、上記補題3.3において、$j=k_1$の場合に議論をすると

$$e_{(k1+1)(k0+1)+1} \equiv Y^{4(k_1+1)(k_0+1)+k_1+5}$$
$$+ (-1)^{(k_1+1)(k_0+1)+1} X^{u_1-u_2} Z^{(k_1+1)(2k_0+1)+2} \quad \mod (X^{u_1})$$

が構成できる。そこで、

$p_{2,1}=4(k_1+1)(k_0+1)+k_1+5,\ q_{2,1}=(k_1+1)(2k_0+1)+2,\ r_{2,1}=(k_1+1)(k_0+1)+1$
と定めておく。

補題3.4
$Y^{4k_1(k_0+1)+k_1+4}Z^{k_1(2k_0+1)+2}\equiv e \mod (X^{u_1})$ をみたす $e\in p^{(2k_1(k_0+1)+2)}$
がある。

証明. $b^{k_1(2k_0+1)+2}c^{k_1}$ を考える。

$$b^{k_1(2k_0+1)+2}c^{k_1}\equiv(-1)^{k_1(2k_0+1)+2}Y^{k_1(2k_0+1)+2+5k_1}Z^{k_1(2k_0+1)+2} \mod (X^{u_1})$$

となるので、Yの指数は

$4k_1(k_0+1)+k_1+4-\{k_1(2k_0+1)+5k_1+2\}=2k_1k_0+2$ (=kとおく)
だから、

$$e=(-1)^{k_1(2k_0+1)+2}Y^k b^{k_1(2k_0+1)+2}c^{k_1}$$

とおけばよい。

次の命題によりRがNoether環になることを示そう。
命題3.5

$0\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq k_i$ にたいして自然数の列$\{p_{i,j}\},\{q_{i,j}\},\{r_{i,j}\}$とpの

symbolic powerの元の列$\{e_{r_{i,j}}\}$がとれて、次をみたす。

(1) $p_{i,j}+q_{i,j}=6r_{i,j}$ がすべての(i,j)について成り立つ。

(2) $\{p_{i,j}\},\{q_{i,j}\},\{r_{i,j}\}$ は 次の関係式をみたす。

$$A_{i,1}=A_{i-1,k_{i-1}}+A_{i-2,k_{i-2}}$$

$$A_{i,j}=A_{i-1,k_{i-1}}+A_{i,j-1}\qquad \text{for } j\geqq 2.$$

(3) $e_{r_i,j}$ は次の形である。

$$
e_{r_i,j} \equiv \begin{cases} Y^{p_{i,j}} + (-1)^{r_{i,j}} X^{u_{i-1}-ju_i} Z^{q_{i,j}} & (i:\text{even}) \\ & \mod (X^{u_{i-1}-(j-1)u_i}) \\ X^{u_{i-1}-ju_i} Y^{p_{i,j}} + (-1)^{r_{i,j}} Z^{q_{i,j}} & (i:\text{odd}) \end{cases}
$$

証明. iまで成り立つとし、さらに$e_{r_{i+1},1}$が作れると仮定しておく。このとき、

主張. i+1について構成できる。さらに$e_{r_{i+2},1}$が作れる。

実際、i=0,1では成り立つので、i ＞1とする。

1. iがevenのとき

$$
\begin{aligned}
e_{r_i,k_i} \cdot e_{r_{i+1},1} &\equiv (Y^{p_{i,k_i}} + (-1)^{r_{i,k_i}} X^{u_{i+1}} Z^{q_{i,k_i}})(X^{u_i-u_{i+1}} Y^{p_{i+1,1}} + (-1)^{r_{i+1,1}} Z^{q_{i+1,1}}) \\
&\equiv (-1)^{r_{i+1,1}} Y^{p_{i,k_i}} Z^{q_{i+1,1}} + X^{u_i-u_{i+1}} Y^{p_{i+1,1}} Y^{p_{i,k_i}} \\
&\quad + (-1)^{r_{i,k_i}} X^{u_{i+1}} Z^{q_{i,k_i}} (-1)^{r_{i+1,1}} Z^{q_{i+1,1}} \quad \mod (X^{u_i})
\end{aligned}
$$

であり、一方$e_{r_{i-1},k_{i-1}} \equiv Z^{q_{i-1,k_{i-1}}} \mod (X^{u_i})$から、

$$
(*) \qquad f \equiv (-1)^{r_{i+1,1}} Y^{p_{i,k_i}} Z^{q_{i,k_i}} \mod (X^{u_i})
$$

をみたす$p^{(2r_{i,k_i})}$の元f があることを示せば、

$$
t = e_{r_i,k_i} \cdot e_{r_{i+1},1} - e_{r_{i-1},k_{i-1}} \cdot f
$$

と関係式が作れる。これより$e_{r_{i+1},2}$ が作れることになる。

(*)の証明

$p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j}$ の作り方より、もし $r_{i,k_i} = Sr_{0,k_0} + Tr_{1,k_1}$ ならば、$p_{i,k_i} = Sp_{0,k_0} + Tpr_{1,k_1}$, $q_{i,k_i} = Sq_{0,k_0} + Tq_{1,k_1}$ だから、

$$Y^{p_{i,ki}} Z^{q_{i,ki}} = (Y^{p_{0,k0}} Z^{q_{0,k0}})^{S} (Y^{p_{1,k1}} Z^{q_{1,k1}})^{T}$$
$$\equiv d^{S} \cdot e^{T} \qquad \mathrm{mod}\,(X^{q_i})$$

とできるので、$f = (-1)^{q_{i+1,1}} d^{S} \cdot e^{T}$ とすればよい。

さて、上記と同様にして

$$t = e_{ri,ki} \cdot e_{ri+1,j-1} - e_{ri+1,j-2} \cdot f$$

を考えることにより、$e_{ri+1,j}$ が構成できる。さらに、上の式で、$j-1=k_{i+1}$ とすれば、$e_{ri+2,1} \equiv Y^{p_{i+2,1}} + (-1)^{q_{i+2,1}} X^{q_{i+1}-u_{i+2}} Z^{q_{i+2,1}} \ \mathrm{mod}\,(X^{q_{i+1}})$ が同様に構成できる。

2 iがoddのとき。この場合も1の場合と同様にして(*)のfを用いて構成ができる。詳しいことは省略したい。

上の命題から次が導かれる。

系3.6 RはNoether環である。

証明. 定理Aのf,gとして $f = e_{rn,kn} \equiv Y^{p_{n,kn}} + (-1)^{r_{n,kn}} Z^{q_{n,kn}}$, $g = b$ とおけば、

$$\mathrm{length}(A/(x,f,g)) = p_{n,kn} + q_{n,kn} = 6 \cdot \mathrm{length}(A/(x+p))$$

をみたすので、Hunekeの判定条件によりRは Noether環になる。

さて$u > u'$のときにRがGorenstein環になることを示す。そのためには、定理Bと系3.6より$1 \leq k \leq r_{n,kn-2}$について$A/[(f,g)+p^{(k)}]$がMacaulay環になればよい。方針は 第13回可換環論シンポジウム報告集[7]と同様ですので省略いたします。

4. 定理2. 1の(2)の証明

ここでは、$u' > u$であるので、

$u' = k_0u+u_1, u=k_1u_1+u_2, \ldots, u_{n-1}=k_nu_n$ $(u' > u > u_1 > \ldots u_{n-1} > u_n \geqq 0$, かつ$k_i$は0以上の整数)と表せる。次に、$a=Z^2-X^{u'}Y^4, b=X^{u+u'}-YZ, c=Y^5-X^uZ$とおく。

このとき、補題3．1と同様にして

$t_2=ac-Y^3b^2$とおくと、

$$t_2 \equiv Y^5Z^2-X^{u'}Y^9-X^uZ^3-Y^3 \cdot Y^2Z^2 \quad \mathrm{mod}\,(X^{u+u'}).$$

よって、$e_2 = t_2/(-X^u)$とおくと、

$$e_2 \equiv (-1)^2X^{u'-u}Y^9+Z^3 \quad \mathrm{mod}(X^{u'}).$$

k_0 が3以上ならば、$t_3=e_2c-(-1)^3Y^2b^3$ とおけば

$$e_3 \equiv (-1)^3X^{u'-2u}Y^{14}+Z^4 \quad \mathrm{mod}(X^{u'-u})$$

がとれて、さらに$t_4=e_3c-(-1)^4Yb^4$ とおくと

$$e_4 \equiv (-1)^4X^{u'-3u}Y^{19}+Z^5 \quad \mathrm{mod}(X^{u'-2u})$$

が作れる。さらにk_0 が4以上ならば、$t_5=e_4c-(-1)^5b^5$ とおくと

$$e_5 \equiv (-1)^5X^{u'-4u}Y^{24}+Z^6 \quad \mathrm{mod}(X^{u'-3u})$$

ができる。またk_0 が3ならば、$t_5=e_4c-(-1)^5b^5$ とおくと

$$e_5 \equiv (-1)^5Y^{24}+X^{u_1-u_2}Z^6 \quad \mathrm{mod}(X^{u'-3u})$$

ができる。まとめて

補題4．1　Rは k_0 が3以上ならばNoether環である。

証明. k_0 が3ならば　$f=e_4, g=e_5$　とおけば、

$$\mathrm{length}(A/(X,f,g)) = 24 \cdot 5 = 4 \cdot 5 \cdot \mathrm{length}(A/(X)+p)$$

となり、定理AからRは Noether環になる。次にk_0 が4以上ならば

$f=e_5$, $g=c$ とおくと、やはり定理AからRは Noether環になる。

命題4．2 Rは k_0 が3以上ならばGoernstein 環である。

証明． 定理Bにより k_0 が3ならば、$1\leqq k\leqq 7$ について $B_k=A/[(f,g)+p^{(k)}]$ がMacaulay環になることを示し、k_0 が4以上ならば、$1\leqq k\leqq 4$ について B_k がMacaulay環になることを言えばよい。それには、実際に $I_k=(X)+(f,g)+p^{(k)}$ を計算すればよい。例えば、k_0 が4以上ならば、

$$I_2=(X)+(Y^5,Z^6)+(Z^3)+(Z^2,YZ,Y^5)^2=(X)+(Z^3,Y^2Z^2,Y^5)$$

$$I_3=(X)+(Y^5,Z^6)+(Z^4)+(Z^2,YZ,Y^5)(Z^3,Y^2Z^2,Y^5)=(X)+(Z^4,Y^3Z^3,Y^5)$$

$$I_4=(X)+(Y^5,Z^6)+(Z^5)+(Z^2,YZ,Y^5)(Z^4,Y^3Z^3,Y^5)=(X)+(Z^5,Y^4Z^4,Y^5)$$

となり、B_k が Macaulay環になる。k_0 が3のときも同様である。

k_0 が 1または 2のときには、次が成り立つ。

命題4．3 $k_0=1$ ならば、Rは Gorenstein環である。

証明． 第3章の方針と同じにすればよい。そこで、詳細は省くことにする。

最後に $k_0=2$ のときは、$k_1=1$ 以外では次が成り立つ。

命題4．4 Rは Gorenstein環である。

この証明では、第3章の補題3．1に相当するものが、成り立たないので、代わりに、補題3．1に対応する結果を $i=3$ のときに、見つけなくてはいけない。したがって、$k_1=1$ のときには、$i=3$ のときでも、まだ見つかっていない。

参考文献

[1] S.Cutokosky; Symbolic algebras of monomial primes, J.reine und ang. Math., to appear.

[2]S.Goto,K.Nishida and Y.Shimoda; The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves, J.Math.Soc.Japan,Vol 43 (1991) 465-481.

[3]___________; The Gorensteinnessof the symbolic blow-ups for certain space monomial curves,Trans.A.M.s.,to appear.

[4]S.Goto,K.Nisida and K.Watanabe; Non-Cohen-Macaulay symbolic Rees algebras for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question, preprint 1991.

[5]C.Huneke; On the finite generation of symbolic blow-ups, Math. Z., 179 (1982), 465-472.

[6]____________; Hilbert functions and symbolic powers, Michigan Math.J.,34 (1987), 293-318.

[7] Y.Shimoda; On the symbolic Rees algebra for certain prime ideal,The report of the 13-th Commutative algebra symposyum at Toyama, (1991), 39-46. (in Japanese).